Журнал обчислювальної та прикладної математики 2018, № 1 (127) Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.7
MSC 60H10

DOUBLE MERGING OF PHASE SPACE FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMALL STOCHASTIC ADDITIONS IN THE CONDITIONS OF POISSON APPROXIMATION

Anatolii Nikitin
Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: nikitin2505@gmail.com

ПОДВІЙНЕ УКРУПНЕННЯ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ У СХЕМІ ПУАССОНОВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

А. В. Нікітін
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: nikitin2505@gmail.com

Abstract. In this paper, the double merging of the phase space of states for a stochastic evolutionary system with impulse perturbation under Poisson approximation scheme.
Keywords: stochastic evolution equation, Poisson approximation, Markov process.

Анотація. У роботі проведено подвійне укрупнення фазового простору станів для стохастичної еволюційної системи з імпульсним збуренням у схемі пуассонової апроксимації.
Ключові слова: стохастичне еволюційне рівняння, пуассонова апроксимація, марковський процес.

Вступ

Актуальною проблемою сучасної теорії систем є розвиток математично обґрунтованих методів побудови спрощених моделей, аналіз яких не викликає значних труднощів, в яких характеристики можуть бути прийняті за відповідні характеристики реальних моделей.

Ідеї вивчення властивостей складних систем на основі дослідження властивостей їх частин з подальшим переходом до загальної системи є основою багатьох методів системного аналізу. Вперше алгоритм фазового укрупнення станів системи запропонували і описали у роботі [1] В. С. Королюк та А. Ф. Турбін. Аналіз укрупненої системи значно спрощується, але, разом з тим, при вдалому розщепленні фазового простору основні характеристики спрощеної системи можуть досить точно відображати відповідні характеристики вихідної. У свою чергу, близькість реальної і укрупненої систем означає і близькість глобальних характеристик, що визначаються на зростаючих інтервалах часу. Важливою властивістю алгоритмів фазового укрупнення є можливість побудови ієрархії укрупнених систем Випадкова еволюція у вигляді диференціального рівняння зі стохастичними доданками використовується для опису широкого класу природних процесів у багатьох галузях науки. Виключно важливим випадком є дослідження поведінки подібних еволюційних систем у випадковому середовищі. Вивченню таких систем присвячено велику кількість робіт видатних вчених, серед них А. В. Скороход, М. Й. Гіхман, М. М. Боголюбов та інші. Детальну бібліографію з цієї проблематики можна знайти, наприклад, у монографіях В. С. Королюка [2, 3]. Особливу увагу варто звернути на роботи [4–7], у яких започатковано підходи, використані у даній статті, зокрема і до дослідження стійкості еволюційної системи з дифузійним збуренням.

Дану працю присвячено випадку, коли збурення системи визначаються імпульсним процесом у схемі пуассонової апроксимації. У роботі проведено подвійне фазове укрупнення простору станів таких еволюційних моделей.

1. Постановка задачі

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon(t), x^{t/\varepsilon^3})dt + d\eta^\varepsilon(t),\ u^\varepsilon(t) \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

яке визначає еволюційну систему в ергодичному марковському середовищі. Марковський процес $x^\varepsilon(t), t \geq 0$ є визначеним на стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$ з розщепленням

$$E = \bigcup_{k=1}^{N} E_k,\ E_k \cap E_{k'} = \emptyset,\ k \neq k'$$

у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.

