Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2014, № 1(115) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ПРО ОДИН СИЛЬНО ЗБІЖНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РІВНОВАЖНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Л. М. Чабак

Резюме. У роботі запропоновано новий ітераційний метод розв'язання задачі рівноважного програмування в гільбертовому просторі. Метод базується на новому варіанті регуляризації відомої forward-backward схеми за допомогою в'язкісної апроксимації. Доведено теорему сильної збіжності методу.

Ключові слова: задача рівноважного програмування, біфункція, резольвента, ітераційний алгоритм, нерозтягуючий оператор, метод Гальперна, сильна збіжність.

1. Вступ

Популярним розділом сучасного прикладного нелінійного аналізу є дослідження задач рівноважного програмування (нерівностей Кі Фаня) вигляду

$$\text{знайти} \ \ x \in C : \ \Psi(x, y) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C, \tag{1}$$

де C — непорожня підмножина гільбертового простору H, $\Psi : C \times C \to \mathbb{R}$ — біфункція. Задача (1) — зручна загальна форма запису та дослідження різних задач, що виникають в математичній фізиці, дослідженні операцій та оптимізації [1, 2, 3, 4, 5]. Наведемо ряд типових постановок [4, 6].

(1) Якщо $\Psi(x, y) = g(y) - g(x)$, де $g : C \to \mathbb{R}$, то задача (1) є задачею умовної мінімізації $g \to \min_C$.

(2) Якщо $\Psi(x, y) = (Ax, y - x)$, де $A : C \to H$, то задача (1) зводиться до класичної варіаційної нерівності

$$\text{знайти} \ \ x \in C : \ (Ax, y - x) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C. \tag{2}$$

(3) Нехай P, Q — опуклі підмножини H, $C = P \times Q$, $L : C \to \mathbb{R}$ — опукла-угнута функція. Точка $(\bar{x}, \bar{p}) \in C$ називається сідловою точкою функції L, якщо

$$L(\bar{x}, p) \leq L(\bar{x}, \bar{p}) \leq L(x, \bar{p}) \ \ \forall\, x \in C \ \forall\, p \in Q. \tag{3}$$

Покладемо $\Psi(v, w) = L(z, p) - L(x, y)$, де $v = (z, y)$, $w = (x, p)$. Тоді задача пошуку сідлової точки (3) рівносильна задачі (1).

(4) Нехай I — скінченна множина індексів. Для кожного $i \in I$ задано множину C_i та функцію $f_i : C \to \mathbb{R}$, де $C = \prod_{i \in I} C_i$. Для $x = (x_i)_{i \in I} \in C$ позначимо $x^i = (x_j)_{j \in I, j \neq i}$. Точка $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I}$ називається рівновагою Неша, якщо для всіх $i \in I$ справедливі нерівності

$$f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^i, y_i) \ \ \forall\, y_i \in C_i.$$

Визначимо функцію $\Psi : C \times C \to \mathbb{R}$ таким чином

$$\Psi(x, y) = \sum_{i \in I} \left(f_i(x^i, y_i) - f_i(x) \right).$$

Точка $\bar{x} \in C$ є рівновагою Неша тоді і тільки тоді, коли $\bar{x}$ є розв'язком задачі (1).

Алгоритмам розв'язання рівноважних та близьких задач присвячено багато робіт, зокрема, [4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. В «рівноважній алгоритміці» велике значення мають методи апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів [11, 21, 22, 23, 24], які дозволяють регуляризовувати існуючі методи або будувати нові [4, 6, 11, 14, 17, 25, 26, 27].

У даній роботі ми пропонуємо новий ітераційний метод розв'язання задачі рівноважного програмування в гільбертовому просторі. Метод базується на новому варіанті регуляризації відомої forward-backward схеми [4] за допомогою в'язкісної апроксимації (viscosity approximation). Варіант регуляризації, в свою чергу, є привабливою в обчислювальному плані модифікацією гібридного методу Такахасі-Такеучі-Куботи [23], що досліджена в [24]. Основний теоретичний результат роботи — теорема сильної збіжності методу.

