Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2014, №3(117)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

АЛГОРИТМ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С МАКСИМАЛЬНЫМИ МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Н. И. Ляшко, В. В. Семенов, Л. М. Чабак

Резюме. В работе для решения вариационных неравенств с многозначными монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве, предложен алгоритм расщепления без вычисления резольвент. Доказана теорема о слабой эргодической сходимости алгоритма.

Ключевые слова: максимальный монотонный оператор, вариационные неравенства, алгоритм расщепления, среднее по Чезаро, слабая сходимость.

1. Введение

Задачи ряда прикладных математических дисциплин могут быть записаны в форме вариационных неравенств, численное решение которых является ареной интенсивных исследований [1–11]. Важное значение имеют различные схемы расщепления, позволяющие сводить решение исходной задачи к решению последовательности задач более простой структуры [12–18]. Одной из актуальных проблем, связанных с необходимостью привлечения идей расщепления (декомпозиции), является эффективное решение сетевых задач выделения ресурсов (Network Resource Allocation) [19].

Популярные сейчас алгоритмы расщепления для вариационных неравенств

$$\text{найти } x \in C: \ \exists u \in \sum_i A_i x \quad \text{и} \quad (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C$$

используют на каждом шаге резольвенты многозначных операторов [1, 12–19]. Явный шаг в алгоритмах цитируемых работ используется только для однозначных операторов-слагаемых. Эти методы обладают достаточным запасом устойчивости, однако вычисление резольвенты часто требует высоких вычислительных затрат.

В алгоритмике выпуклой оптимизации для задач вида

$$f_1 + f_2 + ... + f_n \to \min_C$$

в последнее время появилась серия субградиентных алгоритмов расщепления явного характера [20, 21]. В работе [22] однин из этих алгоритмов перенесен на случай вариационных неравенств. Также в [22] (замечание 2 цитируемой статьи) описан без обоснования метод, обобщающий известный в оптимизации "incremental subgradient method" [20]. В настоящей работе мы, опираясь на технику [23–27], обосновываем упомянутый явный алгоритм расщепления для решения вариационных неравенств с многозначными монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. А именно, доказываем теорему о слабой эргодической сходимости алгоритма.

2. Постановка задачи

Введем обозначения и сформулируем задачу. Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Обозначим символом P_K оператор метрической проекции пространства H на замкнутое выпуклое множество $K \subseteq H$.

Напомним некоторые понятия [1, 2]. Пусть $A : H \to 2^H$ — оператор с графиком $\mathrm{gr}(A) = \{(x,u) : \ y \in Ax\}$.

Определение 1. Оператор $A : H \to 2^H$ называют монотонным, если для любых (x,u), $(y,v) \in \mathrm{gr}(A)$ выполняется неравенство

$$(u - v, x - y) \geq 0.$$

Определение 2. Оператор $A : H \to 2^H$ называют сильно монотонным с константой $\mu > 0$, если для любых (x,u), $(y,v) \in \mathrm{gr}(A)$ выполняется неравенство

$$(u - v, x - y) \geq \mu \|x - y\|^2 .$$

Определение 3. Оператор $A : H \to 2^H$ называют максимальным монотонным, если для любого монотонного оператора $B : H \to 2^H$ из соотношения $\mathrm{gr}(A) \subseteq \mathrm{gr}(B)$ следует $\mathrm{gr}(A) = \mathrm{gr}(B)$.

Пусть:

- $A_i : H \to 2^H$ — монотонный оператор, $i = \overline{1,p}$;
- $A = \sum_{i=1}^{p} A_i$ — максимальный монотонный оператор;
- $C \subseteq \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{dom}(A_i)$ — замкнутое выпуклое множество.

Вариационное неравенство с оператором A на множестве C формулируется следующим образом:

$$\text{найти } x \in C : \ \exists u \in Ax \ \text{ и } \ (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Множество решений задачи (1) обозначим $VI(A,C)$. Важным фактом о структуре множества решений вариационного неравенства является следующая

Лемма 1. *Если оператор $A : H \to 2^H$ — максимальный монотонный, то*

$$VI(A,C) = \{x \in C : (v, y - x) \geq 0 \ \forall y \in C \ \forall v \in Ay\} .$$

В частности, множество $VI(A,C)$ выпуклое и замкнутое.

