Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2015, №1(118) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ДЕЦЕНТРАЛІЗОВАНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ МОНОТОННИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

О. А. Харченко, В. І. Царук, Л. М. Чабак

Резюме. В роботі розглядаються варіаційні нерівності з монотонними операторами, що діють у гільбертовому просторі. Вважається, що оператор нерівності є сумою монотонних операторів, а допустима множина є перетином опуклих замкнених множин. Для розв'язання нерівностей запропоновано децентралізований ітераційний алгоритм з довільним зв'язним графом зв'язків між агентами-користувачами. Доведено теорему про слабку збіжність алгоритму.

Ключові слова: Варіаційна нерівність, монотонний оператор, декомпозиція, децентралізація, алгоритм, збіжність.

1. Вступ

Велика кількість актуальних проблем, таких як мережеві задачі розподілення ресурсів, розподіл потоків, тощо можуть бути сформульовані у вигляді задач на розв'зання варіаційних нерівностей [1]–[4]. Побудова та дослідження методів розв'язання варіаційних нерівностей є цікавим та багатим на результати напрямом прикладного нелінійного аналізу [3, 5]–[16].

З розвитком комп'ютерної техніки і появою багатоядерних процесорів для персональних комп'ютерів все більшої актуальності набувають алгоритми декомпозиції [17]–[21], зокрема, ті, що спираються на паралельну організацію обчислень [4, 22]–[26]. Вони дозволяють розбити велику задачу на дрібніші підзадачі, які обчислюються простіше і можуть обчислюватись одночасно. За рахунок цього загальна складність алгоритму зростає, але час виконання зменшується. З розвитком комп'ютерних мереж загалом та, перш за все, мережі Internet особливе місце в паралельних обчисленнях посіли розподілені обчислення: розподіл задачі не на окремі процесори одного комп'ютера, а на різні комп'ютери мережі. Важливу роль в них відіграють GRID-системи — мережі комп'ютерів, що надають свої ресурси для виконання обчислювальних задач через єдиний інтерфейс, відкриті або закриті для вільного доступу.

В даній роботі розглядаються варіаційні нерівності з монотонними операторами, що діють у гільбертовому просторі. Вважається, що оператор нерівності є сумою монотонних операторів, а допустима множина є перетином опуклих замкнених множин. Для розв'язання таких нерівностей запропоновано децентралізований ітераційний алгоритм, подібний до розглянутого в роботі [4]. Суттєвою вімінністю від [4] є те, що в ми будуємо алгоритм на мережі з довільним зв'язним графом зв'язків між агентами-користувачами. В [4] розглядався повний граф.

Основний результат даної роботи — теорема про слабку збіжність запропонованого децентралізованого алгоритму.

2. Постановка задачі

Нехай H — дійсний гільбертовий простір. Розглянемо мережу з множиною користувачів $I = \{1, .., K\}$. Кожному з користувачів мережі відповідає оператор $A^{(i)} : H \to H$, $i \in I$ та деяка множина $C^{(i)} \subseteq H$, $i \in I$. Ці дані є прихованою інформацією користувачів і не можуть бути отримані іншими користувачами мережі. Нехай $A^{(i)}, C^{(i)}, i \in I$ задовільняють такі умови.

Умова 1.

1. *Кожен оператор $A^{(i)}$, $i \in I$ — строго монотонний і хемінеперервний.*
2. *Кожна множина $C^{(i)}$, $i \in I$ — непорожня, обмежена, замкнена та опукла підмножина H.*
3. *Множина $C = \bigcap_{i \in I} C^{(i)}$ непорожня.*

Кожен користувач взаємодіє з сусідніми користувачами відповідно до неорієнтованого зв'язного графу Γ. Позначимо $I^{(i)} \subseteq I$ множину суміжних вершин з вершиною i.

Розглянемо таку задачу.

Задача 1. *Знайти*

$$x^* \in VI\left(C, \sum_{i \in I} A^{(i)}\right) = \left\{x^* \in C : \left\langle y - x^*, \sum_{i \in I} A^{(i)}(x^*)\right\rangle \geq 0 \ \forall\ y \in C\right\}.$$

Припустимо, що $VI\left(C, \sum_{i \in I} A^{(i)}\right) \neq \emptyset$.

Зауважимо, що умова 1.1 гарантує, що оператор $A = \sum_{i \in I} A^{(i)}$ — строго монотонний і хемінеперервний. З умов 1.2 і 1.3 випливає, що допустима множина $C = \bigcap_{i \in I} C^{(i)}$ — непорожня, замкнена, опукла і обмежена. Отже, задача 1 має єдиний розв'язок.

3. Децентралізований проксимальний алгоритм

Опишемо децентралізований проксимальний алгоритм розв'язання задачі 1.