Марковське ядро має вигляд

$$Q^\varepsilon(x, B, t) = P^\varepsilon(x, B)[1 - \exp\{-q(x)t\}],\ x \in E,\ B \in \mathcal{E},\ t \geq 0.$$

Нехай також виконуються умови:

ME1: Ядро, що описує перехідні імовірності вкладеного ланцюга Маркова $x_n^\varepsilon, n \geq 0$ має наступне представлення

$$P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B).$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ на розщепленому фазовому просторі визначається так

$$P(x, E_k) = 1_k(x) = \begin{cases} 1,\ x \in E_k, \\ 0,\ x \notin E_k. \end{cases}$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначає супроводжуючий ланцюг Маркова x_n, $n \geq 0$ на класах E_k, $1 \leq k \leq N$. Крім того, збурююче ядро $P_1(x, B)$ задовольняє умові

$$P_1(x, E) = 0,$$

що є прямим наслідком рівності

$$P^\varepsilon(x, E) = P(x, E) = 1.$$

ME2: Асоційований марковський процес $x^0(t)$, $t \geq 0$, заданий генератором

$$Q\varphi(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

є рівномірно ергодичним на кожному з класів E_k, $1 \leq k \leq N$, зі стаціонарними розподілами $\pi_k(dx)$, $1 \leq k \leq N$, які задовольняють співвідношенню

$$\pi_k(dx)q(x) = q_k\rho_k(dx),\ q_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)q(x).$$

ME3: Усереднені імовірності виходу

$$\hat{p}_k := q(x) \int_{E_k} \rho_k(dx)P_1(x, E/E_k) > 0,\ 1 \leq k \leq N.$$

Отже, збурююче ядро $P_1(x, B)$ визначає перехідні імовірності між класами E_k, $1 \leq k \leq N$. Рівність

$$P^\varepsilon(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B)$$

означає, що вкладений ланцюг Маркова x_n^ε, $n \geq 0$ проводить великий проміжок часу в кожному з класів E_k та перестрибує між класами з малими ймовірностями $\varepsilon P_1(x, E/E_k)$.

За умов ME1–ME3 має місце слабка збіжність [3]

$$\nu(x^\varepsilon(t)) \Rightarrow \hat{x}(t),\ \varepsilon \to 0,\ \nu(x) = k \in \hat{E} = \{1, ..., N\},\ x \in E_k,\ 1 \leq k \leq N.$$

Граничний марковський процес $\hat{x}(t)$, $t \geq 0$ на укрупненому фазовому просторі $\hat{E} = \{1, ..., N\}$ визначається генеруючою матрицею

$$\hat{Q}_1 = (\hat{q}_{kr},\ 1 \leq k, r \leq N),$$

де

$$\hat{q}_{kr} = \hat{q}_k\hat{p}_{kr},\ k \neq r,\ \hat{q}_k = q_k\hat{p}_k,\ 1 \leq k \leq N,$$

$$\hat{p}_{kr} = p_{kr}/\hat{p}_k,\ p_{kr} = \int_{E_k} \rho_k(dx)P_1(x, E_r),\ 1 \leq k, r \leq N,\ k \neq r,$$

$$\hat{p}_k = -\int_{E_k} \rho_k(dx)P_1(x, E_k).$$

ME4: Укрупнений марковський процес $\hat{x}(t)$, $t \geq 0$ є ергодичним зі стаціонарним розподілом $\hat{\pi} = (\pi_k,\ k \in \hat{E})$.

Отже, оператор Q^ε можна подати у вигляді

$$Q^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1,\ Q_1(x) = q(x) \int_E P_1(x, dy)\varphi(y).$$

Узагальнення такого підходу можна знайти у [8], де оператор $Q^\varepsilon = Q + \varepsilon Q_1$

$$Q(x) = q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],\ Q_1(x) = q_1(x) \int_E P_1(x, dy)\varphi(y).$$

Нехай Π — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора Q. Його дія на тест-функції визначається так

$$\Pi\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \hat{\varphi}_k 1_k(x),\ \hat{\varphi}_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)\varphi(dx).$$

Зведений оператор $\hat{Q}_1$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\hat{Q}_1\Pi = \Pi Q_1 \Pi.$$