Цель данной работы состоит в исследовании явного алгоритма расщепления для решения вариационного неравенства (1), обобщающего известный в выпуклой оптимизации "incremental subgradient method" [20]. Под явным мы понимаем алгоритм не содержащий операций вычисления резольвент операторов $A_i + N_C$, где N_C — нормальный конус множества C в точке-аргументе, то есть

$$N_C x = \begin{cases} \{w \in H : \ (w, y - x) \le 0\}, & x \in C, \\ \emptyset, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Алгоритм расщепления

Опишем алгоритм расщепления для вариационного неравенства (1).

Зафиксируем последовательность положительных чисел (λ_n) удовлетворяющую условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty. \tag{2}$$

Алгоритм 1 ([22])**.**

1) *Задаем* $x_1 \in C$*;* $n := 1$*.*
2) *Начиная с* $y_{(n,0)} = x_n$ *последовательно находим элементы:*

$$y_{(n,i)} = P_C\left(y_{(n,i-1)} - \lambda_n u_{(n,i)}\right), \ u_{(n,i)} \in A_i y_{(n,i-1)}, \ i = \overline{1,p}.$$

3) *Если* $y_{(n,i)} = y_{(n,i-1)}$ *для всех* $i = \overline{1,p}$*, то СТОП и* $x_n \in VI(A,C)$*. Иначе переходим на шаг 4.*
4) *Полагаем*

$$x_{n+1} = y_{(n,p)},$$

$n := n+1$, переходим на шаг 2.

Покажем, что если $y_{(n,i)} = x_n$ для всех $i = \overline{1,p}$, то $x_n \in VI(A,C)$. Действительно, пусть $x_n = y_{(n,1)} = P_C\left(x_n - \lambda_n u_{(n,1)}\right)$. Тогда

$$\left(x_n - \left(x_n - \lambda_n u_{(n,1)}\right), y - x_n\right) = \lambda_n \left(u_{(n,1)}, y - x_n\right) \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

Откуда

$$\left(u_{(n,1)}, y - x_n\right) \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

Аналогично получаем для всех $i = \overline{2,p}$

$$\left(u_{(n,i)}, y - x_n\right) \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

Откуда

$$(u_n, y - x_n) \ge 0 \quad \forall y \in C,$$

где

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{(n,i)} \in \sum_{i=1}^{p} A_i x_n = A x_n.$$

То есть $x_n \in VI(A,C)$.

Далее рассматриваем ситуацию, когда алгоритм 1 порождает бесконечную последовательность. Даже в случае $p = 1$, когда алгоритм 1 совпадает с классическим "субградиентным методом", на таком уровне общности не приходиться ожидать сходимости последовательности (x_n). Нашей основной целью является доказательство слабой сходимости в H последовательности чезаровских средних

$$z_n = \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}.$$

Результаты такого типа традиционно называют теоремами чезаровской или эргодической сходимости [23–25].

Сделаем относительно операторов A_i следующее предположение:

$$\text{множества } \bigcup_{i=1}^{p} A_i y_{(n,i-1)} \text{ равномерно ограничены.} \tag{3}$$

Замечание 1. Предположение (3) — аналог использованного в [20, 21] "subgradient boundedness assumption".

Для доказательства сходимости алгоритма нам потребуются следующие факты.

Лемма 2 ([2])**.** *Пусть неотрицательные последовательности (a_n), (b_n) таковы, что $a_{n+1} \leq a_n + b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Тогда существует предел* $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Лемма 3 ([25])**.** *Пусть H — гильбертово пространство; $F \subseteq H$ — непустое множество; (x_n) — последовательность элементов H и*

$$z_n = \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k},$$

где (λ_n) — последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$. Предположим, что: 1) предел произвольной слабо сходящейся подпоследовательности (z_{n_k}) лежит в F; 2) для произвольного $y \in F$ существует $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$. Тогда последовательность (z_n) слабо сходится к некоторому элементу $z \in F$.

4. Основные оценки

Анализ сходимости алгоритма начнем с доказательства двух важных оценок для последовательностй (x_n) и (z_n).