На початку кожен користувач отримує точку початкового наближення $\bar{x}_0^{(i)}$ та послідовність розмірів кроку $(\alpha_n) \subset [0, 1]$, $\alpha_n \in [0, 1]$. Послідовність (α_n) задовільняє таку умову.

Умова 2.

1. $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$,

3. $\sum_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$.

Прикладом такої послідовності є послідовність $\alpha_n = \frac{1}{n}$.

Також користувачі отримують матрицю усереднень $S = \{s_{ij}\}_{i\in I}$, що має наступні властивості.

Умова 3.

1. $S^T = S$;
2. $\sum_{i=1}^{K} s_{ij} = 1$;
3. $s_{ij} > 0$, *якщо* i*-й та* j*-й користувачі взаємодіють між собою,* $s_{ij} = 0$ *в іншому випадку.*

Зауваження 1. Таку матрицю можна отримати наступним чином:

$s_{ij} = 1/K$, якщо i-й та j-й користувачі з'єднані між собою та $i \neq j$.
$s_{ij} = 0$, якщо i-й та j-й користувачі не з'єднані між собою.
$s_{ii} = 1 - \sum_{j\neq i} s_{ij}$.

Тепер ми можемо сформулювати алгоритм розв'язку задачі 1.

Алгоритм 1.

1. Покладемо $n := 0$;
2. Кожен користувач у відповідності з отриманим $\bar{x}_n^{(i)}$ обчислює точку
$$x_{n+1}^{(i)} = P_{C^{(i)}}\left(\bar{x}_n^{(i)} - \alpha_{n+1} A^{(i)}\left(x_{n+1}^{(i)}\right)\right), i \in I. \quad (1)$$
Ця точка передається всім сусіднім користувачам відповідно до графу Г.
3. Користувачі обчислюють
$$\bar{x}_{n+1}^{(i)} = \sum_{j\in I^{(i)}} s_{ij} x_{n+1}^{(j)}, \quad (2)$$
а також наступні середні значення:
$$z_{n+1}^{(i)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k^{(i)}. \quad (3)$$
Кладемо $n = n + 1$ і переходимо на крок 2.

Зауваження 2. Рівняння з (1) має єдиний розв'язок $x_{n+1}^{(i)}$.

Зауваження 3. У випадку, якщо оператор $A^{(i)}$ є похідною по Гато опуклого функціоналу $f_i(x)$, (1) набуває вигляду:
$$x_{n+1}^{(i)} = \mathrm{prox}_{\alpha_n f_i}(\bar{x}_n^{(i)}) = \mathrm{argmin}_{x\in C^{(i)}} \left\{\frac{1}{2}\left\|x - \bar{x}_n^{(i)}\right\| + \alpha_n f_i(x)\right\}.$$

Оскільки для довільного $j \notin I^{(i)}$ $s_{ij} = 0$, то
$$\sum_{j\in I^{(i)}} s_{ij} x_{n+1}^{(j)} = \sum_{j\in I} s_{ij} x_{n+1}^{(j)}.$$

Основним результатом даної роботи є

Теорема 1. *Згенеровані алгоритмом 1 послідовності* $(z_{n+1}^{(i)})$ *слабко збігаються до єдиного розв'язку задачі при довільному* $i \in I$.

Наступний пункт присвячено доведенню теореми 1.

4. Доведення збіжності алгоритму

Має місце

Лема 1. *Нехай* $\left(z_{n+1}^{(i)}\right)$, $\left(x_n^{(i)}\right)$, $\left(\bar{x}_n^{(i)}\right)$, $i \in I$ *— послідовності, згенеровані алгоритмом 1. Тоді:*

1) $\left(z_{n+1}^{(i)}\right)$, $\left(x_n^{(i)}\right)$, $\left(\bar{x}_n^{(i)}\right)$, $i \in I$ *— обмежені;*
2) *для будь-яких* $n \in \mathbb{N}$ *і* $y \in C$

$$-\frac{\sum_{i\in I}\|\bar{x}_0^{(i)}-y\|^2}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k+1}} \le 2\sum_{i\in I}\left\langle y - z_{n+1}^{(i)}, A^{(i)}(y)\right\rangle - \\ -\sum_{i\in I}\frac{\sum_{k=0}^{n}\|x_{k+1}^{(i)}-\bar{x}_k^{(i)}\|^2}{\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k+1}}; \quad (4)$$

3) *існує* $M \in \mathbb{R}$ *таке, що для довільного* $i \in I$ *та довільного* $n \in \mathbb{N}$ *виконується оцінка*

$$\sum_{k=0}^{n}\|x_{k+1}^{(i)}-\bar{x}_k^{(i)}\|^2 \le M\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k+1}.$$

Доведення. Пункт 1) випливає з обмеженості та опуклості множин $C^{(i)}$.

