Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2015, №3(120)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9
MSC 91B06

ON THE PROBLEM OF PAIRWISE COMPARISONS MATRICES UNDER THE CONDITIONS OF UNCERTAINCES ASSESSMENT

Valentyna Savkova, Olexandr Nakonechniy

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: valentina.savkova@gmail.com, a.nakonechniy@gmail.com.

ДО ПРОБЛЕМИ ОЦІНКИ МАТРИЦЬ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

В. П. Савкова, О. Г. Наконечний

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: valentina.savkova@gmail.com, a.nakonechniy@gmail.com.

Resume. If on a set of objects are given certain binary relations, that determine the advantages of one object over the other object, then their ordering is possible with a help of paired comparisons. The method of paired comparisons allows an estimation of such characteristics of objects, which are not measurable in the usual sense, that is with technical devices and tools. Practical applications of the method in ranking, prioritization and decision-making are unique in the sense that it allows utilization of subjective preferences of judges. Since the objects are compared in pairs, judges can concentrate their attention on only two objects at time. It is believed that such an approach avoids the effect of so-called sensory fatigue, when evaluating more than two objects at a time leads to confusion and lack of concentration. Moreover, observing just two objects permits better discrimination between very fine differences in the objects. This method represents a simpler but strong alternative to other ranking techniques, which may require complex experiment planning procedures. Another distinctive advantage of our approach is that the method does not deny the existence of circular triads, and in some cases allows identification of such triads. We see the method of paired comparisons as by far more superior than other ranking techniques. In this paper it is considering the case when the elements of comparisons are random with partly unknown probabilities. To determine them, it is using the method of maximum authenticity and the method of minimizing the aggregate quadratic error. It is shown that the estimates of the maximum authenticity of the probabilities are determined by some equation, has a unique solution. For optimal averaged estimates are received an explicit formulas.
Keywords: decision making theory, operands ranking, pair-wise

comparison method, maximal probability method, average mean-square error minimization method, maximum probability estimator.

Резюме. Якщо на множині об'єктів задаються певні бінарні відношення, що визначають переваги одного об'єкта над іншим, то їх впорядкування можливе за допомогою попарних порівнянь. В роботі розглядається випадок, коли елементи матриці порівнянь випадкові з частково невідомими ймовірностями. Для їх визначення застосовується метод максимальної вірогідності та метод мінімізації усередненої середньоквадратичної похибки. Показано, що оцінки максимальної вірогідності ймовірностей визначаються із деякого рівняння, що має єдиний розв'язок. Для оптимальних усереднених оцінок ймовірностей одержані явні формули.
Ключові слова: теорія прийняття рішень, ранжування об'єктів, метод попарних порівнянь, метод максимальної вірогідності, метод мінімізації усередненої середньоквадратичної похибки, оцінка максимальної вірогідності.

Однією з важливих проблем в теорії прийняття рішень є задача ранжування об'єктів. Якщо на множині таких об'єктів задаються певні бінарні відношення, що визначають переваги одного об'єкта над іншим, то їх впорядкування можливе за допомогою попарних порівнянь. В роботі розглядається випадок, коли елементи матриці порівнянь випадкові з частково невідомими ймовірностями. Для їх визначення застосовується метод максимальної вірогідності та метод мінімізації усередненої середньоквадратичної похибки. Показано, що оцінки максимальної вірогідності ймовірностей визначаються із деякого рівняння, що має єдиний розв'язок. Для оптимальних усереднених оцінок ймовірностей одержані явні формули.

Нехай на множині альтернатив $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ – задача N бінарних відношень $B_k,\ k = \overline{1, N}$.

Поставимо у відповідність кожному бінарному відношенню B_k матрицю попарних порівнянь [4] $A_k = \{a_{ij}^{(k)}\}_{i,j=\overline{1,m}}$, при цьому $a_{ij}^{(k)} = 1$, якщо $x_i R_k x_j$ і $a_{ij}^{(k)} = -1$, якщо $x_i \overline{R_k} x_j$.

Будемо вважати, що $a_{ij}^{(k)}$ при фіксованих i, j є реалізаціями (послідовністю) випадкових незалежних величин, причому

$P\left\{a_{ij}^{(k)} = 1\right\} = \gamma_{ij}^k p_{ij} = 1 - P\left\{a_{ij}^{(k)} = -1\right\}$, де $k = \overline{1, N},\ \ \gamma_{ik}^{(k)}$ – відомі додатні величини $\gamma_{ij}^k \le 1,\ p_{ij}$ – невідомі параметри $0 \le p_{ij} \le 1$.