Лемма 4. *Для порожденной алгоритмом 1 последовательности (x_n) и элемента $y \in C$ выполняется неравенство*

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \leq \|x_n - y\|^2 - 2\lambda_n (v, x_n - y) + \\ + \lambda_n^2 \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 + 2\lambda_n^2 \sum_{i=2}^{p} \|v_i\| \sum_{k=1}^{i} \left\|u_{(n,k)}\right\|, \tag{4}$$

где $v = \sum_{i=1}^p v_i$, $v_i \in A_i y$, $i = \overline{1,p}$.

Доказательство. Для $y \in C$ и x_{n+1} имеем

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-y\|^2 &= \\ &= \left\|P_C\left(y_{(n,p-1)}-\lambda_n u_{(n,p)}\right)-y\right\|^2 \le \left\|y_{(n,p-1)}-\lambda_n u_{(n,p)}-y\right\|^2 = \\ &= \left\|y_{(n,p-1)}-y\right\|^2+\lambda_n^2\left\|u_{(n,p)}\right\|^2-2\lambda_n\left(u_{(n,p)},y_{(n,p-1)}-y\right).\end{aligned}$$

Возьмем $v_p \in A_p y$. Благодаря монотонности оператора A_p, получаем

$$\left(u_{(n,p)},y_{(n,p-1)}-y\right) \ge \left(v_p,y_{(n,p-1)}-y\right).$$

Следовательно

$$\|x_{n+1}-y\|^2 \le \left\|y_{(n,p-1)}-y\right\|^2+\lambda_n^2\left\|u_{(n,p)}\right\|^2-2\lambda_n\left(v_p,y_{(n,p-1)}-y\right). \qquad (5)$$

Аналогично получаем неравенства

$$\left\|y_{(n,i)}-y\right\|^2 \le \left\|y_{(n,i-1)}-y\right\|^2+\lambda_n^2\left\|u_{(n,i)}\right\|^2-2\lambda_n\left(v_i,y_{(n,i-1)}-y\right), \qquad (6)$$

где $v_i \in A_i y$, $i=\overline{1,p-1}$. Учитывая (6) в (5), получаем

$$\|x_{n+1}-y\|^2 \le \|x_n-y\|^2+\lambda_n^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2-2\lambda_n\sum_{i=1}^{p}\left(v_i,y_{(n,i-1)}-y\right).$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{p}\left(v_i,y_{(n,i-1)}-y\right)=(v,x_n-y)+\sum_{i=2}^{p}\left(v_i,y_{(n,i-1)}-x_n\right),$$

где $v=\sum_{i=1}^{p} v_i \in \sum_{i=1}^{p} A_i y = Ay$. Поскольку

$$\left|\left(v_i,y_{(n,i-1)}-x_n\right)\right| \le \|v_i\|\|y_{(n,i-1)}-x_n\| \le \|v_i\|\lambda_n\sum_{k=1}^{i}\left\|u_{(n,k)}\right\|,$$

то

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-y\|^2 \le \|x_n-y\|^2-2\lambda_n(v,x_n-y)&+ \\ +\lambda_n^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2&+2\lambda_n^2\sum_{i=2}^{p}\|v_i\|\sum_{k=1}^{i}\left\|u_{(n,k)}\right\|,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 5. *Для порожденной алгоритмом 1 последовательности* (x_n)*, последовательности средних* (z_n) *и элемента* $y \in C$ *выполняется неравенство*

$$\begin{aligned}\frac{\|x_{m+1}-y\|^2-\|x_1-y\|^2}{\sum_{n=1}^{m}\lambda_n} &\le 2(v,y-z_m)+ \\ +\frac{\sum_{n=1}^{m}\lambda_n^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2}{\sum_{n=1}^{m}\lambda_n}&+\frac{2\sum_{n=1}^{m}\lambda_n^2\sum_{i=2}^{p}\|v_i\|\sum_{k=1}^{i}\left\|u_{(n,k)}\right\|}{\sum_{n=1}^{m}\lambda_n}, \qquad (7)\end{aligned}$$

где $v=\sum_{i=1}^{p} v_i$, $v_i \in A_i y$, $i=\overline{1,p}$.