Структура статті така. У другому пункті дано постановку задачі рівноважного програмування та сформульовані усі необхідні допоміжні факти. Третій пункт присвячено опису запропонованого ітераційного алгоритму та доведенню його сильної збіжності. В останній, четвертий, пункт винесено доведення сильної збіжності необхідного нам варіанту схеми Гальперна (в'язкісної апроксимації) для задачі пошуку спільної нерухомої точки певної зліченної родини нерозтягуючих операторів.

Автор щиро вдячна В. В. Семенову за конструктивні зауваження.

2. Задача рівноважного програмування

Нехай H — дійсний гільбертовий простір із скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$. Множину нерухомих точок оператора $T : H \to H$ будемо позначати $F(T)$. Через P_C будемо позначати оператор метричного проектування на опуклу замкнену множину $C \subseteq H$: $P_C x$ — єдиний елемент множини C із властивістю $\|P_C x - x\| = \inf_{z \in C} \|z - x\|$. Елемент $y = P_C x$ характеризується таким чином [28]: $y = P_C x \Leftrightarrow (y - x, z - y) \geq 0 \ \forall z \in C$.

Для непорожньої опуклої замкненої множини $C \subseteq H$, оператора A, що діє в просторі H, та біфункції $\Phi : C \times C \to \mathbb{R}$ розглянемо задачу рівноважного програмування у такій постановці:

$$\text{знайти } \ x \in C : \ (Ax, y - x) + \Phi(x, y) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C. \tag{4}$$

Позначимо через S множину розв'язків задачі (4).

Припустимо, що біфункція $\Phi : C \times C \to \mathbb{R}$ задовольняє умовам [2, 4]:

A1) $\Phi(x, x) = 0$ для всіх $x \in C$;
A2) $\Phi(x, y) + \Phi(y, x) \leq 0$ для всіх $x, y \in C$;

A3) для всіх $x \in C$ функціонал $\Phi(x, \cdot)$ напівнеперервний знизу та опуклий;

A4) $\limsup_{t \to +0} \Phi(x + t(z - x), y) \leq \Phi(x, y)$ для всіх $x, y, z \in C$.

Означення 1 ([4])**.** Резольвентою біфункції $\Phi : C \times C \to \mathbb{R}$ називають оператор $J_\Phi : H \to 2^H$:

$$x \to J_\Phi x = \{z \in C : \Phi(z, y) + (z - x, y - z) \geq 0 \;\; \forall y \in C\} \; .$$

Теорема 1 ([4])**.** *Нехай біфункція $\Phi : C \times C \to \mathbb{R}$ задовольняє умови A1)–A4). Тоді:*

1) $\operatorname{dom} J_\Phi = \{x \in H : J_\Phi x \neq \emptyset\} = H$*;*
2) *оператор J_Φ однозначний та міцно нерозтягуючий, тобто*

$$\|J_\Phi x - J_\Phi y\|^2 \leq (J_\Phi x - J_\Phi y, x - y) \quad \forall x, y \in H \, ;$$

3) *множина $F(J_\Phi)$ дорівнює множині $\{x \in C : \Phi(x, y) \geq 0 \;\; \forall y \in C\}$ та є опуклою і замкненою.*

Нехай:

A5) $A : H \to H$ — L-обернено сильно монотонний оператор, тобто для числа $L > 0$ виконується нерівність

$$(Ax - Ay, x - y) \geq L \, \|Ax - Ay\|^2 \quad \forall x, y \in H.$$

Зауваження 1. Ясно, що L-обернено сильно монотонний оператор є $1/L$-ліпшицевим. Якщо оператор A є μ-сильно монотонним та L-ліпшицевим, то він буде μ/L^2-обернено сильно монотонним. Якщо g — заданий на замкненій опуклій множині C опуклий диференційовний функціонал з похідною, що задовольняє умові Ліпшиця зі сталою $L > 0$, то похідна ∇g — $1/L$-обернено сильно монотонний на C оператор (теорема Байона-Аддада-Антіпіна) [29].

