Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2014, №1(115) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ВИБІР РАЦІОНАЛЬНИХ АЛЬТЕРНАТИВ ЗА НЕЧІТКОЮ МНОЖИНОЮ КОМПРОМІСНИХ ЦІЛЕЙ

О. М. Бовсунівський

Резюме. Розглядається задача раціонального вибору альтернатив, у якій ціль особи, що приймає рішення (ОПР), задана нечіткою множиною чітких множин компромісних цілей. Така модель дозволяє приймати рішення у випадку, коли неможливо побудувати функції корисності, які характеризують ціль ОПР, і дозволяє використовувати функцію належності нечіткої множини актуальних для ОПР цілей як джерело додаткової інформації для вибору однієї конкретної альтернативи. Також, пропонується метод побудови агрегованої цілі ОПР, як нечіткої множини типу 2, та прийняття рішень за нею.

Дослідження різноманітних задач нечіткого математичного програмування (НМП), свідчать про актуальність цієї тематики. Значна увага в літературі приділяється: задачам досягнення нечітко поставленої цілі з нечіткими обмеженнями [1]; задачам НМП з нечіткою множиною альтернатив; задачам узагальненого НМП з ціллю, що задана нечітким відображенням [2]; задачам математичного програмування з нечіткими параметрами [3] та іншим. В даній роботі розглядається задача прийняття рішень з нечіткою множиною компромісних цілей. З одного боку, таке узагальнення дозволяє аналізувати ситуації у випадку, якщо неможливо чітко вказати, які множини характеризують ціль ОПР, а з іншого — допомагає глибше та більш точно зрозуміти процес прийняття рішень, шляхи пошуку та вибору раціональних альтернатив в умовах нечіткої інформації.

Нехай X — універсальна множина альтернатив, на якій задані: нечітка множина D альтернатив з функцією належності $\mu_D : X \to [0,1]$; $G_i \subseteq X$, $i \in N$, — чіткі цільові множини особи, що приймає рішення (ОПР), з характеристичними функціями, відповідно $\mu_{G_i} : X \to \{0,1\}$, $i \in N$; $N = \{1,2,\ldots,n\}$ — множина цільових множин, n — їхня кількість. ОПР намагається реалізувати хоча б одну зі своїх цілей. Тому далі будемо називати ці цілі компромісними.

По аналогії з відомим підходом Белмана-Заде [1] до задачі вибору раціональної альтернативи з нечіткої множини за ціллю ОПР, яка задана перетином цільових множин, загальним розв'язком поставленої вище задачі є нечітка множина $X^* = D \bigcap G$, де $G = \bigcup_{i\in N} G_i$ є агрегованою множиною цілей. Якщо ОПР хоче вибрати деякий конкретний розв'язок, то вона може вибрати, так звану, максимізуючу альтернативу за умовою

$\mu(x^*) = max_{x\in X}\mu(x)$, де $\mu(x) = min\{\mu_D(x), max_{i\in N}\mu_{D_i}(x)\}$ — функція належності нечіткої множини X^* розв'язків.

На практиці досить часто виникають ситуації, коли в момент прийняття рішення ОПР не може чітко вказати, які саме множини G_i, $i \in N$, характеризують її альтернативні цілі, а може задати їхню нечітку підмножину $\tilde{N} \subseteq N$. Нехай $\eta : N \to [0,1]$ — функція належності нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин G_i, які характеризують альтернативні цілі ОПР. Тоді агреговану ціль ОПР можна задати у вигляді об'єднання $\tilde{G} = \bigcup_{i\in\tilde{N}} G_i$ нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин G_i, $i \in N$. Визначимо це поняття відповідно до запропонованого у [4,5] підходу.

Розглянемо множину $G = \bigcup_{i\in N} G_i$, яка є об'єднанням чіткої множини N чітких множин G_i, $i \in N$. За класичною теорією множин вона є чіткою множиною, яка задається характеристичною функцією $\mu_G(x) = = max_{j\in N}\mu_{G_j}(x)$, $x \in X$, значення якої для кожної фіксованої альтернативи $x \in X$ визначається як максимум цільової функції задачі звичайного (чіткого) математичного програмування вигляду $\mu_G = = max_{j\in N}\mu_{G_j}$.