Доведемо 2). Зафіксуємо $i \in I$. Для довільного $k \in \mathbb{N}$

$$\|x_{k+1}^{(i)}-y\|^2 = \|P_{C^{(i)}}\left(\bar{x}_k^{(i)} - \alpha_{k+1}A^{(i)}(x_{k+1}^{(i)})\right) - P_{C^{(i)}}(y)\|^2 \le \\ \le \left\langle \bar{x}_k^{(i)} - \alpha_{k+1}A^{(i)}(x_{k+1}^{(i)}) - y, x_{k+1}^{(i)} - y\right\rangle = \\ = \frac{1}{2}\left(\|\bar{x}_k^{(i)} - \alpha_{k+1}A^{(i)}(x_{k+1}^{(i)}) - y\|^2 + \|x_{k+1}^{(i)} - y\|^2 - \right. \\ \left. -\|(\bar{x}_k^{(i)} - \alpha_{k+1}A^{(i)}(x_{k+1}^{(i)}) - y) - (x_{k+1}^{(i)} - y)\|^2\right),$$

звідси:

$$\|x_{k+1}^{(i)}-y\|^2 \le \|(\bar{x}_k^{(i)}-y)-\alpha_{k+1}A^{(i)}(x_{k+1}^{(i)})\|^2 - \|(\bar{x}_k^{(i)}-x_{k+1}^{(i)})-\alpha_{k+1}A^{(i)}(x_{k+1}^{(i)})\|^2 = \\ = \|\bar{x}_k^{(i)} - y\|^2 - 2\alpha_{k+1}\langle \bar{x}_k^{(i)} - y, A^{(i)}(x_{k+1}^{(i)})\rangle - \\ - \|\bar{x}_k^{(i)} - x_{k+1}^{(i)}\|^2 - 2\alpha_{k+1}\langle x_{k+1}^{(i)} - \bar{x}_k^{(i)}, A^{(i)}(x_{k+1}^{(i)})\rangle = \\ = \|\bar{x}_k^{(i)} - y\|^2 + 2\alpha_{k+1}\langle y - x_{k+1}^{(i)}, A^{(i)}(x_{k+1}^{(i)})\rangle - \|\bar{x}_k^{(i)} - x_{k+1}^{(i)}\|^2.$$

З монотонності оператора $A^{(i)}$ випливає, що $\langle y - x_{k+1}^{(i)}, A^{(i)}(y)\rangle \ge \langle y - x_{k+1}^{(i)}, A^{(i)}(x_{k+1}^{(i)})\rangle$. Отже, отримаємо:

$$\|x_{k+1}^{(i)} - y\|^2 \le \|\bar{x}_k^{(i)} - y\|^2 + 2\alpha_{k+1}\langle y - x_{k+1}^{(i)}, A^{(i)}(y)\rangle - \|\bar{x}_k^{(i)} - x_{k+1}^{(i)}\|^2.$$

Зафіксуємо $j \in I$. Домножимо отриману нерівність на s_{ij} та просумуємо по i:

$$\sum_{i \in I} s_{ij} \|x_{k+1}^{(i)} - y\|^2 \le$$
$$\le \sum_{i \in I} s_{ij} \left(\|\bar{x}_k^{(i)} - y\|^2 + 2\alpha_{k+1} \langle y - x_{k+1}^{(i)}, A^{(i)}(y) \rangle - \|\bar{x}_k^{(i)} - x_{k+1}^{(i)}\|^2 \right).$$

З іншого боку маємо

$$\|\bar{x}_{k+1}^{(j)} - y\|^2 = \| \sum_{i \in I} s_{ij} x_{k+1}^{(i)} - y\|^2 \le \sum_{i \in I} s_{ij} \|x_{k+1}^{(i)} - y\|^2$$

і

$$\|\bar{x}_{k+1}^{(j)} - y\|^2 \le \sum_{i \in I} s_{ij} \left(\|\bar{x}_k^{(i)} - y\|^2 + 2\alpha_{k+1} \langle y - x_{k+1}^{(i)}, A^{(i)}(y) \rangle - \|\bar{x}_k^{(i)} - x_{k+1}^{(i)}\|^2 \right).$$

Просумуємо отримане по $j \in I$

$$\sum_{j \in I} \|\bar{x}_{k+1}^{(j)} - y\|^2 \le$$
$$\le \sum_{i \in I} s_{ij} \left(\|\bar{x}_k^{(i)} - y\|^2 + 2\alpha_{k+1} \langle y - x_{k+1}^{(i)}, A^{(i)}(y) \rangle - \|\bar{x}_k^{(i)} - x_{k+1}^{(i)}\|^2 \right) =$$
$$= \sum_{i \in I} \left(\|\bar{x}_k^{(i)} - y\|^2 + 2\alpha_{k+1} \langle y - x_{k+1}^{(i)}, A^{(i)}(y) \rangle - \|\bar{x}_k^{(i)} - x_{k+1}^{(i)}\|^2 \right) \sum_{j \in I} s_{ij}.$$