Має місце

Лема 1. *Нехай виконуються умови A1)–A5). Тоді для всіх $\lambda \in (0, 2L)$ оператор $T_\lambda = J_{\lambda\Phi}(I - \lambda A)$ — нерозтягуючий та $F(T_\lambda) = S$.*

Доведення. Перший факт випливає з оцінки ($\lambda > 0$)

$$\begin{aligned} \|J_{\lambda\Phi}(x - \lambda Ax) - J_{\lambda\Phi}(y - \lambda Ay)\|^2 &\leq \|(x - \lambda Ax) - (y - \lambda Ay)\|^2 = \\ &= \|x - y\|^2 - 2\lambda(x - y, Ax - Ay) + \lambda^2 \|Ax - Ay\|^2 \leq \\ &\leq \|x - y\|^2 - \lambda \, (2L - \lambda) \, \|Ax - Ay\|^2 \, . \end{aligned}$$

Рівність $z = T_\lambda x$ означає, що $\lambda \, (\Phi(z, y) + (Ax, y - z)) + (z - x, y - z) \geq 0$ для всіх $y \in C$. Тому $F(T_\lambda) = S$. □

Перейдемо до розгляду алгоритму розв'язання задачі (4).

3. Алгоритм та теорема збіжності

Для довільної пари елементів $x, y \in H$ визначимо множину

$$H(x,y) = \{z \in H : \ \|z-y\| \le \|z-x\|\}.$$

Множина $H(x,y)$ є замкненим напівпростором (що співпадає з H у випадку $x=y$).

Зафіксуємо стискаючий оператор $T : H \to H$. Для розв'язання задачі рівноважного програмування (4) розглянемо

Алгоритм 1. Для $x_1 \in H$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in H$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = x_n - \lambda_n A x_n, \\ z_n = J_{\lambda_n \Phi} y_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n T x_n + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{H(x_k, z_k)} x_n, \end{cases}$$

де $\alpha_0 = 1$, (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0,1)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \to 0$, $\lambda_n \in [\lambda^*, \lambda^{**}] \subseteq (0, 2L)$.

Зауваження 2. Для обчислення z_n слід розв'язати задачу про рівновагу:

$$\text{знайти } \ z_n \in C : \ \lambda_n \Phi(z_n, y) + (z_n - y_n, y - z_n) \ge 0 \ \ \forall\, y \in C.$$

Має місце

Теорема 2. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, виконуються умови A1)–A5) та $S \ne \emptyset$. Тоді згенерована алгоритмом 1 послідовність (x_n) сильно збігається до розв'язку $z \in H$ задачі рівноважного програмування (4) такого, що $z = P_S T z$.*

Доведення. Покажемо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце вкладення $S \subseteq H(x_n, z_n)$. Для $p \in S$ маємо

$$\|z_n - p\| \le \|x_n - p\|.$$

Отже, $p \in H(x_n, z_n)$. Звідки випливає $S \subseteq H(x_n, z_n)$.

За теоремою 3 (див. Додаток) послідовність (x_n) сильно збігається до елемента $z \in F = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(x_n, z_n)$ такого, що

$$(z - Tz, y - z) \ge 0 \ \ \forall y \in F.$$

Остання нерівність означає, що $z = P_F T z$.

Покажемо, що $z \in S$, чим і доведемо теорему. Оскільки $z \in H(x_n, z_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то

$$\|x_n - z\| \ge \|z_n - z\|.$$

Після граничного переходу, отримаємо $\lim_{n\to\infty} \|z_n - z\| = 0$. Звідки $z \in C$.