У випадку об'єднання нечіткої множини $\tilde{N}$ нечітких множин G_i, $i \in N$, множина $\tilde{G} = \bigcup_{i\in\tilde{N}} G_i$ буде задаватися функцією належності

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = max_{j\in\tilde{N}}\mu_{G_j}(x),\ x \in X. \tag{1}$$

Значення цієї функції для кожної альтернативи $x \in X$ буде визначатися як максимум цільової функції задачі нечіткого математичного програмування

$$\mu_{\tilde{G}} = max_{j\in\tilde{N}}\mu_{G_j}. \tag{2}$$

Згідно до С. Орловського [2], розв'язком задачі (2) вважається нечітка множина $\tilde{N}^{\bigcup}$, носієм якої є множина оптимальних за Парето розв'язків (позначатимемо її через supp$\tilde{N}^{\bigcup}$) задачі

$$\mu_{G_i} \to max,\ \eta(i) \to max,\ i \in N. \tag{3}$$

Функцією належності $\eta^{\bigcup}$ нечіткої множини $\tilde{N}^{\bigcup}$ є звуження функції належності $\eta(i)$, $i \in N$, з універсальної множини індексів критеріїв N на множину supp$\tilde{N}^{\bigcup}$. Ця функція належності буде мати вигляд

$$\eta^{\bigcup}(i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in \text{supp } \tilde{N}^{\bigcup}, \\ 0, & i \notin \text{supp } \tilde{N}^{\bigcup}. \end{cases}$$

Відповідно до розв'язку задачі (2), яким є нечітка множина $\tilde{N}^{\bigcup}$, за [2] визначається нечітка множина $\Re$ оптимальних значень цільової функції цієї задачі. Вона задається функцією належності $\rho : \{0,1\} \to [0,1]$, $\rho(z) = = max_{\mu_{G_j}=z}\eta^{\bigcup}(j)$, $z \in \{0,1\}$.

Слід відмітити, що функція належності $\rho(z)$, $z \in \{0,1\}$, нечіткої множини $\Re$ оптимальних значень цільової функції задачі (2) визначена на двоелементній множині $\{0,1\}$. Це пояснюється тим, що при довільній фіксованій альтернативі $x \in X$ будь-яка характеристична функція $\mu_{G_j}(x)$, $j \in N$, може набувати значення 0 або 1.

Таким чином, для кожної фіксованої альтернативи $x \in X$ значення функції належності (1) нечіткої множини $\tilde{G} = \bigcup_{i\in\tilde{N}} G_i$ також утворює нечітку множину, а це означає, що нечітка множина $\tilde{G}$ є, так званою [4, 5], нечіткою множиною типу 2.

Для довільної альтернативи $x \in X$ розглянемо відношення домінування, яке породжується цільовими множинами задачі (3) на універсальній множині цілей N.

Вважатимемо, що ціль з індексом $i \in N$ домінує ціль з індексом $j \in N$ для альтернативи $x \in X$ і позначати це $i \succ_{(x)} j$, якщо мають місце такі нерівності: $\mu_{G_i}(x) \geq \mu_{G_j}(x)$, $\eta(i) \geq \eta(j)$, і хоча б одна з цих нерівностей є строгою.

Дане відношення домінування дозволяє визначити множину оптимальних за Парето розв'язків двокритеріальної задачі (3), яка буде носієм нечіткої множини розв'язків задачі нечіткого математичного програмування (2).

Для довільної альтернативи $x \in X$ позначимо цей носій у вигляді

$$supp\tilde{N}^{\bigcup}(x) = \{i \in N \mid j \not\succ^{(x)} i, \forall j \in N\}. \tag{4}$$

Для довільних $x \in X$, $i \in N$ визначимо функцію належності нечіткої множини розв'язків задачі (2)

$$\eta^{\bigcup}(x,i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in \text{supp } \tilde{N}^{\bigcup}(x), \\ 0, & i \notin \text{supp } \tilde{N}^{\bigcup}(x). \end{cases} \tag{5}$$

Тоді, об'єднанням нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин G_i, $i \in N$, відповідно до [5] будемо називати $\tilde{G} = \bigcup_{i\in\tilde{N}} G_i$ — нечітку множина типу 2, яка задається трійками $(x, \mu_{\tilde{G}}(x,z))$, де x — елемент множини альтернатив X, z — елемент універсальної множини {0,1}, а $\mu_{\tilde{G}}(x,z)$ — нечітке відображення $X \times \{0,1\} \to [0,1]$, яке виконує роль його нечіткої функції належності:

$$\mu_{\tilde{G}}(x,z) = max_{i\in N}\{\eta^{\bigcup}(x,i) \mid \mu_{G_i}(x) = z\}, \tag{6}$$

якщо $\exists i \in N$, $\mu_{G_i}(x) = z$, $z \in \{0,1\}$, та

$$\mu_{\tilde{G}}(x,z) = 0, \tag{7}$$

якщо $\mu_{G_i}(x) \neq z$, $\forall i \in N$, $z \in \{0,1\}$.

