Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2017, № 2 (125) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.85
MSC 47J20, 49J40, 65K15, 90C25

FINITE CONVERGENCE OF TWO-STAGE ALGORITHMS FOR SOLVING VARIATIONAL INEQUALITIES

L. M. Chabak[1], Ya. I. Vedel[2], V. V. Dudar[2], V. V. Semenov[2]

[1]Faculty of Management and Technology, Infrastructure and Technology State University, Kiev, Ukraine, E-mail: chabaklm@ukr.net
[2]Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko Kiev National University, Kiev, Ukraine,
E-mail: yana.vedel@gmail.com, slavko123@ukr.net, volodya.semenov@gmail.com

КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ В ДВУХЭТАПНЫХ АЛГОРИТМАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Л. М. Чабак[1], Я. И. Ведель[2], В. В. Дударь[2], В. В. Семёнов[2]

[1]Факультет управления и технологий, Государственный институт инфраструктуры и технологий, Киев, Украина, E-mail: chabaklm@ukr.net
[2]Факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
E-mail: yana.vedel@gmail.com, slavko123@ukr.net, volodya.semenov@gmail.com

Abstract. The two-stage L. D. Popov algorithm is considered. This algorithm is used for solving variational inequalities with monotone operators and related problems. In this article we proved the convergence of the algorithm in a finite number of iterations when the condition of sharpness is fulfilled.
Keywords: variational inequality, monotone operator, sharpness, two-stage algorithm, finite convergence.

Резюме. Рассмотрен двухэтапный алгоритм Л. Д. Попова. Этот метод используется для решения вариационных неравенств с монотонными операторами и близких задач. В работе доказана сходимость алгоритма к решению за конечное число итераций при выполнении условия остроты.
Ключевые слова: вариационное неравенство, монотонный оператор, условие остроты, двухэтапный алгоритм, конечная сходимость.

1. Введение

Решение вариационных неравенств является активно развивающимся направлением прикладного анализа. Многие задачи, связанные с математической экономикой, математической физикой и наукой о данных, могут быть записаны в форме вариационных неравенств, для численного решения которых к настоящему времени предложено большое количество методов, в частности, алгоритмов проекционного типа (использующих операцию метрического проектирования на допустимое множество) [1–11]. В большинстве работ доказывается слабая или сильная сходимость к решению, но при дополнительных условиях остроты (sharpness condition) удается показать сходимость некоторых алгоритмов к решению за конечное число итераций [1, 7, 12–20].

В данной статье исследуется сходимость к решению за конечное число итераций двухэтапного алгоритма Л. Д. Попова [2, 21, 22].

Пусть H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Для $C \subseteq H$ и $A : C \to H$ рассмотрим вариационное неравенство

$$\text{найти } x \in C : \ (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Множество решений задачи (1) обозначим через S и предположим, что выполнены следующие условия:

- C — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства H;
- оператор $A : C \to H$ монотонный и липшицевый (с постоянной $L > 0$) на множестве C;
- $S \neq \emptyset$.

Заметим, что множество S выпуклое и замкнутое.

Будем рассматривать вариационное неравенство (1), удовлетворяющее условию остроты [1]

$$\exists \alpha > 0 : \ (Ax, x - P_S x) \geq \alpha \|x - P_S x\| \quad \forall x \in C, \tag{2}$$

где P_S — оператор метрического проектирования на S.

Для задач выпуклого программирования

$$f \to \min_C \tag{3}$$

в работах [12–14, 23] рассматривалось следующее понятие остроты минимума. Множество решений задачи минимизации является множеством острых минимумов, если выполняется неравенство

$$\exists \alpha > 0 : \ f(x) - f(P_S x) \geq \alpha \|x - P_S x\| \quad \forall x \in C, \tag{4}$$

где S — множество решений исходной задачи (3). В [14] доказана сходимость к решению (3) за конечное число итераций проксимального метода и метода проекции градиента. В гладком случае из (4) следует (2) для равносильного (3) вариационного неравенства

$$\text{найти } x \in C : \ (\nabla f(x), y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Действительно, имеет место неравенство

$$f(x) - f(P_S x) \leq (\nabla f(x), x - P_S x) \quad \forall x \in C.$$

Откуда непосредственно следует желаемая импликация.