Позначимо через $y_{ij}^{(k)}$ – реалізації випадкових величин $a_{ij}^{(k)}$. Тоді якщо $k_1, \dots, k_r$ такі, що $y_{ij}^{(ks)} = 1,\ s = \overline{1, r}$, а $y_{ij}^{(ks)} = -1,\ \ s = \overline{r+1, N}$, то має місце наступне твердження.

Твердження 1. Нехай λ_{ij} – корінь рівняння на множині $[1,\infty)$

$$r = \sum_{s=r+1}^{N} (\lambda_{ij} - \gamma_{ij}^{(Ks)})^{-1}, \tag{1}$$

тоді єдина оцінка максимальної вірогідності має вигляд $p_{ij}\frac{1}{\lambda_{ij}}$, де $r = \frac{1}{2}(N + \sum_{k=1}^{N} y_{ij}^{(k)})$.

Доведення. Через те що, величини $a_{ij}^{(k)}$, $k = \overline{1,N}$ незалежні,

$$W_{ij}(P) = P\left\{a_{ij}^{(1)} = y_{ij}^{(1)}, ..., a_{ij}^{(N)} = y_{ij}^{(N)}\right\} =$$
$$= \prod_{s=1}^{N} P\left\{a_{ij}^{(s)} = y_{ij}^{(s)}\right\} = \gamma_{ij}^{(k_1)*}\gamma_{ij}^{(k_r)}p_{ij}^{(r)}(1-\gamma_{ij}^{(k_{r+1})}p_{ij})...(1-\gamma_{ij}^{(k_N)}p_{ij}), \tag{2}$$

звідки

$$lnW_{ij}(P) == \sum \ln\gamma_{ij}^{(k_s)} + r\ln\sum_{s=1}^{r}\ln\gamma_{ij}^{(k_s)} + r\ln p_{ij} + \sum_{s=r+1}^{N}\ln\left(1-\gamma_{ij}^{(k_s)}\, p_{ij}\right)$$

Через те що, $\frac{d}{dp}\ln W_{ij}(P) = \frac{r}{p_{ij}} - \sum_{s=r+1}^{N}(1-\gamma_{ij}^{(Ks)}p_{ij})^{-1}$, то із умови $\frac{d}{dp}\ln W_{ij}(P) = 0$ одержимо рівняння (1) відносно $\lambda_{ij} = \frac{1}{p_{ij}}$.

Далі позначимо через $f(\lambda)$ функцію $f(\lambda) = \sum_{s=r+1}^{N}(\lambda - \gamma_{ij}^{(Ks)})^{-1}$, яка є монотонно спадною і $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$. Значить рівняння $f(\lambda) = r$ має єдиний корінь, а значить оцінка $\hat{p}_{ij} = \frac{1}{\hat{\lambda}_{ij}}$ – єдина. □

Наслідок. Нехай $\gamma_{ij} = 1$, тоді

$$\hat{p}_{ij} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_{ij}^{(k)}\right). \tag{3}$$

Наслідок 2. Нехай в рівняння (1), $r = N - 2$. Позначимо $\gamma_{ij}^{(K_{N-1})} = \gamma_1, \gamma_{ij}^{(K_N)} = \gamma_2$. Тоді рівняння $f(\lambda) - r = 0$. Запишемо у вигляді
$r(\lambda-\gamma_1)(\lambda-\gamma_2) - 2 > +\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, або $r\lambda^2 - 2(2 + r(\gamma_1+\gamma_2)) + \gamma_1 + \gamma_2 + r\gamma_1\gamma_2 = 0$. Звідки одержимо оцінку $\hat{p}_{ij} = \frac{1}{\hat{\lambda}_{ij}}$, де $\hat{\lambda}_{ij} = \frac{2}{r} + \gamma_1 + \gamma_2 + \sqrt{\frac{4}{r^2} + (\gamma_1-\gamma_2)^2} = \frac{2}{r}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{r^2}{4}(\gamma_1-\gamma_2)^2}\right) + \gamma_1 + \gamma_2$. Знайдемо далі лінійну оцінку параметра p_{ij}. Нехай $u_1, ..., u_N$ – довільні

числа. Будемо шукати оцінку p_{ij} у вигляді

$$\hat{p}_{ij} = \sum_{k=1}^{N} u_k y_{ij}^{(k)} + c_{ij} \tag{4}$$

Твердження 2. Якщо $c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} u_k$, а u_k задовольняє умові $\sum_{k=1}^{N} u_k \gamma_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}$, то оцінка (4) є незміщеною.