Оскільки матриця S симетрична, а сума всіх її рядків дорівнює 1, то $\sum_{j \in I_i} s_{ij} = \sum_{j \in I} s_{ji} = 1$. Отже, отримаємо:

$$\sum_{i \in I} \|\bar{x}_{k+1}^{(i)} - y\|^2 \le \sum_{i \in I} \|\bar{x}_k^{(i)} - y\|^2 +$$
$$+ 2\alpha_{k+1} \sum_{i \in I} \langle y - x_{k+1}^{(i)}, A^{(i)}(y) \rangle - \sum_{i \in I} \|\bar{x}_k^{(i)} - x_{k+1}^{(i)}\|^2.$$

Просумуємо отриману нерівність по k від 0 до m.

$$\sum_{i \in I} \|\bar{x}_{m+1}^{(i)} - y\|^2 \le \sum_{i \in I} \|\bar{x}_0^{(i)} - y\|^2 +$$
$$+ 2 \sum_{k=0}^{m} \alpha_{k+1} \sum_{i \in I} \langle y - x_{k+1}^{(i)}, A^{(i)}(y) \rangle - \sum_{k=0}^{m} \sum_{i \in I} \|\bar{x}_k^{(i)} - x_{k+1}^{(i)}\|^2.$$

Отже, для довільного $y \in C$

$$- \sum_{i \in I} \|\bar{x}_0^{(i)} - y\|^2 \le$$
$$\le 2 \sum_{i \in I} \left\langle \sum_{k=0}^{m} \alpha_{k+1} y - \sum_{k=0}^{m} \alpha_{k+1} x_{k+1}^{(i)}, A^{(i)}(y) \right\rangle - \sum_{k=0}^{m} \sum_{i \in I} \|\bar{x}_k^{(i)} - x_{k+1}^{(i)}\|^2,$$

і

$$-\frac{\sum_{i\in I}\|\bar{x}_0^{(i)}-y\|^2}{\sum_{k=0}^{m}\alpha_{k+1}} \le 2\sum_{i\in I}\left\langle y-z_{m+1}^{(i)}, A^{(i)}(y)\right\rangle - \sum_{i\in I}\frac{\sum_{k=0}^{m}\|x_{k+1}^{(i)}-\bar{x}_k^{(i)}\|^2}{\sum_{k=0}^{m}\alpha_{k+1}},$$

що і треба було довести.

Перейдемо до доведення 3). З обмеженості $\left(z_{n+1}^{(i)}\right)$, а також розбіжності ряду $\sum_{n\to\infty}\alpha_n$, отримаємо обмеженість $\sum_{k=0}^{m}\|x_{k+1}^{(i)}-\bar{x}_k^{(i)}\|^2$. Звідси, для будь-якого $i\in I$ існує $M\in\mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{n}\|x_{k+1}^{(i)}-\bar{x}_k^{(i)}\|^2 \le M\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k+1}$. Зі скінченності множини I випливає існування спільного для всіх $M\in\mathbb{R}$. $\square$

Лема 2. *Послідовність* $\left(\frac{\sum_{k=0}^{m}\|x_{k+1}^{(i)}-\bar{x}_k^{(j)}\|^2}{\sum_{k=0}^{m}\alpha_{k+1}}\right)$ *— обмежена для довільних* i, $j\in I$.

Доведення. Розглянемо доданок $\|x_{k+1}^{(i)}-\bar{x}_k^{(j)}\|$:

$$\|x_{k+1}^{(i)}-\bar{x}_k^{(j)}\|^2 \le \|x_{k+1}^{(i)}-\bar{x}_k^{(i)}\|^2+\|\bar{x}_k^{(i)}-\bar{x}_k^{(j)}\|^2.$$

Оскільки обмеженість відповідної суми для $i=j$ випливає з пункту 3) попередньої леми, то достатньо довести наступне:

$$\sum_{k=0}^{m}\|\bar{x}_k^{(i)}-\bar{x}_k^{(j)}\|^2 \le \bar{M}\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k+1} \tag{5}$$

для довільних i, $j\in I$ та деякого $\bar{M}\in\mathbb{R}$.

Розпишемо один з доданків цієї суми:

$$\|\bar{x}_k^{(i)}-\bar{x}_k^{(j)}\|^2 = \left\|\sum_{l\in I}s_{li}x_k^{(l)}-\sum_{p\in I}s_{pj}x_k^{(p)}\right\|^2.$$

Зведемо доданки за наступним алгоритмом:

Алгоритм 2.

