Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №4(114) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.925.51

ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ ДИНАМІКОЮ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ

В. В. Рутицька

Резюме. Мета даного наукового дослідження полягає у розробці нових математичних моделей для розв'язування задач управління інвестиційними портфелями за допомогою методів фундаментального аналізу. Застосування прикладного математичного моделювання та теорії керування дає можливість конструктивно розв'язувати задачі інвестиційного менеджменту, досліджувати стратегії управління портфелем активів та інших фінансових інструментів у випадку опису відповідних процесів динамічними детермінованими математичними моделями.

При дослідженні ринку фінансових інвестицій зусилля математиків значною мірою спрямовані на розгляд багатокритеріальних задач з великою кількістю критеріїв, на вивчення і розв'язання задач інвестиційного менеджменту в динамічній постановці, способах адекватного опису випадкових процесів зміни цін, на розробку прикладних чисельних методів для розв'язання задач великої розмірності.

Динамічні моделі управління активами і зобов'язаннями (ALM) знайшли найбільш успішне застосування у сфері довгострокового фінансового планування, де необхідність неодноразового прийняття рішень визначається сутністю процесу. Приклади роботи методики ALM включають реалізовані моделі для пенсійних фондів, страхових компаній, інвестиційних компаній, банків, університетських фондів.

Загальна схема активного управління портфелем акцій, як правило, складається з таких кроків:

1. Розрахунок ціни окремої акції на основі статичних детермінованих моделей.
2. Аналіз статичного портфеля акцій.
3. Моделювання динаміки активу.
4. Моделювання динаміки портфеля активів.
5. Інтегральне управління і диверсифікація портфеля активів.

Разом з тим, з метою перерозподілу і зменшення ризиків інвестування розглядають задачу Д. Тобіна для портфеля змішаної структури.

Відомі також приклади застосування «наївної політики» при розміщенні фінансових ресурсів. Хоча варто відмітити, що вона супроводжується значною волатильністю (дисперсія цільової функції до року). Прикладом такого інвестування є структура, що включає: 50% акцій компаній-резидентів;

5% звичайних акцій компаній-нерезидентів; 30% цінних паперів з фіксованим доходом (облігації, привілейовані акції, т. ін.); 5% паперів від вкладання в нерухомість; 10% активів, прирівняних до готівки.

Перші два кроки загальної схеми детально описано в сучасній науковій літературі, тому зосередимось на підходах, що дозволяють моделювати динаміку формування інвестицій та аналізувати її у детермінованому випадку.

Розглянемо «ринкову модель Шарпа» [4] з метою перейти від задачі статичної до динамічної

$$r = \alpha + \beta SM_{ind} + \varepsilon, \tag{1}$$

де r — ринкова ціна акції; SM_{ind} — індекс фондового ринку; α — деяке базове значення для r. Рівняння (1) описує лише загальні принципи формування ринкової вартості акції. Із наведеного вище співвідношення видно, що ринкова вартість акції формується за рахунок інтегрального впливу індексу фондового ринку та випадкової складової ε. Коефіцієнт β формально можна розглядати як характеристику впливу індексу ринку на формування ринкової вартості однієї акції. Зважаючи на те, що такі процеси відбуваються у часі, можемо записати

$$r(t) = \alpha(t) + \beta SM_{ind}(t) + \varepsilon.$$

Тоді

$$r(t + \delta t) = r(t) + \beta SM_{ind}(t).$$

Було б значним спрощенням при моделюванні такого складного процесу розглядати функцію SM_{ind} як основну і єдину, що формує значення $r(t+\delta t)$. Аналіз факторів, що впливають на динаміку процесу дає підстави стверджувати, що до таких суттєвих факторів можна віднести також кореляційні залежності між цінними паперами, а також інфляцію [1]. Тому запишемо його у вигляді

$$r_i(t + \delta t) = r_i(t) + \beta(SM_{ind}(t),\, I(t),\, \rho_{ij}, r_i(t)), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Враховуючи сказане, праву частину (3) запишемо у вигляді

$$r_i(t + \delta t) = r_i(t) + ((\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j)\delta t, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$\frac{r_i(t + \delta t) - r_i(t)}{\delta t} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j)\delta t, \quad i = \overline{1, n}.$$

Сучасні технології торгівлі цінними паперами та умови формування ринкової вартості акцій на фондовому ринку дають можливість здійснити наступний крок

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j)\delta t, \quad i = \overline{1, n}.$$

де α_1, α_2 — параметри моделі.

Динамічне рівняння формування ринкової вартості акції можна розглядати також у вигляді

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j)\delta t, \quad i = \overline{1, n}.$$

У цьому випадку $\rho_{i,j}$, $i = \overline{1, n}$ також є вектором параметрів моделі, що враховує кореляційні залежності між акціями. Тут кількість акцій, з якими корелює i-та акція.

Для того, щоб сформулювати задачу оптимального керування параметрами портфеля акцій, побудуємо його модель на основі моделі однієї акції [1].