Доведення. Через те що, $Ey_{ij}^{(k)} = 2\gamma_{ij}^{(k)} p - 1$, то $Ep_{ij}^{(k)} = 2\gamma_{ij}^{(k)} p - 1$, то $Ep_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{N} u_k E y_{ij}^{(k)} + \sum_{k=1}^{N} u_k = \sum_{k=1}^{N} u_k (2\gamma_{ij}^{(k)} p - 1) + \sum_{k=1}^{N} u_k = p$, що й потрібно було показати. □

Твердження 3. Середньоквадратична похибка $\sigma(p, u_1, .., u_N)$ незміщеної оцінки параметри p_{ij} має вигляд

$$\sigma(p, u_1, .., u_N) = \{4p_{ij} \sum_{k=1}^{N} r_{ij}^{k} u^2 k - 4p_{ij}^2 \sum_{k=1}^{N} u^2 k (\gamma_{ij}^{k})^2\}^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Доведення.

$$E(p_{ij} - \hat{p}_{ij})^2 = p_{ij}^2 - 2p_{ij} E\hat{p}_{ij} + E\hat{p}_{ij}^2 = -p_{ij}^2 + E\hat{p}_{ij}^2,$$

$$E\hat{p}_{ij}^2 = E(\sum_{k=1}^{N} u_k (y_{ij}^{(k)} + 1))^2 = \sum_{k=1}^{N} u_k^2 E(y_{ij}^{(k)} + 1)^2 + \sum_{k \neq s} u_k u_s E(y_{ij}^{(k)} + 1)(y_{ij}^{(s)} + 1).$$

Через те що, $E(y_{ij}^{(k)} + 1)^2 = 4\gamma_{ij}^{(k)} p_{ij}$, а

$$E(y_{ij}^{(k)} + 1)(y_{ij}^{(s)} + 1) = E(y_{ij}^{(k)} + 1) E(y_{ij}^{(s)} + 1) = 4p_{ij}^2 \gamma_{ij}^{(k)} \gamma_{ij}^{(s)},$$

звідки $E\hat{p}_{ij}^2 = p_{ij}^2 - 4p_{ij}^2 \sum u_k^2 (\gamma_{ij}^{k})^2$, а значить

$$E(p_{ij} - \hat{p}_{ij})^2 = 4p_{ij} \sum_{k=1}^{N} (\gamma_{ij}^{k}) u_k^2 - 4p_{ij}^2 \sum_{k=1}^{N} u_k^2 (\gamma_{ij}^{k})^2,$$

що і потрібно було показати. □

Зауважимо далі, що середньоквадратична похибка залежить від невідомого параметра p_{ij}. Для того щоб зняти невизначеність, припустимо, що нам відомі нижня та верхня оцінки p_{ij}, тобто $p_{ij}^{-} \leq p \leq p_{ij}^{+}$. Введемо функцію

$$\sigma_1^2(u_1, ..u_N) = \int_{p_{ij}^{-}}^{p_{ij}^{+}} \sigma^2(p, u_1, ..u_N) \mu(dp),$$

де $\mu(\cdot)$ – відомий розподіл ймовірностей [4].

Означення 1. Незміщену оцінку $\hat{\hat{p}}ij = \sum \hat{u}_k(y_{ij}^k + 1)$ для якої $(\hat{u}_1, ..., \hat{u}_N) \in Argmin\tau_1^2(u_1..u_N)$, будемо називати усередненою лінійною оцінкою.

Твердження 4. Усереднена лінійна оцінка має вигляд:

$$\hat{\hat{p}}_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \hat{u}_k(y_{ij}^{(k)} + 1), \tag{6}$$

де $\hat{u}_k = \frac{1}{2}\delta_{ij}^{(k)} \left(\sum_{k=1}^N \gamma_{ij}^k \delta_{ij}^{(k)}\right)^{-1}$, $\delta_{ij}^{(k)} = \frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\beta_{ij}^{(k)}}$, $\beta_{ij}^{(k)} = \mu_1\gamma_{ij}^{(k)} - \mu_2(\gamma_{ij}^k)^2$. При цьому:

$$\min \sigma_1^2(u_1..u_N) = \sum_{k=1}^{N} (\mu_1\gamma_{ij}^{(k)} - \mu_2)^{-1}, \tag{7}$$

$$\mu_1 = \int_{p_{ij}^-}^{p_{ij}^+} p\mu(dp), \mu_2 = \int_{p_{ij}^-}^{p_{ij}^+} p^2\mu(dp).$$