1. Для всіх $l\in I$, якщо $s_{li}>0$ і $s_{pj}>0$, то зведемо їх. Отримаємо набори $\hat{s}_{li},\hat{s}_{pj}$. При цьому $\sum_{l\in I}\hat{s}_{li} = \sum_{p\in I}\hat{s}_{pj}$, оскільки $\sum_{l\in I}s_{li}=\sum_{p\in I}s_{pj}$.
2. З $\hat{s}_{li}$ виділимо найбільший елмент $\overline{s}_{li}$, з $\hat{s}_{pj}$ — найменший ненульовий $\underline{s}_{pj}$. Якщо $\underline{s}_{pj}>\overline{s}_{li}$, змінимо знак під нормою і повторимо процедуру.

3. Позначимо $\underline{s}_{pj} = \lambda_1^{(lp)} = \lambda_1^{(lp)}(i,j)$ і винесемо $\lambda_1^{(lp)} x_k^{(l)} - \lambda_1^{(lp)} x_k^{(p)}$ з модуля за нерівністю трикутника, отримавши:

$$\left\| \sum_{l \in I} s_{li} x_k^{(l)} - \sum_{p \in I} s_{pj} x_k^{(p)} \right\|^2 \le$$

$$\le \left\| \sum_{l \in I} \dot{s}_{li} x_k^{(l)} - \sum_{p \in I} \dot{s}_{pj} x_k^{(p)} \right\|^2 + \lambda_1^{(lp)} \| x_k^{(l)} - x_k^{(p)} \|^2.$$

Тут $\dot{s}_{lj}$ — залишок набору. Повторимо крок 2, позначивши $\hat{s}_{li} = \dot{s}_{li}$, $\hat{s}_{lj} = \dot{s}_{lj}$.

Застосувавши даний алгоритм отримаємо суму:

$$\left\| \sum_{l \in I} s_{li} x_k^{(l)} - \sum_{l \in I} s_{lj} x_k^{(l)} \right\|^2 = \left\| \sum_{p,q \in I} \lambda_1^{(p,q)} (x_k^{(p)} - x_k^{(q)}) \right\|^2 \le$$

$$\le \sum_{p,q \in I} \lambda_1^{(p,q)} \| x_k^{(p)} - x_k^{(q)} \|^2.$$

Тут коефіцієнти $\lambda_1^{(i,j)}$ не залежать від поточного кроку k, а залежать лише від (i,j) та матриці S. Також, $\sum_{p,q \in I} \lambda_1^{(p,q)} \le 1$, а у випадку, якщо i,j мають спільного сусіда, то $\sum_{p,q \in I} \lambda_1^{(p,q)} < 1$. Розпишемо один з отриманих доданків:

$$\| x_k^{(p)} - x_k^{(q)} \|^2 \le \| x_k^{(p)} - \bar{x}_{k-1}^{(p)} \|^2 + \| x_k^{(q)} - \bar{x}_{k-1}^{(q)} \|^2 + \| \bar{x}_{k-1}^{(p)} - \bar{x}_{k-1}^{(q)} \|^2.$$

Підставимо отримане в попередню нерівність:

$$\| \bar{x}_k^{(i)} - \bar{x}_k^{(j)} \|^2 \le \sum_{p,q \in I} \lambda_1^{(p,q)} \| \bar{x}_{k-1}^{(p)} - \bar{x}_{k-1}^{(q)} \|^2 + 2 \sum_{p \in I} \bar{\lambda}_1^{(p)} \| x_k^{(p)} - \bar{x}_{k-1}^{(p)} \|^2,$$

де $2\bar{\lambda}_1^{(p)} = \sum_{q \ne p} \lambda_1^{(p,q)}$, а $\sum_{p \in I} \bar{\lambda}_1^{(p)} \le 1$.

Розписавши відповідно всі доданки $\| \bar{x}_{k-1}^{(p)} - \bar{x}_{k-1}^{(q)} \|$, в підсумку отримаємо:

$$\| \bar{x}_m^{(i)} - \bar{x}_m^{(j)} \|^2 \le \sum_{k=1}^{m} 2 \sum_{p \in I} \bar{\lambda}_{m-k+1}^{(p)} \| x_k^{(p)} - \bar{x}_{k-1}^{(p)} \|^2 +$$

$$+ \sum_{p,q \in I} \lambda_m^{(p,q)} \| \bar{x}_0^{(p)} - \bar{x}_0^{(q)} \|^2 = \sum_{k=1}^{m} 2 \sum_{p \in I} \bar{\lambda}_{m-k+1}^{(p)} \| x_k^{(p)} - \bar{x}_{k-1}^{(p)} \|^2 + \lambda_m M_0. \quad (6)$$

Тут $\lambda_m = \sum_{p,q \in I} \lambda_m^{(p,q)} = 2 \sum_{p \in I} \bar{\lambda}_m^{(p)}$, а $M_0 = \sum_{p,q \in I} \| \bar{x}_0^{(p)} - \bar{x}_0^{(q)} \|^2$.