Позначимо $I^* = Argmax_{j\in N}\eta(j)$. Суттєве спрощення обчислення функції належності $\mu_{\tilde{G}}(x,z)$ нечіткої множини типу 2 за формулами (4) – (7) надає

Теорема 1. *Нехай G_i, $i \in N$, — чіткі множини, які задані на множині X відповідними характеристичними функціями $\mu_{G_i}(x)$, $x \in X$, $i \in N$, — функція належності нечіткої множини $\tilde{N}$. Для того, щоб нечітка множина $\tilde{G}$ типу 2, яка задана відображенням належності $\mu_{\tilde{G}}(x,z)$, $x \in X$, була об'єднанням нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин G_i, $i \in N$, тобто*

$\tilde{G} = \bigcup_{i\in\tilde{N}} G_i$ *необхідно й достатньо, щоб для* $x \in X$*:*

$$\mu_{\tilde{G}}(x,1) = \begin{cases} max_{\mu_{G_i}(x)=1}\eta(i), & \exists i \in N : \mu_{G_i}(x) = 1, \\ 0, & \mu_{G_i}(x) = 0,\ \forall i \in N; \end{cases}$$
$$\mu_{\tilde{G}}(x,0) = \begin{cases} max_{i\in N}\eta(i), & \mu_{G_i}(x) = 0,\ \forall i \in I^*, \\ 0, & \exists i \in I^* : \mu_{G_i}(x) = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Доведення. Покажемо, що формули (6), (7) еквівалентні

$$\mu_{\tilde{G}}(x,z) = \begin{cases} max_{i\in N(x,z)}\eta(i), & N(x,z) \neq \varnothing, \\ 0, & N(x,z) = \varnothing, \end{cases} \tag{9}$$

де

$$N(x,z) = \{i \in N | z = \mu_{G_i}(x) = max_{\eta(j)\geq\eta(i)} = \mu_{G_i}(x), \eta(i) =$$

$$= max_{\mu_{G_j}(x)\geq\mu_{G_i}(x)}\eta(j)\}. \tag{10}$$

Відзначимо, що з формул (6), (7) очевидно випливає

$$\mu_{\tilde{G}}(x,z) = max_{i\in N^{\cup}(x)}\{\eta(i)|\mu_{G_i}(x) = y\}, \tag{11}$$

якщо $\exists i \in N : \varphi_i(x) = z$ та

$$\mu_{\tilde{G}}(x,z) = 0, \tag{12}$$

якщо $\mu_{G_i}(x) \neq z$, $\forall i \in N$.

Для доведення еквівалентності (6), (7) та (9) достатньо показати, що формули (11), (12) еквівалентні (9). Скористаймося відомою [6] теоремою про необхідні й достатні умови ефективності альтернатив в задачах багатокритеріальної оптимізації, згідно якої множина оптимальних за Парето розв'язків двокритеріальної задачі (3) буде мати вигляд

$$M^{PO}(x) = \{i \in M | \mu_{G_i}(x) = max_{\eta(j)\geq\eta(i)} | \mu_{G_j}(x), \mu(i) =$$

$$= max_{\mu_{G_j}(x)\geq\mu_{G_i}(x)}\mu(j)\}. \tag{13}$$

З (10), (13) випливає, що $N(x,z) = \mathrm{supp}\ \tilde{N}^{\cup}(x) \bigcap \{i \in N | \mu_{G_i}(x) = z\}$. Тому формули (11), (12) еквівалентні (9). Звідси можна зробити висновок, що формула (7) також еквівалентна (9).