Доведення. Зведемо функцію Лагранжа $F_\lambda(u_1, ..., u_N) = \frac{1}{4}\sigma_1^2 + 2 >$ $> \sum_{k=1}^N u_k\gamma_{ij}^{(k)}$ із умови $\frac{\partial F_\lambda}{\partial u_\lambda} = 0$ одержимо, що $\hat{u}_k = -\frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\beta_{ij}^{(k)}}\lambda$. Множник λ знаходимо із умови $\sum_{k=1}^N \hat{u}_k\gamma_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}$. Тобто $\lambda = -\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^k)^2}{\beta_{ij}^{(k)}})^{-1}$. Звідки одержимо вираз для $\hat{u}_k$. Знайдемо далі $\sigma_1^2(\hat{u}_1, ..., \hat{u}_N)$.

Маємо, що $\sigma_1^2(\hat{u}_1, ..., \hat{u}_N) = \sum \hat{u}_k(y_{ij}^k + 1) = x\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\beta_{ij}^{(k)}}$, $\left(\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\beta_{ij}^{(k)}}\right)^{-2} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\beta_{ij}^{(k)}}\right)^{-1} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\mu_1^{(k)}\gamma_{ij}^{(k)} - \mu_2(\gamma_{ij}^{(k)})^2}\right)^{-1} =$ $= \left(\sum_{k=1}^N \mu_1(\gamma_{ij}^{(k)})^{-1} - \mu_2\right)^{-1}$, що й потрібно було показати. □

Наслідок. Якщо $\gamma_{ij}^{(k)} = 1$, то усереднена лінійна оцінка має вигляд

$$\hat{\hat{p}}_{ij} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_{ij}^{(k)}\right) \tag{8}$$

при цьому

$$\sigma_1^2(\hat{u}_1, ..., \hat{u}_N) = \frac{1}{N}(\mu_1 - \mu_2). \tag{9}$$

Твердження 5. Нехай існують константи $c_1(N), c_2(N)$ такі, що $c_1(N) \le \gamma_{ij}^{(k)} \le c_2(N)$.

Тоді має місце нерівність

$$\frac{1}{N}\left(\mu_1 c_2^{-1}(N) - \mu_2\right) \le \sigma_1^2(\hat{u}_1, ..., \hat{u}_N) \le \frac{1}{N}\left(\mu_1 c_1^{-1}(N) - \mu_2\right).$$

Доведення. Через те що, $\frac{1}{c_2(N)} \leq (\gamma_{ij}^{(k)})^{-1} \leq \frac{1}{c_1(N)}$, то $\left(\mu_1 c_1^{-1}(N) - \mu_2\right)^{-1} \leq$ $\leq \left(\mu_1(\gamma_{ij}^{(k)})^{-1} - \mu_2\right)^{-1} \leq \left(\mu_1 c_2^{-1}(N) - \mu_2\right)^{-1}$. Звідки одержимо необхідну нерівність. □

Означення 2. Матрицю $\hat{P}(Y) = (\hat{P}_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$ – назвемо лінійною оцінкою матриці $P = (p_{ij})$.

Означення 3. Матрицю $\hat{P}(Y) = (\hat{\hat{p}}_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$ назвемо лінійною усередненою оцінкою матриці $P = (p_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$.

Твердження 6. Мають місце рівності

$$E\hat{P}(Y) = P, \tag{10}$$

та

$$\int_{R^m} Esp\left(\hat{P}(Y) - P\right)^2 dp = \sum_j^N \left(\sum (\mu_{ij}^{(1)} \gamma_{ij}^{(k)})^{-1} - \mu_{ij}^{(??)}\right)^{-1}, \tag{11}$$

де

$$\mu_{ij}^{(1)} = \int_{p_{ij}^-}^{p_{ij}^+} p\mu(dp), \mu_{ij}^{(2)} = \int_{p_{ij}^-}^{p_{ij}^+} p^2 \mu(dp).$$