Підставивши доданки в суму, нерівність перетвориться на:

$$\sum_{m=0}^{n}\|\bar{x}_m^{(i)}-\bar{x}_m^{(j)}\|^2 \le \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}2\sum_{p\in I}\bar{\lambda}_{m-k+1}^{(p)}\|x_k^{(p)}-\bar{x}_{k-1}^{(p)}\|^2+\lambda_m M_0\right)=$$

$$=2\sum_{p\in I}\sum_{m=0}^{n}\bar{\lambda}_m^{(p)}\sum_{k=1}^{m}\|x_k^{(p)}-\bar{x}_{k-1}^{(p)}\|^2+M_0\sum_{m=0}^{n}\lambda_m\le$$

$$\le 2\sum_{p\in I}\sum_{m=0}^{n}\bar{\lambda}_m^{(p)}M\sum_{k=1}^{m}\alpha_k+M_0\sum_{m=0}^{n}\lambda_m\le$$

$$\le 2M\sum_{p\in I}\sum_{m=0}^{n}\bar{\lambda}_m^{(p)}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+M_0\sum_{m=0}^{n}\lambda_m\le 2M\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\sum_{m=0}^{n}\sum_{p\in I}\bar{\lambda}_m^{(p)}+M_0\sum_{m=0}^{n}\lambda_m.$$

Оскільки $\lambda_m=\sum_{p,q\in I}\lambda_m^{(p,q)}=2\sum_{p\in I}\bar{\lambda}_m^{(p)}$, отримаємо

$$\sum_{m=0}^{n}\|\bar{x}_m^{(i)}-\bar{x}_m^{(j)}\|^2\le$$

$$\le\sum_{m=0}^{n}\lambda_m\left(2M\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+M_0\right)\le M'\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left(\sum_{m=0}^{n}\lambda_m\right). \quad (7)$$

Доведемо тепер збіжність ряду $\sum_{m=0}^{n}\lambda_m$. Оцінимо знизу найменший коефіцієнт при модулях в отриманій сумі. Введемо число

$$\lambda=\min_{i,j,p,q\in I}\{a=\lambda_1^{(p,q)}(i,j):a>0\}.$$

Очевидно, що довільний ненульовий коефіцієнт $\lambda_1^{(p,q)}\ge\lambda, p,q\in I$, а, відповідно, $\lambda_m^{(p,q)}\ge\lambda^m$.

Позначимо діаметр графа Γ як D_Γ. Розглянемо найкоротший маршрут між i-м та j-м користувачами. Нехай довжина цього маршруту $d\le D_\Gamma$. Розглянемо (6), розписавши його до кроку $m=k-d+1$:

$$\sum_{p,q\in I}\lambda_{d-1}^{(p,q)}\|\bar{x}_{k-d+1}^{(p)}-\bar{x}_{k-d+1}^{(q)}\|^2.$$

Тут $\sum_{p,q\in I}\lambda_{d-1}^{(p,q)}\le 1$. Оскільки це передостанній крок маршруту, то для $p=i,j$ існують такі $q=q^*$, що i-й або j-й користувач суміжні з q^*. Розглянемо один з цих доданків:

$$\lambda_{d-1}^{(i,q^*)}\|\bar{x}_{k-d+1}^{(i)}-\bar{x}_{k-d+1}^{(q^*)}\|^2=\lambda_{d-1}^{(i,q^*)}\left\|\sum_{p\in I}\left(s_{pi}x_{k-d+1}^{(p)}-s_{pq^*}x_{k-d+1}^{(p)}\right)\right\|\le(*)$$

Оскільки $s_{iq^*}>\lambda>0, s_{ii}>\lambda>0$, позначимо $s_0=\min\{s_{iq^*},s_{ii}\}>0$. Тоді

$$(*)\le\lambda_{d-1}^{(i,q^*)}\left(\sum_{v,w\in I}\gamma^{(v,w)}\|x_{k-d+1}^{(v)}-x_{k-d+1}^{(w)}\|^2+s_0\|x_{k-d+1}^{(i)}-x_{k-d+1}^{(i)}\|\right).$$

Тут $\sum_{v,w\in I}\gamma^{(v,w)} + s_0 \leq 1$, а отже $\sum_{v,w\in I}\gamma^{(v,w)} \leq 1 - s_0 \leq 1 - \lambda$. Отже,

$$\lambda_d = \sum_{p,q\in I}\lambda_d^{(p,q)} \leq \sum_{(p,q)\in I, p\neq i, q\neq q^*}\lambda_{d-1}^{(p,q)} + \lambda_{d-1}^{(i,q^*)}\sum_{v,w\in I}\gamma^{(v,w)} \leq$$

$$\leq 1 - \lambda_{d-1}^{(i,q^*)}\lambda \leq 1 - \lambda^d.$$

Отже, підставивши найдовшу довжину маршруту, отримаємо, що $\lambda_{D_\Gamma} \leq 1 - \lambda^{D_\Gamma}$. Продовживши дані ітерації, отримаємо, що $\lambda_{n+D_\Gamma} \leq \lambda_n(1-\lambda^{D_\Gamma})$.

