Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2015, №3(120) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9
MSC 47J20, 49J40, 65K15

OUTER APPROXIMATIONS METHOD FOR VARIATIONAL INEQUALITIES

L. M. Chabak[1], V. V. Dudar[2], V. V. Semenov[2], Ya. I. Vedel[2]

[1]Faculty of Transport Economics, Kiev State Maritime Academy named after hetman Petro Konashevich–Sahaydachniy, Kiev, Ukraine, E-mail: lyu_bov1@mail.ru.
[2]Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kiev, Kiev, Ukraine, E-mail: slavko123@ukr.net, volodya.semenov@gmail.com, yandx@ukr.net.

МЕТОД ВНЕШНИХ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Л. М. Чабак[1], В. В. Дударь[2], В. В. Семенов[2], Я. И. Ведель[2]

[1]Киевская государственная академия водного транспорта имени гетмана Петра Конашевича–Сагайдачного, Киев, Украина, E-mail: lyu_bov1@mail.ru.
[2]Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: slavko123@ukr.net, volodya.semenov@gmail.com, yandx@ukr.net.

Abstract. The article deals with variational inequalities over the set of fixed points of a countable family of Fejer operators, which act in infinite-dimensional Hilbert space. An outer approximations scheme for solving of variational inequalities with strongly monotone and Lipschitz-continuous operator is proposed based on well known Takahashi–Takeuchi–Kubota hybrid method of approximation the fixed point of nonexpansive operator. Strong convergence theorems are proved. In the analysis were not used concepts related with the weak topology (demiclosedness, Kadets–Klee property).
Keywords: variational inequality, monotone operator, Fejer operator, outer approximations method, strong convergence.

Резюме. В статье рассматривается вариационное неравенство на множестве неподвижных точек не более чем счетного семейства фейеровских операторов, действующих в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Отталкиваясь от известного гибридного метода поиска неподвижных точек нерастягивающего оператора, предлагается схема внешних аппроксимаций для решения вариационного неравенства с сильно монотонным и липшицевым оператором. Основной результат — теоремы сильной сходимости схемы внешних аппроксимаций.
Ключевые слова: вариационное неравенство, монотонный оператор, фейеровский оператор, метод внешних аппроксимаций, сильная сходимость.

1. Введение

Вариационные неравенства с монотонными операторами — один из центральных объектов изучения в прикладном нелинейном анализе [1]. Многие задачи исследования операций, математической экономики и математической физики могут быть записаны в форме вариационных неравенств, для численного решения которых к настоящему времени предложено и исследовано большое количество алгоритмов [2]–[15]. Среди последних большое значение имеют итерационные процессы, порожденные фейеровскими (квазинерастягивающими) и нерастягивающими операторами [16]– [25]. Эти операторы обладают очень важным свойством замкнутости относительно композиций определенного типа, что окрывает возможность естественной декомпозиции задач и сборки алгоритмов из некоторого семейства более простых процедур [16].

В статье рассматривается вариационное неравенство на множестве неподвижных точек не более чем счетного семейства фейеровских операторов, действующих в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Отталкиваясь от известного «гибридого метода» Takahashi–Takeuchi–Kubota [26]–[29] поиска неподвижных точек, мы предлагаем, так называемую, схему внешних аппроксимаций для решения рассматриваемой задачи с сильно монотонным и лишицевым оператором. Основной результат — теоремы сильной сходимости схемы внешних аппроксимаций. Предварительное сообщение было опубликовано в [30]. Заметим, что наш анализ совсем не использует понятий, связанных со слабой топологией (демизамкнутость, свойство Кадеца-Кли) (см. также [27]–[29]). Все необходимые сведения по нелинейному анализу изложены в книгах [16, 17].

2. Вариационное нервенство на множестве неподвижных точек

Пусть H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$.

Определение 1. Оператор $T : H \to H$ называют фейеровским (квазинерастягивающим), если

(1) $F(T) = \{x \in H : \ x = Tx\} \neq \emptyset$;
(2) $\|Tx - y\| \leq \|x - y\| \quad \forall x \in H \quad \forall y \in F(T)$.

Замечание 1. Для фейеровского оператора T множество неподвижных точек $F(T)$ замкнутое и выпуклое [16].