Тепер для доведення теореми достатньо показати еквівалентність формул (8) та (9). Для початку запишемо (10) для $z = 1$ у двох можливих випадках. Нехай $\mu_{G_i}(x) = 0$, $\forall i \in N$. Тоді згідно (8) $\mu_{\tilde{G}}(x,1) = 0$. З іншого боку, з (10) випливає, що $N(x,1) = \varnothing$. Тому згідно (9) також отримаємо $\mu_{\tilde{G}}(x,1) = 0$.

В другому випадку, нехай $\exists i \in N : \mu_{G_i}(x) = 1$. Визначимо відповідно до (9) значення $\mu_{\tilde{G}}(x,1)$. Для цього за (10) побудуємо множину $N(x,0) = \{i \in N | 1 = \mu_{G_i}(x) = max_{\eta(j)\geq\eta(i)}\mu_{G_j}(x), \eta(i) = max_{\mu_{G_j}(x)=1}\eta(j)\}$. Покажемо, що $N(x,1) = Argmax_{\mu_{G_i}(x)=1}\eta(j)$. Позначимо через $\eta_1^*(x) = max_{\mu_{G_i}(x)=1}\eta(j)$.

Нехай $i \in Argmax_{\mu_{G_j}(x)=1}\eta(j)$, тоді $\eta(i) = \eta_1^*(x)$ та $max_{\eta(j)\geq\eta(i)} = \mu_{G_j}(x) = = max\{max_{\eta(j)=\eta_1^*(x)}\mu_{G_j}(x), max_{\eta(j)>\eta_1^*(x)}\mu_{G_j}(x)\}$, звідси $\mu_{G_j}(x) = 1$ (оскільки $max_{\eta(j)=\eta_1^*(x)}\mu_{G_j}(x) = 1$). З одержаних рівностей очевидно випливає, що $i \in N(x,1)$.

Тепер навпаки, нехай $i \in N(x,1)$. Тоді виконуються рівності: $1 = \mu_{G_i}(x) = = max_{\eta(j)>\eta(i)}\mu_{G_j}(x)$ та $\eta(i) = \eta_1^*(x)$. Звідси $i \in Argmax_{\mu_{G_j}(x)=1}\eta(j)$, тоді згідно з (8) одержимо $\mu_{\tilde{G}}(x,0) = \eta_1^*$. Таким чином, формули (8) та (9) еквівалентні при $z = 1$.

Далі запишемо (10) для $z = 0$ у двох лише можливих випадках. Позначимо $\eta_0^* = max_{j\in N}\eta(j)$ та нагадаємо про позначення $I^* = Argmax_{j\in N}\eta(j)$. Спочатку нехай $\mu_{G_i}(x) = 0$, $\forall i \in I^*$. Тоді згідно з (8) $\mu_{\tilde{G}}(x,0) = \eta_0^*$. Визначимо значення $\mu_{\tilde{G}}(x,0)$ за формулою (9). Для цього побудуємо у відповідності з (10): $N(x,0) = \{i \in N | 0 = \mu_{G_i}(x) = max_{\eta(j)\geq\eta(i)}\mu_{G_j}(x),$ $\eta(i) = max_{j\in N}\eta(j)\} = \{i \in I^* | 0 = \mu_{G_i}(x) = max_{j\in I^*}\mu_{G_j}(x)\} = I^*$. Звідси згідно з (9) $\mu_{\tilde{G}}(x,0) = \eta_0^*$.

Розглянемо другий випадок. Нехай $\exists i \in I^* : \mu_{G_i}(x) = 1$. Тоді згідно з (8) $\mu_{\tilde{G}}(x,0) = 0$. Визначимо значення $\psi(x,0)$ відповідно до (9). На підставі (10) одержимо множину $N(x,0) = \{i \in N | 0 = \mu_{G_i}(x) = max_{\eta(j)\geq\eta(i)}\mu_{G_j}(x),$ $\eta(i) = max_{j\in N}\eta(j) = \eta_0^*\} = \{i \in I^* | 0 = \mu_{G_i}(x) = max_{j\in I^*}\mu_{G_j}(x) = 1\} = \varnothing$.

Звідси згідно з (9) $\phi(x,0) = 0$, а тому формули (8) та (9) — еквівалентні при $z = 0$.