Підставивши дані співвідношення в ряд, маємо

$$\sum_{m=0}^{n}\lambda_m \leq \sum_{k=0}^{D_\Gamma}\sum_{m=0}^{n}\lambda_{mD_\Gamma+k} \leq \sum_{k=0}^{D_\Gamma}\sum_{m=0}^{n}\lambda_k(1-\lambda^{D_\Gamma})^m \to L \in \mathbb{R}.$$

І, нарешті, після підстановки в (7)

$$\sum_{m=0}^{n}\|\bar{x}_m^{(i)} - \bar{x}_m^{(j)}\|^2 \leq M'\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left(\sum_{m=0}^{n}\lambda_m\right) \leq LM'\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right),$$

отримаємо умову (5). □

Розглянемо послідовності $(\bar{z}_{n+1}^{(i)})$, які задані рівностями

$$\bar{z}_{n+1}^{(i)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k}\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k\bar{x}_{k-1}^{(i)}, \tag{8}$$

де $\bar{x}_{k-1}^{(i)}$ визначається з (2), а (α_n) задовільняє умові 2. Справедлива

Лема 3. *Для довільних $i,\ j \in I$*

$$\lim_{n\to\infty}\|z_{n+1}^{(i)} - \bar{z}_{n+1}^{(j)}\| = 0.$$

Доведення. Зафіксуємо $i, j \in I$. З леми 1.1 і леми 2 випливає існування таких $M_1, M_2 > 0$, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ $\|x_{n+1}^{(i)} - \bar{x}_n^{(j)}\|^2 \leq M_1$ і $\sum_{k=0}^{n}\|x_{k+1}^{(i)} - \bar{x}_k^{(j)}\|^2 / \sum_{k=0}^{n}\alpha_{k+1} \leq M_2$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Умова 2.2 гарантує існування $m_1 \in \mathbb{N}$ такого, що $\alpha_n \leq \varepsilon$ $\forall n \geq m_1$. З умови 2.3 випливає, що для m_1 існує $m_2 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{m_2}\alpha_k}\sum_{k=1}^{m_1}\alpha_k\|x_k^{(i)} - \bar{x}_{k-1}^{(j)}\|^2 \leq \frac{M_1}{\sum_{k=1}^{m_2}\alpha_k}\sum_{k=1}^{m_1}\alpha_k \leq \varepsilon.$$

Звідси для довільного $n \geq m_2$

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k}\sum_{k=1}^{m_1}\alpha_k\|x_k^{(i)} - \bar{x}_{k-1}^{(j)}\|^2 \leq \varepsilon.$$

Тоді, враховуючи (3), (8) і умову 2.1, отримаємо, що для довільного $n \geq n_0 = \max\{m_1, m_2\}$ виконується

$$\|z_{n+1}^{(i)} - \bar{z}_{n+1}^{(j)}\|^2 = \left\| \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k (x_{k+1}^{(i)} - \bar{x}_k^{(j)}) \right\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \|x_k^{(i)} - \bar{x}_{k-1}^{(j)}\|^2 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k} \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \|x_k^{(i)} - \bar{x}_{k-1}^{(j)}\|^2 +$$

$$+ \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k} \sum_{k=m_1+1}^{n+1} \alpha_k \|x_k^{(i)} - \bar{x}_{k-1}^{(j)}\|^2 \leq$$

$$\leq \varepsilon + \frac{\alpha_{m_1+1}}{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k} \sum_{k=m_1+1}^{n+1} \alpha_k \|x_k^{(i)} - \bar{x}_{k-1}^{(j)}\|^2 \leq$$

$$\leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k} \sum_{k=m_1+1}^{n+1} \alpha_k \|x_k^{(i)} - \bar{x}_{k-1}^{(j)}\|^2 \leq (1 + M_2)\varepsilon,$$

звідки випливає, що $\lim_{n\to\infty} \|z_{n+1}^{(i)} - \bar{z}_{n+1}^{(j)}\| = 0$. □

Перейдемо, нарешті, до доведення теореми 1.

Доведення теореми 1. Зафіксуємо $i \in I$. З обмеженості послідовності $(z_n^{(i)})$ випливає існування підпослідовності $(z_{n_l}^{(i)})$, що слабко збігається до деякого $z_*^{(i)} \in H$. З опуклості та замкнености множини $C^{(i)}$ випливає, що $z_*^{(i)} \in C^{(i)}$. З леми 3 випливає, що $\bar{z}_n^{(i)} \rightharpoonup z_*^{(i)}$. Водночас для довільного $j \in I \setminus \{i\}$ лема 3 гарантує, що $z_n^{(j)} \rightharpoonup z_*^{(i)}$. При цьому $z_n^{(j)} \subset C^{(j)}$, а отже, враховуючи замкненість $C^{(j)}$, маємо $z_*^{(i)} \in C^{(j)}$, і, узагальнивши, $z_*^{(i)} \in \bigcap_{i\in I} C^{(i)} = C$.