Замечание 2. Пусть $g : H \to \mathbb{R}$ — выпуклая дифференцируемая по Гато функция. Если множество $D = \{x \in H : \ g(x) \leq 0\}$ не пусто, то его можно трактовать как множество неподвижных точек квазинерастягивающего оператора

$$Tx = \begin{cases} x - \frac{g(x)}{\|\nabla g(x)\|^2} \nabla g(x), & \text{если} \quad x \notin D, \\ x, & \text{если} \quad x \in D, \end{cases}$$

где $\nabla g(x) \in H$ — производная g в точке $x \in H$ [16].

Для операторов $A : H \to H$ и множеств $M \subseteq H$ обозначим

$$VI(A, M) = \{x \in M : \ (Ax, y - x) \geq 0 \ \ \forall y \in M\} .$$

Рассмотрим абстрактную задачу:

$$\text{найти} \ \ x \in VI \left(A, \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \right) . \tag{1}$$

Будем предполагать выполненными следующие условия:

- $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — счетное множество фейеровских операторов, действующих в H;
- $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$;
- $A : H \to H$ — сильно монотонный и липшицевый оператор с константами $l > 0$, $L > 0$, соответственно.

Замечание 3. При $\lambda \in \big(0, 2\,l/L^2\big)$ оператор $I - \lambda A$ является сжимающим. Действительно,

$$\|(x - \lambda Ax) - (y - \lambda Ay)\|^2 = \|x - y\|^2 + \lambda^2 \|Ax - Ay\|^2 - \\ - 2\lambda(Ax - Ay, x - y) \leq (1 + \lambda^2 L^2 - 2l\lambda) \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in H,$$

и если $0 < \lambda < 2lL^{-2}$, то $0 < 1 + \lambda^2 L^2 - 2l\lambda < 1$.

Замечание 4. Решение вариационного неравенства (1) существует и единственно.

3. Метод внешних аппроксимаций

Для произвольной пары элементов $x, y \in H$ определим множество

$$H(x, y) = \{z \in H : \ \|z - y\| \leq \|z - x\|\} = \\ = \left\{z \in H : \ 2(x - y, z) \leq \|x\|^2 - \|y\|^2\right\} .$$

Множество $H(x, y)$ является замкнутым полупространством (совпадающим с H в случае $x = y$).

Для аппроксимации решения вариационного неравенства (1) предлагаем

Алгоритм 1. Строим последовательность (x_n) по схеме

$$\begin{cases} x_1 \in H, \ \ C_1 = H, \\ C_{n+1} = C_n \cap H(x_n, T_n x_n), \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} (I - \lambda_n A)\, x_n, \end{cases}$$

где $\lambda_n > 0$.

Замечание 5. Алгоритм 1 — обобщение «гибридного метода» аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов [26]. В работах [27, 31, 32] подобные схемы были использованы для поиска неподвижных точек многозначных фейеровских операторов, нулей максимальных монотонных операторов и решения задач равновесного программирования.

4. Сильная сходимость метода внешних аппроксимаций

Предположим, что $C_n \neq \emptyset$ и $F \subseteq C_n$. Имеем

$$\|T_n x_n - z\| \leq \|x_n - z\| \quad \forall z \in F \subseteq F(T_n).$$

Следовательно, $F \subseteq H(x_n, T_n x_n)$. Таким образом, $F \subseteq C_{n+1}$. Получили цепочку вложений

$$H = C_1 \supseteq ... \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq ... \supseteq F \neq \emptyset$$

и корректность определения последовательности (x_n).

Для доказательства основных результатов нам небходимы

Утверждение 1 ([17]). *Если C_n — замкнутые выпуклые подмножества гильбертова пространства H, $C_n \supseteq C_{n+1}$ и $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$, то*

$$P_{C_n} x \to P_C x \ \text{для всех}\ x \in H.$$

Определение 2. Семейство операторов $\{T_n : H \to H\}$ назовем *предельно замкнутым*, если

(1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$;
(2) для любой последовательности (x_n) имеем

$$\left.\begin{array}{c} x_n \to x, \\ x_n - T_n x_n \to 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n).$$

Замечание 6. Если $T_n \equiv T$ и оператор T замкнут, то семейство $\{T_n\}$ предельно замкнуто.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть $A : H \to H$ — сильно монотонный и липшицевый оператор с константами $l > 0$, $L > 0$, соответственно; $\{T_n : H \to H\}$ — счетное предельно замкнутое семейство фейеровских операторов. Предположим, что $\lambda_n \in \left[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right] \subseteq \left(0, 2\,l/L^2\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\lambda_n \to \lambda$. Тогда порожденная алгоритмом 1 последовательность (x_n) сильно сходится к единственному решению вариационного неравенства (1).*