Теорему доведено. □

Приклад 1. Нехай множина $X = \{a,b,c,d\}$. На ній задані дві чіткі множини G_1, G_2 з функціями належності, відповідно $\mu_{G_1}(x)$, і $\mu_{G_2}(x)$ (табл. 1). Функція належності $max\{\mu_{G_1}(x),\ \ \mu_{G_2}(x)\}$ їх об'єднання вказана в третьому рядку табл. 1. Нехай також задана нечітка підмножина $\tilde{N}$ множини $N = \{1,2\}$ з функцією належності $\eta(i)$, $i \in N$, яка має значення: $\eta(1)$=0.7, $\eta(2)$=0.5. Значення функцій належності $\mu(x,0)$ і $\mu(x,1)$, які задають відповідні перерізи нечіткої множини типу 2 вказані в табл. 1.

Перейдемо до побудови розв'язку задачі раціонального вибору альтернатив за нечіткою ціллю, яка задається нечіткою множиною типу 2.

Таблиця 1. Об'єднання нечіткої множини чітких множин

x	a	b	c	d
$\mu_{G_1}(x)$	0	1	0	1
$\mu_{G_1}(x)$	0	0	1	1
$max\{\mu_{G_1}(x),\ \ \mu_{G_2}(x)\}$	0	1	1	1
$\mu(x,0)$	0,7	0	0,7	0
$\mu(x,1)$	0	0,7	0,5	0,7

Перейдемо до побудови розв'язку задачі раціонального вибору альтернатив за нечіткою ціллю, яка задається нечіткою множиною $\tilde{G} = \bigcup_{i\in\tilde{N}} G_i$ типу 2.

Слід зазначити, що якщо у функції належності $\mu_{\tilde{G}}(x, z)$ нечіткої множини $\tilde{G}$ агрегованої цілі ОПР типу 2 зафіксувати $z = 1$, то ми отримаємо нечітку множину типу 1 елементів $x \in X$, що належать множині $\tilde{G}$, з функцією належності $\mu_{\tilde{G}}(x, 1)$. Позначимо цю множину $\tilde{G}(1)$.

Тепер, коли ми знайшли нечітку множину, яка описує агреговану ціль ОПР, побудуємо загальний розв'язок вихідної задачі, яким буде нечітка множина $X^*{=}D \bigcap \tilde{G}(1)$ з функцією належності $\mu(x){=}min\{\mu_d(x), \mu_{\tilde{G}}(x, 1)\}$, цю множину варто вважати розв'язком вихідної задачі. Оскільки ОПР часто цікавить не вся множина розв'язків, а якийсь конкретний з них, то постає задача раціонального вибору єдиної альтернативи з нечіткої множини X^*. Таким розв'язком може бути максимізуюча альтернатива x^*, яка задовольняє умову $\mu(x^*) = max_{x \in X} \mu(x) > 0$.

Насамкінець слід відмітити, що розглянутий у цій роботі підхід вибору компромісних цілей у задачі прийняття рішень з цільовою множиною, яка може бути задана об'єднанням нечіткої множини чітких множин є іншим поглядом на цю проблему, ніж метод, який був розвинений у роботах Р. Белмана та Л. Заде, зокрема в [1], для цільової множини, яка задана перетином цільових множин.

Операція об'єднання нечіткої множини нечітких множин, яка формалізована в цій роботі, представляє самостійний інтерес і може бути використана в різних нових постановках задач прийняття рішень.

Також варто зазначити, що розроблений метод можливо використовувати і для задачі прийняття рішень з ціллю, яка буде задаватися нечіткою множиною нечітких цільових множин.

Література

1. Bellman R. E. Decision-Making in a Fussy Environment. / R. E. Bellman, L. A. Zadeh // Management Science. — 1970. — №17. — P. 141–164.
2. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. / С. А. Орловский — М. : Наука, 1981. – 208 с.
3. Зайченко Ю. П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация. / Ю. П. Зайченко — К. : Вища школа, 1991. – 191 с.
4. Bovsunivskyi O. Decision making problem with fuzzy set of goal sets. / O. Bovsunivskyi, S. Mashchenko // International Journal "Information Theories and Applications". — 2012. — 19. — № 3. — P. 249–257.
5. Мащенко С. О. Нечеткие индивидуально-оптимальные равновесия. / С. О. Мащенко // Кибернетика и вычислительная техника. — 2010. — Вып. 159. — С. 19–29.
6. Подиновский В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин — М.: Физматлит, 2007 . — 255 с.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 15.12.2013