Підставимо послідовність індексів (n_l) в нерівність (4), отримаємо, що для довільних $y \in C$ і $l \in \mathbb{N}$

$$-\frac{\sum_{i\in I} \|\bar{x}_0^{(i)} - y\|^2}{\sum_{k=0}^{n_l-1} \alpha_{k+1}} \leq 2 \sum_{i\in I} \left\langle y - z_{n_l}^{(i)}, A^{(i)}(y) \right\rangle.$$

Перейшовши до границі при $l \to \infty$, і враховуючи умову 2.3, отримаємо, що для довільного $y \in C$

$$0 \leq 2 \sum_{i\in I} \left\langle y - z_*^{(i)}, A^{(i)}(y) \right\rangle = 2 \left\langle y - z_*^{(i)}, \sum_{i\in I} A^{(i)}(y) \right\rangle.$$

Оскільки оператор $\sum_{i\in I} A^{(i)}$ — монотонний і хемінеперервний, то з умови 1.1 ми отримаємо, що

$$0 \leq 2 \left\langle y - z_*^{(i)}, \sum_{i\in I} A^{(i)}(z_*^{(i)}) \right\rangle \quad \forall y \in C,$$

а отже $z_*^{(i)} \in VI(C, \sum_{i\in I} A^{(i)})$.

Оскільки з умов задачі випливає, що $VI(C, \sum_{i \in I} A^{(i)})$ складається з єдиної точки x^*, отримаємо, що для довільного $i \in I$ довільна слабко збіжна підпослідовність $(z_{n_l}^{(i)})$ обмеженої послідовності $(z_n^{(i)})$ слабко збігається до x^* розв'язку задачі 1, а отже $z_n^{(i)} \rightharpoonup x^*$. $\square$

Література

1. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. — Москва: Наука, 1988. — 448 с.
2. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — Москва: Мир, 1983. — 256 с.
3. Гольштейн Е. Г., Гольштейн Н. В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — Москва: Наука, 1989. — 400 с.
4. Iiduka H. Decentralized Algorithm for Centralized Variational Inequalities in Network Resource Allocation // J. Optim. Theory Appl. — 2011. — 151. — P. 525–540.
5. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — Москва: Изд-во МГУ, 1989. — 200 с.
6. Bruck R. E. On the weak convergence of an ergodic iteration for the solution of variational inequalities for monotone operators in Hilbert space // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1977. — V. 61. — P. 159–164.
7. Passty G. B. Ergodic Convergence to a Zero of the Sum of Monotone Operators in Hilbert Spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1979. — V. 72. — P. 383–390.
8. Семенов В. В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №1(101). — С. 120–128.
9. Войтова Т. А., Семенов В. В. Метод решения двухэтапных операторных включений // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3(102). — С. 34–39.
10. Маліцький Ю. В., Семенов В. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3(102). — С. 79–88.
11. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №3(106). — С. 27–32.
12. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — V. 47, №4. — P. 631–639.
13. Апостол Р. Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №1(107). — С. 3–14.
14. Семенов В. В., Чабак Л. М. Новий варіант регуляризації методів екстраградієнтного типу // Доповіді НАН України. — 2014. — №10. — С. 45–50.
15. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2015. — V. 61. — Issue 1. — P. 193–202
16. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — V. 50, №2. — P. 271–277.

17. Lions P. L., Mercier B. Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators // SIAM J. Numer. Anal. — 1979. — V. 16, №6. — P. 964–979.
18. Nedic A., Bertsekas D. P. Incremental subgradient methods for nondifferentiable optimization // SIAM J. Optim. — 2001. — V. 12, №1. — P. 109–138.
19. Bertsekas D. P. Incremental proximal methods for large scale convex optimization // Math. Program., Ser. B. — 2011. — V. 129. — P. 163–195.
20. Semenov V. V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — V. 46, №5. — P. 45–56.
21. Semenov V. V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — V. 50, №5. — P. 741–749.
22. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, №4. — P. 14–18.
23. Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3(102). — С. 40–48.
24. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №2(108). — С. 53–58.
25. Семенов В. В. Явный алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №2(112). — С. 42–52.
26. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция операторных включений с максимальными монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №2(112). — С. 155–160.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна,
e-mail: sigi_grebe@list.ru

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна,
e-mail: hirurg123@gmail.com

Київська державна академія водного транспорту ім. гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного, вул. Фрунзе, 9, Київ, 04071, Україна, e-mail: lyu_bov1@mail.ru

Надійшла 25.10.2014