Для $z_n = J_{\lambda_n \Phi}\, y_n$ маємо

$$\lambda_n \Phi(z_n, y) + (z_n - y_n, y - z_n) =$$
$$= \lambda_n \left(\Phi(z_n, y) + (A x_n, y - z_n) \right) + (z_n - x_n, y - z_n) \ge 0 \ \ \forall y \in C.$$

З умови монотонності біфункції Φ випливає

$$\left(\frac{z_n - x_n}{\lambda_n}, y - z_n \right) + (A x_n, y - z_n) \ge \Phi(y, z_n) \ \ \forall y \in C.$$

Після граничного переходу отримаємо

$$(Az, y - z) \geq \Phi(y, z) \ \ \forall y \in C.$$

Для $t \in (0, 1)$ покладемо $y_t = z + t(y - z) \in C$. Маємо

$$0 = \Phi(y_t, y_t) \leq t\Phi(y_t, y) + (1 - t)\Phi(y_t, z) \leq t\Phi(y_t, y) + (1 - t)t(Az, y - z).$$

Звідки

$$(1 - t)(Az, y - z) + \Phi(y_t, y) \geq 0.$$

Спрямувавши t до нуля, одержимо

$$(Az, y - z) + \Phi(z, y) \geq 0 \ \ \forall y \in C,$$

тобто $z \in S$. □

Зауваження 3. У випадку апроксимації нормального розв'язку варіаційної нерівності (2) алгоритм 1 набуває вигляду

$$\begin{cases} z_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{H(x_k, z_k)} x_n. \end{cases}$$

Цей алгоритм пропонується у якості альтернативи такій відомій схемі:

$$\begin{cases} C_0 = H, \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ C_{n+1} = C_n \cap H(x_n, z_n), \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} 0, \end{cases}$$

яка грунтується на гібридному методі Такахасі-Такеучі-Куботи [23].

4. Додаток: збіжність варіанту схеми Гальперна

Нехай $T_i : C \to C$ — зліченний набір нерозтягуючих операторів, що діють у замкненій опуклій підмножині C простору H, $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$, $T : C \to C$ — стискаючий оператор з коефіцієнтом $\mu \in [0, 1)$. Розглянемо задачу

$$\text{знайти} \ \ x \in F : \ \ (x - Tx, y - x) \geq 0 \ \ \forall y \in F. \tag{5}$$

Варіаційна нерівність (5) має єдиний розв'язок. Для його знаходження можна використати такий варіант схеми Гальперна.

Алгоритм 2. Задаємо $x_1 \in C$, генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n,$$

де $\alpha_0 = 1$, (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0, 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \to 0$.

Сильна збіжність цієї схеми доводиться стандартними міркуваннями [21, 24]. Наведемо їх для замкненості статті.

Використаємо таке відоме твердження про числові послідовності.

Лема 2 ([30]). *Нехай* (ξ_n) *— послідовність невід'ємних чисел, що задовольняє рекурентну нерівність* $\xi_{n+1} \leq (1-\alpha_n)\xi_n + \alpha_n\beta_n + \gamma_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *де послідовності* (α_n), (β_n) *і* (γ_n) *мають властивості: 1)* $\alpha_n \in [0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$; *2)* $\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 0$; *3)* $\gamma_n \in [0,+\infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$. *Тоді* $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

(Факт 1). *Послідовність* (x_n) *обмежена.* Дійсно, для $p \in F$ маємо

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \alpha_n \|Tx_n - p\| + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) \|T_i x_n - p\| \leq$$
$$\leq \alpha_n (\|Tx_n - Tp\| + \|Tp - p\|) + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) \|T_i x_n - p\| \leq$$
$$\leq \alpha_n \mu \|x_n - p\| + \alpha_n \|Tp - p\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| =$$
$$= (1 - (1-\mu)\alpha_n) \|x_n - p\| + \alpha_n \|Tp - p\| \leq \max\left\{ \frac{\|Tp - p\|}{1-\mu}, \|x_n - p\| \right\}.$$