Конечная сходимость проксимального алгоритма для вариационных неравенств при выполнении условия остроты доказана в [18, 20]. Аналогичные результаты получены для экстраградиентного метода [16] и двухшагового экстраградиентного метода [7].

Замечание 1. Для разрешимой задачи линейного программирования

$$\begin{cases} (c,x) \to \min, \\ Dx \geq b, \\ x \geq 0, \end{cases} \tag{5}$$

где c, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, D — матрица размерности $m \times n$, всегда выполняется условие острого минимума [12–14, 23]. Следовательно, для вариационных неравенств

$$\text{найти } \bar{x} \geq 0,\ \bar{y} \geq 0 : \ (c - D^*\bar{y}, x - \bar{x}) + (D\bar{x} - b, y - \bar{y}) \geq 0 \quad \forall x \geq 0\ \forall y \geq 0$$

с билинейными отображениями

$$A : \mathbb{R}^{n+m} \ni (x,y) \to (c - D^*y, Dx - b) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

соответствующими паре двойственных задач линейного программирования[1]

$$\begin{cases} (c,x) \to \min, \\ Dx \geq b, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (b,y) \to \max, \\ D^*y \leq c, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

всегда будет выполняться условие остроты (2).

Далее в разделе 2 описывается двухэтапный алгоритм Л. Д. Попова [2, 21, 22] и приводится несколько важных вспомогательных результатов, а в разделе 3 доказывается теорема о сходимости алгоритма к решению за конечное число итераций при выполнении условия остроты [1].

2. Двухэтапный алгоритм и вспомогательные факты

Среди методов решения вариационных неравенств хорошо известен

Алгоритм 1. Двухэтапный алгоритм Л. Д. Попова.

Инициализация. Задаем параметр $\lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{2}-1}{L}\right)$ и элементы x_0, $y_0 \in C$.
Итерационный шаг. Вычисляем

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda A y_n\right), \\ y_{n+1} = P_C\left(x_{n+1} - \lambda A y_n\right). \end{cases}$$

Замечание 2. Данный алгоритм предложен Л. Д. Поповым [2], усовершенствован и детально изучен в работах [21, 22, 24–30]. Например, недавно Ю. В. Малицкий и В. В. Семенов [21, 22] предложили модифицированный

[1] Решение пары двойственных задач сводится к отысканию на множестве $\mathbb{R}^{n+m}_+$ седловых точек лагранжиана $L(x,y) = (c,x) + (y, b - Dx)$. А уже седловую задачу можно сформулировать как вариационное неравенство.

вариант алгоритма 1 с одним метрическим проектированием на допустимое множество C

$$\begin{cases} T_n = \{z \in H : \, (x_n - \lambda A y_{n-1} - y_n, z - y_n) \le 0\} \, , \\ x_{n+1} = P_{T_n} \left(x_n - \lambda A y_n \right) , \\ y_{n+1} = P_C \left(x_{n+1} - \lambda A y_n \right) , \end{cases}$$

где $\lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{2}-1}{L}\right)$.

Для задачи линейного программирования (5) алгоритм 1 принимает вид

Алгоритм 2. Вариант для задачи линейного программирования.

Инициализация. Задаем параметр $\lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{2}-1}{\|D\|}\right)$ и элементы $x_0 \ge 0$, $\bar{x}_0 \ge 0$, $y_0 \ge 0$, $\bar{y}_0 \ge 0$.
Итерационный шаг. Вычисляем

$$\begin{cases} x_{n+1} = \left[x_n - \lambda(c - D^* \bar{y}_n)\right]_+ , \\ y_{n+1} = \left[y_n - \lambda(D\bar{x}_n - b)\right]_+ , \\ \bar{x}_{n+1} = \left[x_{n+1} - \lambda(c - D^* \bar{y}_n)\right]_+ , \\ \bar{y}_{n+1} = \left[y_{n+1} - \lambda(D\bar{x}_n - b)\right]_+ , \end{cases}$$

где $[x]_+$ — положительная часть вектора x.

Приведем два важных результата относительно поведения порожденных алгоритмом 1 последовательностей.