Доказательство. Запишем неравенство леммы 4 в виде

$$\|x_{n+1}-y\|^2-\|x_n-y\|^2\le 2\left(v,\lambda_n y-\lambda_n x_n\right)+ \\ +\lambda_n^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2+2\lambda_n^2\sum_{i=2}^{p}\|v_i\|\sum_{k=1}^{i}\left\|u_{(n,k)}\right\|. \quad (8)$$

Суммируя (8) по n от 1 до $m\in\mathbb{N}$, получаем

$$\|x_{m+1}-y\|^2-\|x_1-y\|^2\le 2\left(v,\sum_{n=1}^{m}\lambda_n y-\sum_{n=1}^{m}\lambda_n x_n\right)+ \\ +\sum_{n=1}^{m}\lambda_n^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2+2\sum_{n=1}^{m}\lambda_n^2\sum_{i=2}^{p}\|v_i\|\sum_{k=1}^{i}\left\|u_{(n,k)}\right\|. \quad (9)$$

Поделив (9) на $\sum_{n=1}^{m}\lambda_n$, приходим к неравенству (7). □

5. Эргодическая сходимость алгоритма

Предположим, что $VI(A,C)\ne\emptyset$. Имеет место

Лемма 6. *Пусть (x_n) — порожденная алгоритмом 1 последовательность. Тогда для произвольного элемента $y\in VI(A,C)$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|$. В частности, последовательность (x_n) ограничена.*

Доказательство. Воспользуемся леммами 2 и 4. В неравенстве (4) предположим, что $y\in VI(A,C)$. Пусть $v_i\in A_i y$, $i=\overline{1,p}$. Получим

$$\|x_{n+1}-y\|^2\le\|x_n-y\|^2+\lambda_n^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2+2\lambda_n^2\sum_{i=2}^{p}\|v_i\|\sum_{k=1}^{i}\left\|u_{(n,k)}\right\|, \quad (10)$$

поскольку $(v,x_n-y)\ge 0$, $v=\sum_{i=1}^{p}v_i\in Ay$.

Из неравенства (10), предположения (3) и условия $(\lambda_n)\in\ell_2$ следует существование предела $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|\in\mathbb{R}$. □

Ограниченность последовательности (x_n) влечет ограниченность последовательности средних (z_n). А из леммы 5 следует

Лемма 7. *Все слабые частичные пределы последовательности средних (z_n) принадлежат множеству $VI(A,C)$.*

Доказательство. Рассмотрим слабо сходящуюся подпоследовательность (z_{n_l}) последовательности (z_n). Пусть $z\in H$ — слабый предел (z_{n_l}). Ясно, что z принадлежит множеству C. Записав неравенство (7) для элементов z_{n_l}, после предельного перехода при $l\to\infty$, получим

$$(v,y-z)\ge 0\quad \forall y\in C\ \forall v\in Ay,$$

что в силу леммы 1 равносильно включению $z\in VI(A,C)$. □

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Справедливы утверждения:*

1) *если* $VI(A,C) \neq \emptyset$, *то последовательность средних по Чезаро* (z_n) *слабо сходится к некоторому элементу* $x \in VI(A,C)$*;*
2) *если* $VI(A,C) = \emptyset$, *то* $\|z_n\| \to +\infty$.

Доказательство. Из лемм 6 и 7 следует, что в случае $VI(A,C) \neq \emptyset$ для сгенерированной алгоритмом 1 последовательности (x_n) и для множества $F = VI(A,C)$ выполнены условия леммы 3. Следовательно, последовательность (z_n) слабо сходится к некоторому элементу $x \in VI(A,C)$.

Предположим, что $VI(A,C) = \emptyset$. Тогда $\|z_n\| \to +\infty$. Действительно, иначе последовательность (z_n) имеет слабую предельную точку z, которая, как было показано ранее, принадлежит множеству $VI(A,C)$. □

6. Заключительные замечания

Включив операцию усреднения в схему вычислений, получаем следующий явный алгоритм расщепления.

Алгоритм 2.

1) *Задаем* $x_1 = z_1 \in C$*;* $\sigma_1 := \lambda_1$, $n := 1$.
2) *Полагаем* $y_{(n,0)} = x_n$ *и последовательно находим элементы:*

$$y_{(n,i)} = P_C\left(y_{(n,i-1)} - \lambda_n u_{(n,i)}\right), \;\; u_{(n,i)} \in A_i y_{(n,i-1)}, \;\; i = \overline{1,p}.$$

3) *Если* $y_{(n,i)} = y_{(n,i-1)}$ *для всех* $i = \overline{1,p}$, *то СТОП и* $x_n \in VI(A,C)$. *Иначе переходим на шаг 4.*
4) *Полагаем*

$$x_{n+1} = y_{(n,p)},$$
$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \lambda_{n+1},$$
$$z_{n+1} = \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}}\right) z_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} x_{n+1},$$

$n := n+1$, *переходим на шаг 2.*

Если $VI(A,C) \neq \emptyset$, то последовательность (z_n), порожденная этим алгоритмом, слабо сходится к некоторому элементу $x \in VI(A,C)$, иначе $\|z_n\| \to +\infty$.