Доведення. Рівність (10) випливає із незміщеної оцінки $\widehat{p_{ij}}$, а також із того, що $E\hat{P}(Y) = (E\hat{p}_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$. Далі зауважимо, що

$$\sigma^2 = ESp^2\left(\hat{P}(Y) - P\right) = \sum_{i,j} E(\hat{p}_{ij} - p_{ij})^2 =$$

$$= 4\left(\sum_{i,j} p_{ij} \sum_{k=1}^N \gamma_{ij}^{(k)} \hat{u}_k^2 - \sum_{c,j} p_{ij}^2 \sum_{k=1}^N \hat{u}_k^2 (\gamma_{ij}^{(k)})^2\right).$$

Так як, $\hat{u}_k = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\beta_{ij}^{(k)}} \left(\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\beta_{ij}^{(k)}}\right)^{-1}$, то

$$\sigma^2(P) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i,j=1}^m \left(p_{ij}(\gamma_{ij}^{(k)}) - p_{ij}^2 \gamma_{ij}^2\right) \left(\frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\beta_{ij}^2}\right)^2\right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\beta_{ij}^{(k)}}\right)^{-2}.$$

Враховуючи, що $\beta_{ij}^{(k)} = \mu_1 \gamma_{ij}^{(k)} - \mu_2 (\gamma_{ij}^{(k)})^2$ одержимо, що

$$\int \sigma^2(P) \mu(dp) = \sum_{i,j=1}^m (\sum_{k=1}^N (\mu_{ij}^{(1)})(\gamma_{ij}^{(k)})^{-1} - \mu_{ij}^2)^{-1})^{-1}.$$

□

Наслідок. Якщо $\gamma_{ij}^{(k)} = 1$, то

$$\int_{R^{m^2}} Esp^2(\hat{P}(Y) - P)\mu(dp) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i,j=1}^{m}(\mu_{ij}^{(1)} - \mu_{ij}^{2})\right).$$

Нехай $P\{y_{ij}^{(k)} = 1\} = \gamma_{ij}^{(k)}p$. Нехай при $i < j$, $P\{\eta_{ij}^{(k)} = y_{ij}^{(k)}\} = \gamma_{ij}^{(k)}p$ при $y_{ij}^{(k)} = 1$ і $1 - \gamma_{ij}^{(k)}$ при $y_{ij}^{(k)} = -1$, $i, j = \overline{1, m}$. Знайдемо лінійну усереднену оцінку P по спостереженням $y_{ij}^{(k)}$, $i < j$. Покладемо

$$\hat{p} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i<j} iu_{ij}^{(k)}\overline{y}_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{N}(u_k, y_k), \tag{12}$$

де $\overline{y}_{ij}^{(k)}{=}y_{ij}^{(k)} + 1$.

Твердження 7. Нехай випадкові величини $\eta_{ij}^{(k)}$, $i < j$, $k = \overline{1, N}$ некорельовані, причому виконуються умови

$$\underset{k=1}{\overset{N}{}}\sum_{i<j} iu_{ij}^{(k)}\gamma_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Тоді оцінка (12) є незміщеною, причому

$$E(p - \hat{p})^2 = 4\sum_{k=1}^{N}\sum_{i<j}(u_{ij}^{(k)})^2(\gamma_{ij}^{(k)}p - (\gamma_{ij}^{(k)})^2p^2).$$

Доведення. Через те що $EY_{ij}^{(k)} = 2\gamma_{ij}^{(k)}p$, то із врахуванням (13) одержимо незміщені оцінки. Далі маємо, що

$$E(p - \hat{p})^2 = E(\sum_{k=1}^{N}\sum_{i<j}(u_{ij}^{(k)})^2(\overline{y_{ij}^{(k)}}) - Ey_{ij}^{k}))^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{i<j}(u_{ij}^{(k)})^2E(\overline{y}_{ij} - E\overline{y}_{ij}^{(k)})^2,\ E(\overline{y}_{ij}^{(k)} - E\overline{y}_{ij}^{(k)})^2 =$$

$$= E(y_{ij}^{(k)} - Ey_{ij}^{(k)}) = 1 - (Ey_{ij}^{(k)})^2 = 1 - (2\gamma_{ij}^{(k)}p - 1)^2 = -4(\gamma_{ij}^{(k)})^2p^2 + 4\gamma_{ij}^{(k)}p.$$

Таким чином,

$$E(p - \hat{p})^2 = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i<j}(u_{ij}^{(k)})^2(4\gamma_{ij}^{(k)}p - 4(\gamma_{ij}^{(k)})^2p^2),$$

що і потрібно було показати. □

Припустимо далі, що відомі числа p^- і p^+ такі, що $p^- \leq p \leq p^+$.