Имеет место

Лемма 1 (Ю. В. Малицкий, [21])**.** *Для $z \in S$ и порожденных алгоритмом 1 последовательностей (x_n), (y_n) выполняется неравенство*

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 - \left(1 - \left(1 + \sqrt{2}\right) \lambda L\right) \|x_n - y_n\|^2 - \\ - \left(1 - \sqrt{2}\lambda L\right) \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \lambda L \|x_n - y_{n-1}\|^2 . \quad (6)$$

Доказательство. Имеем

$$\|x_{n+1} - z\|^2 = \|P_C \left(x_n - \lambda A y_n\right) - z\|^2 \le \\ \le \|x_n - \lambda A y_n - z\|^2 - \|x_n - \lambda A y_n - x_{n+1}\|^2 = \\ = \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - x_n\|^2 - 2\lambda \left(A y_n, x_{n+1} - z\right) . \quad (7)$$

К правой части (7) добавим

$$2\lambda \left(A y_n, y_n - z\right) \ge 0.$$

Получим

$$\|x_{n+1}-z\|^2 \le \|x_n-z\|^2 - \|x_{n+1}-x_n\|^2 - \\ - 2\lambda\left(Ay_n, x_{n+1}-y_n\right) = \|x_n-z\|^2 - \|y_n-x_n\|^2 - \\ - \|x_{n+1}-y_n\|^2 - 2(x_n-y_n, y_n-x_{n+1}) - \\ - 2\lambda\left(Ay_n, x_{n+1}-y_n\right) = \|x_n-z\|^2 - \|y_n-x_n\|^2 - \\ - \|x_{n+1}-y_n\|^2 + 2\lambda\left(Ay_{n-1}-Ay_n, x_{n+1}-y_n\right) + \\ + 2\left(x_n-\lambda Ay_{n-1}-y_n, x_{n+1}-y_n\right). \quad (8)$$

Оценим четвертое и пятое слагаемые в правой части (8). Начнем с пятого. Поскольку $x_{n+1} \in C$, то

$$\left(x_n-\lambda Ay_{n-1}-y_n, x_{n+1}-y_n\right) \le 0. \quad (9)$$

Перейдем к оценке $2\lambda\left(Ay_{n-1}-Ay_n, x_{n+1}-y_n\right)$. Имеем[2]

$$2\lambda\left(Ay_{n-1}-Ay_n, x_{n+1}-y_n\right) \le 2\lambda L\|y_{n-1}-y_n\|\|x_{n+1}-y_n\| \le \\ \le \lambda L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\|y_{n-1}-y_n\|^2 + \sqrt{2}\|x_{n+1}-y_n\|^2\right) \le \\ \le \frac{\lambda L}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\|y_{n-1}-x_n\|^2 + (2+\sqrt{2})\|x_n-y_n\|^2\right) + \sqrt{2}\lambda L\|x_{n+1}-y_n\|^2 = \\ = \left(1+\sqrt{2}\right)\lambda L\|y_n-x_n\|^2 + \lambda L\|x_n-y_{n-1}\|^2 + \\ + \sqrt{2}\lambda L\|x_{n+1}-y_n\|^2. \quad (10)$$

Используя (9), (10) в (8), получаем неравенство

$$\|x_{n+1}-z\|^2 \le \|x_n-z\|^2 - \left(1-\left(1+\sqrt{2}\right)\lambda L\right)\|x_n-y_n\|^2 - \\ - \left(1-\sqrt{2}\lambda L\right)\|x_{n+1}-y_n\|^2 + \lambda L\|x_n-y_{n-1}\|^2,$$

чем и завершаем доказательство. □

Из леммы 1 можно извлечь следующий факт об асимптотическом поведении последовательностей (x_n), (y_n).

Лемма 2. *Для порожденных алгоритмом 1 последовательностей* (x_n), (y_n) *имеет место*

$$\|x_{n+1}-x_n\| \to 0, \;\; \|x_{n+1}-y_n\| \to 0. \quad (11)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для последовательностей неотрицательных чисел (a_n), (b_n), удовлетворяющих неравенству

$$a_{n+1} \le a_n - b_n,$$

имеет место сходимость (a_n) и равенство $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

[2]Дважды используем элементарное неравенство $2ab \le \frac{1}{\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$ $(\varepsilon > 0)$.