Звідки індукцією отримуємо

$$\|x_n - p\| \leq \max\left\{ \|Tp - p\| (1-\mu)^{-1}, \|x_1 - p\| \right\}, \quad n \geq 1.$$

(Факт 2). *Для послідовності* (x_n) *виконується* $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$. Маємо

$$x_{n+1} - x_n = \alpha_n T x_n - \alpha_{n-1} T x_{n-1} + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_{n-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(T_i x_n - T_i x_{n-1}) + \alpha_n (T x_n - T x_{n-1}) +$$
$$+ (\alpha_{n-1} - \alpha_n)(T_n x_{n-1} - T x_{n-1}).$$

Звідки

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq (1 - (1-\mu)\alpha_n) \|x_n - x_{n-1}\| + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \|T_n x_{n-1} - T x_{n-1}\|.$$

З леми 2 про числові послідовності випливає бажане.

(Факт 3). *Для всіх* i *має місце* $\|x_n - T_i x_n\| \to 0$. Маємо

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(x_n - T_i x_n) = \alpha_n (T x_n - x_n) + x_n - x_{n+1}.$$

Для довільного $p \in F$ розглянемо рівність

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(x_n - T_i x_n, x_n - p) =$$
$$= \alpha_n (T x_n - x_n, x_n - p) + (x_n - x_{n+1}, x_n - p).$$

Оскільки

$$\|x_n - p\|^2 \geq \|T_i x_n - p\|^2 = \|T_i x_n - x_n\|^2 + \|x_n - p\|^2 + 2(T_i x_n - x_n, x_n - p),$$

то

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)\left\|T_ix_n-x_n\right\|^2 \leq 2\alpha_n(Tx_n-x_n,x_n-p)+2(x_n-x_{n+1},x_n-p).$$

Для фіксованого i при $n>i$ маємо

$$\left\|T_ix_n-x_n\right\|^2 \leq \frac{M\left(\alpha_n+\|x_n-x_{n+1}\|\right)}{(\alpha_{i-1}-\alpha_i)}.$$

Звідки

$$\|x_n-T_ix_n\| \to 0.$$

Нехай $z\in C$ — єдиний розв'язок варіаційної нерівності (5). Доведемо, що

$$\limsup_{n\to\infty}(z-x_n,z-Tz)\leq 0. \tag{6}$$

Виділимо з (x_n) підпослідовність (x_{n_k}) таку, що

$$\limsup_{n\to\infty}(z-x_n,z-Tz)=\lim_{k\to\infty}(z-x_{n_k},z-Tz).$$

Можна вважати, що $x_{n_k}\rightharpoonup\tilde{x}\in C$. З принципу демізамкнености випливає включення $\tilde{x}\in F$. Тому одержуємо

$$\lim_{k\to\infty}(z-x_{n_k},z-Tz)=(z-\tilde{x},z-Tz)\leq 0,$$

чим і доводимо (6).

Покажемо тепер, що $x_n\to z$. Маємо

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-z\|^2 &= \left\|\alpha_nTx_n+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)T_ix_n-z\right\|^2 = \\ &= \left\|\alpha_n\left(Tx_n-z\right)+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)(T_ix_n-z)\right\|^2 \leq \\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)(T_ix_n-z)\right\|^2+2\alpha_n\left(Tx_n-z,x_{n+1}-z\right)\leq \\ &\leq (1-\alpha_n)^2\left\|x_n-z\right\|^2+2\alpha_n\left(Tx_n-z,x_{n+1}-z\right)\leq \\ &\leq (1-\alpha_n)^2\left\|x_n-z\right\|^2+2\alpha_n\left(z-Tz,z-x_{n+1}\right)+ \\ &\qquad +\mu\alpha_n\left\|x_n-z\right\|^2+\mu\alpha_n\left\|x_{n+1}-z\right\|^2.\end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-z\|^2\leq \\ &\qquad\leq \frac{(1-\alpha_n)^2+\mu\alpha_n}{1-\mu\alpha_n}\left\|x_n-z\right\|^2+\frac{2\alpha_n}{1-\mu\alpha_n}\left(z-Tz,z-x_{n+1}\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Застосувавши до одержаної рекурентної нерівності (7) лему 2 про числові послідовності, робимо висновок, що $\|x_n-z\|\to 0$. Отже, має місце