Доказательство. Существует единственный элемент $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, такой, что

$$y = P_{\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n} (I - \lambda A)\, y.$$

Покажем, что $x_n \to y$ при $n \to \infty$. Рассмотрим вспомогательную последовательность элементов $y_n = P_{C_n} (I - \lambda A)\, y$. Известно, что $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Имеет место оценка

$$\|x_{n+1} - y_{n+1}\| \leq \|(I - \lambda_n A)\, x_n - (I - \lambda A)\, y\| \leq$$
$$\leq q\,\|x_n - y_n\| + q\,\|y_n - y\| + |\lambda_n - \lambda|\,\|A x_n\|,$$

где $q \in (0, 1)$. Предположим, что (x_n) не сходится к y. Тогда,

$$\limsup_{n \to \infty} \|x_n - y_n\| > 0.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = \limsup_{n\to\infty} \|x_{n+1} - y_{n+1}\| \le$$
$$\le q \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|,$$

что абсурдно. Таким образом, $\|x_n - y\| \to 0$.

Покажем, что y — решение вариационного неравенства (1). Поскольку $x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(I - \lambda_n A)\, x_n$, то

$$(x_{n+1} - x_n + \lambda_n A x_n, z - x_{n+1}) \ge 0 \quad \forall z \in C_{n+1}.$$

Принимая во внимание вложение $F \subseteq C_{n+1}$, получим,

$$(x_{n+1} - x_n + \lambda_n A x_n, z - x_{n+1}) \ge 0 \quad \forall z \in F \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Совершив предельный переход, имеем

$$(Ay, z - y) \ge 0 \quad \forall z \in F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n).$$

Осталось доказать включение $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$. Поскольку $x_{n+1} \in C_{n+1}$, то

$$\|T_n x_n - x_{n+1}\| \le \|x_n - x_{n+1}\|.$$

Откуда,

$$\|T_n x_n - x_n\| \le \|T_n x_n - x_{n+1}\| + \|x_n - x_{n+1}\| \le 2\|x_n - x_{n+1}\|.$$

Следовательно, $x_n - T_n x_n \to 0$. Учтя предельную замкнутость семейства операторов $\{T_n\}$, получим $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$. $\square$

5. Вариант метода внешних аппроксимаций

Рассмотрим еще один вариант метода внешних аппроксимаций для вариационного неравенства с не более чем счетным семейством операторов $\{T_n\}_{n\in\mathcal{I}}$:

$$\text{найти} \quad x \in VI\left(A, \bigcap_{i\in\mathcal{I}} F(T_i)\right), \tag{2}$$

где $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$.

Алгоритм 2. Строим последовательность (x_n) по схеме

$$\begin{cases} x_1 \in H, \ \ C_1 = H, \\ C_{n+1} = C_n \cap H(x_n, T_{p(n)} x_n), \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(I - \lambda_n A)\, x_n, \end{cases}$$

где $p : \mathbb{N} \to \mathcal{I}$, $\lambda_n > 0$.

Будем предполагать, что отображение $p : \mathbb{N} \to \mathcal{I}$ сюръективно и в случае счетного $\mathcal{I}$ «достаточно часто» принимает каждое свое значение. А именно, для произвольного индекса $i \in \mathcal{I}$ множество $p^{-1}(i) = \{k \in \mathbb{N} : p(k) = i\}$ бесконечно.

Замечание 7. Если $\mathcal{I} = \{1, 2, ..., N\}$, то можно положить $p(n) = (n-1) \bmod N + 1$ (циклическая стратегия).

Теорема 2. *Пусть $A : H \to H$ — сильно монотонный и липшицевый оператор с константами $l > 0$, $L > 0$, соответственно; $\{T_n : H \to H\}_{n\in\mathcal{I}}$ — не более чем счетное семейство замкнутых фейеровских операторов и $\bigcap_{n\in\mathcal{I}} F(T_n) \neq \emptyset$. Предположим, что $\lambda_n \in \left[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right] \subseteq \left(0, 2\,l/L^2\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\lambda_n \to \lambda$, для произвольного индекса $i \in \mathcal{I}$ множество $p^{-1}(i) = \{k \in \mathbb{N} : p(k) = i\}$ бесконечно. Тогда порожденная алгоритмом 2 последовательность (x_n) сильно сходится к единственному решению вариационного неравенства (2).*