На інтервалі часу $t \in [t_0, t_1]$ рівняння, що описує прибутковість портфеля акцій r_p, має вигляд

$$r_p(t) = \sum_i x_i(t) r_i(t),$$

де x_i — частка акцій i-того виду у портфелі; r_i — очікувана прибутковість акцій i-того виду. Продиференціювавши обидві частини за t, отримаємо

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = \sum_i (r_i(t) \frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t) \frac{dr_i(t)}{dt}). \tag{2}$$

Зважимо на те, що для $i \neq j$ мають місце співвідношення

$$\sum_i x_i(t) r_i(t) \frac{f_i}{r_i(t)} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times r_i(t) \frac{f_j}{r_j(t)},$$

$$\sum_i \frac{x_i(t) r_i(t)}{x_i(t)} \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times r_i(t) \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}. \tag{3}$$

В (3) функція f є правою частиною математичної моделі формування ціни акції [1]

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t)) r_i(t) + \alpha_3 (x(t), r(t)). \tag{4}$$

Тоді динамічне рівняння формування ціни портфеля акцій матиме вигляд

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right), \quad i \neq j. \tag{5}$$

Останнє співвідношення при припущеннях, зроблених вище, описує динаміку поведінки портфеля ризикованих цінних паперів. Більш детальний його аналіз вказує на дві важливі властивості, які характеризують ринкову вартість портфеля і полягають в тому, що ця динаміка залежить від динаміки як очікуваної прибутковості акцій, так і зміни структури портфеля.

Для моделей (4), (5) задачу з фіксованим часом, закріпленим лівим кінцем та вільним правим кінцем у випадку, коли оптимальність розглядають у розумінні мінімуму функціонала

$$J = \sum_i x_i r_i(t_1), \tag{6}$$

де $x_i(t)$ — величини, які характеризують структуру портфеля. Можемо припустити, що застосовуючи «наївну політику» інвестування для заданого інтервалу часу ці величини є постійними. Таким чином, необхідно побудувати оптимальний процес, що починається у заданій точці x_0 і надає функціоналу (6) найменше можливе значення. Матимемо

$$\begin{gathered} J = \textstyle\sum_i x_i r_i(t_1) = \sum_i x_i(r_i(t_1) - r_i(t_0)) + \sum_i x_i r_i(t_0) = \\ = \textstyle\sum_i x_i \int_{t_0}^{t_1} f_i(r(t), u(t))dt + const = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i x_i f_i(r(t), u(t))dt + const. \end{gathered} \tag{7}$$

Із наведеного вище випливає, що $J = I + const$, де I —функціонал в задачі принципу максимуму Понтрягіна, в якому функція f_0 має вигляд

$$f^0(x,u) = \sum_i c_i f^i(x,u).$$

Існування розв'язку даної задачі безпосередньо випливає із відповідної теореми про оптимальність розв'язку задачі оптимального керування із закріпленим часом [3]. Можна показати також, що побудова відповідних множин досяжності для моменту t_1 може бути зведена до розв'язання серії задач мінімізації функціонала $J = (x, r(t_1))$. Варіюючи вектором x і, розв'язуючи відповідні задачі оптимального керування для різних значень x, отримаємо точки границі множини досяжності і опорні гіперплощини у цих точках.

Для спрощення подальших викладок математичну модель (5) в більш загальній формі запишемо так

$$\dot{r}_p = f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i). \tag{8}$$

Граничну умову, що характеризує ринкову вартість портфеля акцій у початковий момент часу t_0 сформулюємо у вигляді

$$r_p(t_0) = r_{p_0}, \tag{9}$$

Критерій якості, на відміну від (6), запишемо у вигляді

$$J = \sum_I x_i(t_1) r_i(t_1). \tag{10}$$

Для розв'язання задачі оптимального керування (8), (9), (10) застосуємо метод послідовних наближень. Уведемо позначення

$$f(x,u,t) = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} + \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right), i \neq j.$$

Тут як змінна фазового стану розглядається ринкова вартість портфеля акцій r_p. За керуючі параметри, згідно з моделлю, розглядаємо вектор

$$u(t) = \left(x_i(t), r_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}, \frac{dr_i(t)}{dt} \right).$$

Відомо, що загальна процедура методу послідовних наближень полягає у конструюванні послідовності допустимих керувань $\{u^k(t)\}$ такої, що на кожному наступному кроці

$$u^{k+1}(t) = Ru^k(t), k = 0, 1, 2, ...,$$

де u^0 — деяке початкове наближення вектора керувань; $Ru(t)$ — довільна допустима функція, що надає максимуму функції Гамільтона за керуванням. Для лінійної динамічної математичної моделі (5) формування вартості портфеля та критерія якості (6) $(k+1)$-ша ітерація методу матиме такий вигляд. Нехай $u^k(t)$ визначено.

Крок 1. Розв'язати задачу Коші для початкової системи (5) і знайти фазову траєкторію $r_p^k(t)$, що задовольняє керуванню $u^k(t)$.

Крок 2. Побудувати спряжену систему і, розв'язавши для неї задачу Коші, визначити вектор-функцію $p(t)$, що відповідає керуванню $u^k(t)$; при цьому замість $x(t)$ підставляється побудована функція $x^k(t)$. Тут $p(t)$ — вектор-функція, що є розв'язком задачі Коші відповідної спряженої системи.

Крок 3. За умови максимуму функції Гамільтона за керуванням знайти нове наближення $u^k(t)$ для керування. Після цього переходимо до наступної ітерації. Умовою закінчення процесу може слугувати близькість керуючих функцій двох послідовних наближень

$$\left\| u^{k+1}(t) - u^k(t) \right\| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Величину ε можна вибирати, наприклад, за умови наявності у оптимального портфеля акцій наперед заданих якісних характеристик.

Література

1. Гаращенко Ф. Г., Кулян В. Р., Рутицкая В. В. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента // Кибернетика и вычислительная техника. — 2005. — №148. — С. 3–10.
2. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. Алгоритм метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления. — М: Наука, 1971. — 247 с.
3. William F. S., Gordon J. A., Jeffrey W. Bailey Investments. — Prentice Hall, 1999. — 992 p.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 01.10.2013