Положим

$$a_n = \|x_n - z\|^2 + \lambda L \|x_n - y_{n-1}\|^2,$$
$$b_n = \left(1 - \left(1 + \sqrt{2}\right) \lambda L\right) \left(\|x_{n+1} - y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2\right).$$

Тогда неравенство (6) можно записать в форме $a_{n+1} \le a_n - b_n$. Следовательно, последовательность (a_n) имеет предел и

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - y_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Из неравенства

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \|x_{n+1} - y_n\| + \|y_n - x_n\|$$

получаем

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0,$$

чем и завершаем доказательство. □

Из лемм 1 и 2 следует слабая сходимость алгоритма 1 [21, 22]. Далее перейдем основному результату работы — теореме о поведении алгоритма 1 при выполнении условия остроты (2).

3. Теорема о конечной сходимости

При выполнении условия остроты (2) для вариационного неравенства (1) справедлива

Теорема 1. *Пусть C — непустое выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства H, $A : C \to H$ — монотонный и L-липшицевый оператор, $S \ne \emptyset$. Предположим, что выполнено условие остроты* (2). *Тогда последовательность (x_n), генерируемая алгоритмом 1, сходится к некоторому решению вариационного неравенства (1) за конечное число итераций, т.е. существует номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $x_n \in S$.*

Доказательство. Равенство

$$x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda A y_n\right)$$

равносильно неравенству

$$(x_{n+1} - x_n + \lambda A y_n, y - x_{n+1}) \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

Имеем

$$(x_{n+1} - x_n + \lambda A x_{n+1} - \lambda\left(A x_{n+1} - A y_n\right), y - x_{n+1}) \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned}(A x_{n+1}, x_{n+1} - y) &\le \frac{(x_{n+1} - x_n, y - x_{n+1})}{\lambda} + (A y_n - A x_{n+1}, y - x_{n+1}) \le \\ &\le \frac{\|x_{n+1} - x_n\|\|y - x_{n+1}\|}{\lambda} + \|A y_n - A x_{n+1}\|\|y - x_{n+1}\| \le \\ &\le \frac{\|x_{n+1} - x_n\|\|y - x_{n+1}\|}{\lambda} + L\|y_n - x_{n+1}\|\|y - x_{n+1}\|. \qquad (12)\end{aligned}$$

Предположим, что существует подпоследовательность (x_{n_k}) такая, что

$$x_{n_k} \notin S \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $p_{n_k} = P_S x_{n_k}$. Имеем

$$(Ax_{n_k}, x_{n_k} - p_{n_k}) \geq \alpha \|x_{n_k} - p_{n_k}\|. \tag{13}$$

Используя (13) в (12), получаем

$$\alpha \|x_{n_k} - p_{n_k}\| \leq \frac{\|x_{n_k} - x_{n_k - 1}\| \|p_{n_k} - x_{n_k}\|}{\lambda} + L\|y_{n_k - 1} - x_{n_k}\| \|p_{n_k} - x_{n_k}\|.$$

Откуда

$$\alpha \leq \frac{\|x_{n_k} - x_{n_k - 1}\|}{\lambda} + L\|y_{n_k - 1} - x_{n_k}\| = o(1),$$

что противоречит условию $\alpha > 0$. Таким образом, $x_n \in S$ для всех достаточно больших номеров n. $\square$

Замечание 3. Аналогичный результат имеет место для двухэтапных алгоритмов [21, 22]

$$\begin{cases} y_n = 2x_n - x_{n-1}, \\ x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda A y_n\right) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} T_n = \left\{ z \in H : \ (x_n - \lambda A y_{n-1} - y_n, z - y_n) \leq 0 \right\}, \\ x_{n+1} = P_{T_n}\left(x_n - \lambda A y_n\right), \\ y_{n+1} = P_C\left(x_{n+1} - \lambda A y_n\right), \end{cases}$$

где $\lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{2}-1}{L}\right)$, $L > 0$ — постоянная Липшица оператора A.

Замечание 4. Аналогичный результат имеет место и для двухэтапного проксимального алгоритма решения задачи о равновесии [25, 26]

$$\begin{cases} x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_n, \cdot)} x_n, \\ y_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_n, \cdot)} x_{n+1}. \end{cases}$$

Условие остроты для задачи о равновесии

$$\text{найти } x \in C : \ F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C$$

естественно сформулировать в виде

$$\exists \alpha > 0 : \ F(x, P_S x) \leq -\alpha \left\| x - P_S x \right\| \quad \forall x \in C.$$

4. Заключение

В работе рассмотрен известный двухэтапный алгоритм Л. Д. Попова. Этот метод используется для решения вариационных неравенств с монотонными операторами и близких задач, например, седловых [2,21,22,25–29]. Доказано, что при выполнении условия остроты [1] за конечное число итераций генерируемая алгоритмом последовательность достигнет множества решений вариационного неравенства.