Интересной и актуальной задачей является построение и обоснование схем расщепления для вариационных неравенств вида:

$$\text{найти } x \in \bigcap_k F(T_k): \; \exists u \in \sum_i A_i x \quad \text{и} \quad (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in \bigcap_k F(T_k), \quad (11)$$

где $F(T_k)$ — множество неподвижных точек (квази)нерастягивающего оператора T_k. В случае $A_i \equiv 0$ задача (11) переходит в классическую задачу поиска элемента множества $\bigcap_k F(T_k)$ — общей неподвижной точки операторов T_k (common fixed point problem), имеющую богатую алгоритмику [1].

Литература

1. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, 2011. — 408 + XVI p.
2. Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — М.: Наука, 1989. — 400 с.
3. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem. V. 2. — New York: Springer, 2003. — XXXIII + 666 p.
4. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — V. 47, № 4. — P. 631–639.
5. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №1(104). — С. 10–23.
6. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №3(106). — С. 27–32.
7. Малицкий Ю. В., Семенов В. В. Схема внешних аппроксимаций для вариационных неравенств на множестве неподвижных точек фейеровских операторов // Доповіді НАН України. — 2013. — №7. — С. 47–52.
8. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2014. — P. 1–10. — DOI 10.1007/s10898–014–0150–x.
9. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — V. 50, № 2. — P. 271–277.
10. Семенов В. В., Чабак Л. М. Новий варіант регуляризації методів екстраградієнтного типу // Доповіді НАН України. — 2014. — №10. — С. 45–50.
11. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // In: M. Z. Zgurovsky and V. A. Sadovnichiy (eds.), Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications, V. 211, Springer International Publishing Switzerland. — 2014. — P. 131–146.
12. Lions P. L., Mercier B. Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators // SIAM J. Numer. Anal. — 1979. — V. 16, № 6. — P. 964–979.
13. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — V. 38. — P. 431–446.
14. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, № 4. — P. 14–18.
15. Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3(102). — С. 40–48.
16. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Доповіді НАН України. — 2012. — №2. — С. 56–62.
17. Semenov V. V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — V. 46, № 5. — P. 45–56.

18. Semenov V. V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — V. 50, № 5. — P. 741–749.
19. Iiduka H. Decentralized Algorithm for Centralized Variational Inequalities in Network Resource Allocation // J. Optim. Theory Appl. — 2011. — V. 151. — P. 525–540.
20. Nedic A., Bertsekas D. P. Incremental subgradient methods for nondifferentiable optimization // SIAM J. Optim. — 2001. — V. 12, № 1. — P. 109–138.
21. Bertsekas D. P. Incremental proximal methods for large scale convex optimization // Math. Program., Ser. B. — 2011. — V. 129. — P. 163–195.
22. Семенов В. В. Явный алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №2(112). — С. 42–52.
23. Bruck R. E. On the weak convergence of an ergodic iteration for the solution of variational inequalities for monotone operators in Hilbert space // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1977. — V. 61. — P. 159–164.
24. Немировский А. С., Юдин Д. Б. Чезаровская сходимость градиентного метода аппроксимации седловых точек выпукло-вогнутых функций // Доклады АН СССР. — 1978. — Т. 239, вып. 5. — С. 1056–1059.
25. Passty G. B. Ergodic Convergence to a Zero of the Sum of Monotone Operators in Hilbert Spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1979. — V. 72. — P. 383–390.
26. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №2(108). — С. 53–58.
27. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция операторных включений с максимальными монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №2(112). — С. 155–160.

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина, e-mail: semenov.volodya@gmail.com

Киевская государственная академия водного транспорта им. гетмана Петра Конашевича-Сагайдачного, ул. Фрунзе, 9, Киев, 04071, Украина, e-mail: lyu_bov1@mail.ru

Поступила 10.09.2014