Позначимо через $\sigma_1^2(u)$ усереднений критерій по розподілу $\mu(\cdot)$ для якого існують перші чи другі моменти $\sigma_1^2(u) = \int_{p^-}^{p^+} E(p - \hat{p})^2\mu(dp)$.

Твердження 8. Оптимальна усереднена оцінка [2], для якої $\widehat{u} \in Argmin\sigma_1^2(u)$ та виконується умова $\sum_k \sum_{i<j} \widehat{u}_{ij}^{(k)} \gamma_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}$ є незміщеною. При цьому мають місце рівності

$$\widehat{u}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\beta_{ij}^{(k)}}{\sum_k \sum_{i<j} (\beta_{ij}^{(k)})^2}, \quad \beta_{ij}^{(k)} = \frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\delta_{ij}^{(k)}},$$
$$\sigma_1^2(\widehat{u})^k = \left(\sum_{k=1}^{N} \sum_{i<j} \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\delta_{ij}^{(k)}} \right)^{-1}. \tag{14}$$

Доведення. Через те що, $\sigma_1^2(u){=}4 \sum_{k=1}^{N} \sum_{i<j} (u_{ij}^{(k)})^2 \delta_{ij}^{(k)}$, де $\delta_{ij} = \gamma_{ij}^{(k)} \mu_1 - (\gamma_{ij}^{(k)})^2 \mu_2$, $\mu_1 = \int_{p^-}^{p^+} p\mu(dp)$, $\mu_2 = \int_{p^-}^{p^+} p^2 \mu(dp)$, то знайдемо мінімум функції $\sigma_1^2(u)$ при умові (13). Введемо функцію Лагранжа [3] $\sigma_\lambda^2(u) = \sigma_1^2(u) + 2\lambda \sum_u \sum_{i<j} u_{ij}^{(u)} \gamma_{ij}^{(k)}$. Тоді із умови $\frac{\partial}{\partial u_{ij}} \sigma_\lambda(u) = 0$, одержимо, що $\widehat{u}_{ij}^{(k)} = -\lambda \frac{\gamma_{ij}^{(k)}}{\delta_{ij}^{(k)}}$. Множник λ знаходимо із умови (13), тобто $\lambda = \frac{1}{2} (\sum_k \sum_{i<j} (\frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{\delta_{ij}^{(k)}}))^{-1}$. Таким чином, $\widehat{u}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} \frac{\beta_{ij}^{(k)}}{\sum_k \sum_{i<j} (\beta_{ij}^{(k)})^2 \delta_{ij}^{(k)}}$.

Таким чином, $\sigma_1^2(\widehat{u}) = (\sum_k \sum_{i<j} (\beta_{ij}^{(k)})^2 \delta_{ij}^{(k)})^{-2} \cdot \sum_k \sum_{i<j} (\beta_{ij}^{(k)})^2 \delta_{ij}^{(k)}$, $(\beta_{ij}^{(k)})^2 \delta_{ij}^{(k)} = \frac{(\gamma_{ij}^{(k)})^2}{(\delta_{ij}^{(k)})} \delta_{ij} = (\beta_{ij}^{(k)})^2 \delta_{ij}^{(k)}$, звідки одержимо (14). □

Наслідок. Нехай існують числа $c_1(N)$ та $c_2(N)$ такі, що $c_1(N) \leq \gamma_{ij}^{(k)} \leq c_2(N)$. Тоді мають місце нерівності

$$2\frac{(\mu_1 c_2^{-1}(N) - \mu_2)}{NC^{m(m-1)}} \leq \sigma_1^2(\widehat{u}) \leq \frac{2(\mu_1 c_1^{-1}(N) - \mu_2)}{Nm(m-1)}.$$

Література

1. Коваленко И. Н., Филиппова А. А. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высшая школа, 1973. — 368 с.
2. Davidson R. R., Farquhar P. H. A bibliography on the method of paired comparisons — P. 241-252.
3. El-Helbawy A. T. Optimal paired comparison designs. Order statistics and nonparametrics: Theory and applications - Elsevier Science Publishers B. V., 1992. —P. 349–361.
4. Litvine I. N. Models and Methods of paired comparisons — L: Publishing House „Nautilus“, 2004. — 156 p.

Надійшла 10.11.2015