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № F74/24921) и Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U004777).

Литература

1. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2001. — xi + 181 p.
2. Попов Л. Д. Модификация метода Эрроу-Гурвица поиска седловых точек // Математические заметки. — 1980. — Т. 28, №5. — С. 777–784.
3. Семенов В. В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №2 (101). — С. 120–128.
4. Войтова Т. А., Семенов В. В. Метод решения двухэтапных операторных включений // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3 (102). — С. 34–39.
5. Семенов В. В. Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №1 (111). — С. 46–56.
6. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — Vol. 47. — P. 631–639.
7. Зыкина А. В., Меленьчук Н. В. Конечное число итераций в двухшаговом экстраградиентном методе // Изв. вузов. Матем. — 2014. — №9. — С. 75–79.
8. Semenov V. V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — Vol. 50. — P. 741–749.
9. Semenov V. V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — Vol. 46, №5. — P. 45–56.
10. Denisov S. V., Semenov V. V., Chabak L. M. Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — Vol. 51. — P. 757–765.
11. Verlan D. A., Semenov V. V., Chabak L. M. A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2015. — Vol. 47, №7. — P. 31–46.
12. Ferris M. C. Finite convergence of the proximal point algorithm // Math. Programming. — 1991. — Vol. 50. — P. 359–366.
13. Burke J. V., Ferris M. C. Weak sharp minima in mathematical programming // SIAM J. Control Optim. — 1993. — Vol. 31. — P. 1993.
14. Антипин А. С. О конечной сходимости процессов к острому минимуму и гладкому минимуму с острой производной // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30, №11. — С. 1843–1854.
15. Marcotte P., Zhu D. L. Weak sharp solutions of variational inequalities // SIAM J. Optim. — 1999. — Vol. 9. — P. 179–189.
16. Xiu N. H., Zhang J. Z. Local convergence analysis of projection-type algorithms: a unified approach // J. Optim. Theory Appl. — 2002. — Vol. 115. — P. 211–230.
17. Wu Z. L., Wu S. Y. Weak sharp solutions of variational inequalities in Hilbert spaces // SIAM J. Optim. — 2004. — Vol. 14. — P. 1011–1027.
18. Xiu N., Zhang J. On finite convergence of proximal point algorithms for variational inequalities // J. Math. Anal. Appl. — 2005. — Vol. 312. — P. 148–158.
19. Zhou J., Wang C. A note on finite termination of iterative algorithms in mathematical programming // Oper. Res. Lett. — 2008. — Vol. 36. — P. 715–717.

20. Matsushita S., Xu L. Finite Convergence of the Proximal Point Algorithm for Variational Inequality Problems // Set-Valued Variational Analysis. — 2013. — Vol. 21. — P. 297–309.
21. Маліцький Ю. В. Ефективні проективні методи для варіаційних нерівностей та задач структурної оптимізації. Автореферат дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. — Київ, 2015. — 20 с.
22. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — Vol. 50. — P. 271–277.
23. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. — Москва: Наука, 1983. — 384 с.
24. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2015. — Vol. 61. — P. 193–202.
25. Ведель Я. И., Семенов В. В. Новый двухэтапный проксимальный алгоритм для решения задачи о равновесии // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2015. — №1 (118). — С. 15–23.
26. Lyashko S. I., Semenov V. V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming // In: Goldengorin, B. (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115, Springer, Cham, 2016. — P. 315–325.
27. Вартузова М. В., Семенов В. В., Чабак Л. М. Новый алгоритм с расстоянием Брэгмана для решения задачи о равновесии // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2016. — №3 (123). — С. 9–21.
28. Semenov V. V. A Version of the Mirror descent Method to Solve Variational Inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2017. — Vol. 53. — P. 234–243.
29. Semenov V. V. A variant of mirror descent method for solving variational inequalities // In: Polyakova, L. N. (ed.) 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA) doi: 10.1109/CNSA.2017.7974011
30. Van Hieu D. Convergence analysis of a new algorithm for strongly pseudomonotone equilibrium problems // Numer. Algor. — 2017. — doi: 10.1007/s11075-017-0350-9

Поступила 9.09.2017