Теорема 3. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T_i : C \to C$ — нерозтягуючі оператори, $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$, $T : C \to C$ — стискаючий оператор. Тоді згенерована алгоритмом 2 послідовність (x_n) сильно збігається до розв'язку варіаційної нерівності (5).*

Література

1. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. — Москва: Наука, 1988. — 448 с.
2. Blum E., Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems // Math. Stud. — 1994, 63. — P. 123–145.
3. Giannessi F., Maugeri A., Pardalos P. M. Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models. — New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. — 300 p.
4. Combettes P. L., Hirstoaga S. A. Equilibrium Programming in Hilbert Spaces // J. Nonlinear Convex Anal. — 2005, 6. — P. 117–136.
5. Bigi G., Castellani M., Pappalardo M., Passacantando M. Existence and solution methods for equilibria // Eur. J. Oper. Res. — 2013. — 227. — P. 1–11.
6. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — № 1(104). — С. 10–23.
7. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // In: M. Z. Zgurovsky and V. A. Sadovnichiy (eds.), Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications, Volume 211. — Springer International Publishing Switzerland, 2014.— P. 131–146.
8. Корпелевич Г. М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. — 1976. — №4. — С. 747–756.
9. Антипин А. С. Равновесное программирование: проксимальные методы // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1997. — 37, №11. — С. 1327—1339.
10. Антипин А. С. Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании. — Москва: ВЦ РАН, 2002. — 130 с.
11. Takahashi S., Takahashi W. Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2007, 331. — P. 506-–515.
12. Tran D. Q., Muu L. D., Nguyen V. H. Extragradient algorithms extended to solving equilibrium problems // Optimization. — 2008. — 57(6). — P. 749—776.
13. Van N. T. T., Strodiot J. J., Nguyen V. H. A bundle method for solving equilibrium problems // Math. Program. — 2009. — 116(1–2), Ser. B. — P. 529–552.
14. Nguyen B., Dang T. T. H. Tikhonov regularization method for system of equilibrium problems in Banach spaces // Український математичний журнал. — 2009. — 61, №8. — С. 1098–1105.
15. Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3(102). — С. 40–48.

16. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, Iss. 4. — P. 13–18.
17. Маліцький Ю. В., Семенов В. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3(102). — С. 79–88.
18. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №3(106). — С. 27–32.
19. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — №4. — P. 631–639.
20. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №2(108). — С. 53–58.
21. Xu H. K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — 298. — P. 279–291.
22. Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). — Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
23. Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 341. — P. 276—286.
24. Семенов В. В. Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №1(111). — С. 46–56.
25. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — Москва: Изд-во МГУ, 1989. — 200 с.
26. Апостол Р. Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №1(107). — С. 3–14.
27. Malitsky Yu.V., Semenov V.V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2014. — DOI 10.1007/s10898-014-0150-x.
28. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — Москва: Мир, 1983. — 256 с.
29. Гольштейн Е. Г., Гольштейн Н. В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — Москва: Наука, 1989. — 400 с.
30. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — Москва: Наука, 1988. — 549 с.

Кафедра математики, Київська державна академія водного транспорту ім. гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного, вул. Фрунзе, 9, Київ, 04071, Україна, e-mail: lyu_bov1@mail.ru

Надійшла 20.11.2013