Доказательство. Необходимо лишь доказать утверждение:

$$\left.\begin{array}{c} x_n \to x, \\ x_n - T_{p(n)}x_n \to 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} F(T_i).$$

Возьмем произвольный индекс $i \in \mathcal{I}$. Существует возрастающая последовательность (n_k), такая, что $p(n_k) = i$. Имеем,

$$x_{n_k} \to x, \quad x_{n_k} - T_{p(n_k)}x_{n_k} = x_{n_k} - T_i x_{n_k} \to 0.$$

Замкнутость оператора T_i влечет $x \in F(T_i)$. В силу произвольности $i \in \mathcal{I}$, получаем, что $x \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} F(T_i)$. □

6. Заключение

В работе рассматривалось вариационное неравенство на множестве неподвижных точек не более чем счетного семейства фейеровских (квазинерастягивающих) операторов, действующих в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Отталкиваясь от известного гибридого метода поиска неподвижных точек нерастягивающего оператора, была предложена схема внешних аппроксимаций для решения вариационного неравенства с сильно монотонным и липшицевым оператором. Основной результат — теоремы сильной сходимости схемы внешних аппроксимаций. Заметим, что наш анализ совсем не использовал понятий, связанных со слабой топологией (демизамкнутость, свойство Кадеца-Кли).

Литература

1. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — Москва: Мир, 1983. — 256 с.
2. Корпелевич Г. М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. — 1976. — Т. 12, №4. — С. 747–756.
3. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — Vol. 38. — P. 431–446.
4. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2001. — xi + 181 p.

5. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem. V.2. — New York: Springer, 2003. — xxxiii + 666 p.
6. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space // Journal of Optitmization Theory and Applications. — 2011. — 148. — P. 318–335.
7. Censor Y., Gibali A., Reich S. Strong convergence of subgradient extragradient methods for the variational inequality problem in Hilbert space // Optimization Methods and Software. — 2011. — Vol. 26. — P. 827–845.
8. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — Vol. 42, №4. — P. 13–18.
9. Маліцький Ю. В., Семенов В. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — №3(102). — С. 79–88.
10. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2011. — №3(106). — С. 27–32.
11. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — V. 47. — P. 631–639.
12. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — №2(108). — С. 53–58.
13. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Доповіді НАН України. — 2012. — №2. — С. 56–62.
14. Семенов В. В. Явный алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — №2(112). — С. 42–52.
15. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // Zgurovsky M. Z., Sadovnichiy V. A. (eds.) Continuous and Distributed Systems. — Heidelberg: Springer, 2014. — P. 131—146.
16. Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
17. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, 2011. — 408 + xvi p.
18. Nadezhkina N., Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings // SIAM J. Optim. — 2006. — Vol. 16. — P. 1230–1241.
19. Нурминский Е. А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, №12. — С. 2121–2128.
20. Апостол Р.Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — №1(107). — С. 3–14.

21. Семенов В. В. Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — №1(111). — С. 46–56.
22. Semenov V. V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — Vol. 46, №5. — P. 45–56.
23. Verlan D. A., Semenov V. V., Chabak L. M. A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2015. — Vol. 47, №7. — P. 31–46.
24. Denisov S. V., Semenov V. V., Chabak L. M. Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — Vol. 51. — P. 757–765.
25. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2015, Vol. 61, Iss. 1. — P. 193–202.
26. Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 341. — P. 276—286.
27. Семенов В. В. Сильно збіжний алгоритм пошуку нерухомої точки багатозначного фейєрівського оператора // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — №4(103). — С. 89–93.
28. Bauschke H. H., Chen J., Wang X. A projection method for approximating fixed points of quasi nonexpansive mappings without the usual demiclosedness condition, http://arxiv.org/abs/1211.1639.
29. Семенов В. В. Об одной принципиальной схеме вычисления обобщенной проекции // Доповіді НАН України. — 2013. — №6. — С. 41–46.
30. Малицкий Ю. В., Семенов В. В. Схема внешних аппроксимаций для вариационных неравенств на множестве неподвижных точек фейеровских операторов // Доповіді НАН України. — 2013. — №7. — С. 47–52.
31. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2011. — №1(104). — С. 10–23.
32. Semenov V. V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — Vol. 50. — P. 741–749.

Поступила 09.10.2015