Нехай $\hat{\Pi}$ — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора $\hat{Q}_1$

$$\hat{\Pi}\hat{\varphi} := q(x)\sum_{k\in E} \hat{\pi}_k \hat{\varphi}_k.$$

Потенціальна матриця $\hat{R}_0 = [\hat{R}^0_{kj};\ 1 \le k, l \le N]$ визначається співвідношеннями

$$\hat{Q}_1\hat{R}_0 = \hat{R}_0\hat{Q}_1 = \hat{\Pi} - E.$$

2. Імпульсний процес збурень

Імпульсний процес збурень $\eta^\varepsilon(t)$, $t \ge 0$ у схемі пуассонової апроксимації задається співвідношенням

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds, x(s/\varepsilon^2)), \tag{2}$$

де сукупність процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t,x)$, $t \ge 0$, $x \in X$ визначається генераторами

$$\Gamma^\epsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int_R (\varphi(w+v) - \varphi(w))\Gamma^\varepsilon(dv, x),\ x \in X \tag{3}$$

та задовольняє умовам пуассонової апроксимації
P1. Апроксимація середніх

$$\int_R v\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon(a(x) + \theta_a(x)),\ \theta_a(x) \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

та

$$\int_R v^2\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon(b(x) + \theta_b(x)),\ \theta_b(x) \to 0,\ \varepsilon \to 0;$$

P2. Умова на функцію розподілу

$$\int_R g(v)\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon^2(\Gamma_g(x) + \theta_g(x)),\ \theta_g(x) \to 0,\ \varepsilon \to 0;$$

для всіх $g(v) \in C^2(\mathbb{R})$. Тут міра $\Gamma_g(x)$ обмежена для всіх $g(v) \in C^2(\mathbb{R})$ і визначається співвідношенням

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(v)\Gamma_0(dv, x),\ \ g(v) \in C^3(\mathbb{R});$$

P3. Рівномірна квадратична інтегровність

$$\sup \lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\Gamma_0(dv, x) = 0;$$

P4. Відсутність дифузійної складової

$$b(x) = \int_R v^2\Gamma_0(dv, x).$$

Введемо позначення:

$$\Gamma_1(x)\varphi(w) = a(x)\varphi'(w) + \int_R [\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w)]\Gamma_0(dv, x).$$

Розглянемо асимптотичні властивості процесу збурення.

Теорема 1. *При виконанні умов P1–P4 для імпульсного процесу збурень має місце слабка збіжність у розумінні збіжності відповідних генераторів*

$$\eta^\varepsilon(t) \to \eta^0(t),\ \ \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\eta^0(t)$ визначається генератором

$$\hat{\hat{\Gamma}}\varphi(w) = \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = \hat{\hat{a}}\varphi'(w) + \int_R [\varphi(w+v) - \varphi(w)]\hat{\hat{\Gamma}}_0(dv),$$

де

$$\hat{\hat{a}} = \sum_{k\in\hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{E_k} \pi(dx)(a(x)),$$

$$\hat{\hat{\Gamma}}_0(v) = \sum_{k\in\hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{\hat{E}_k} \pi(dx)\Gamma_0(v, x),$$

і є процесом з незалежними приростами, який має детермінований зсув та пуассонову стрибкову частину.

Перед безпосереднім доведенням теореми 1 встановимо деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Генератори процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in X$, на тест-функціях $\varphi(w) \in C^2(\mathbf{R})$ при виконанні умов пуассонової апроксимації P1–P4 допускають асимптотичне представлення*

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \Gamma_1(x)\varphi(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{4}$$

де

$$\Gamma_1(x)\varphi(w) = a(x)\varphi'(w) + \int\limits_R [\varphi(w+v) - \varphi(w) - v\varphi'(w)]\Gamma_0(dv, x),$$

а залишковий член $\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w)\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\varphi(w,\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$.

Доведення. Використовуючи розклад функції $\varphi(w)$ у ряд Тейлора, проведемо перетворення генератора (3)

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1} \int\limits_R (\varphi(w+v) - \varphi(v))\Gamma^\varepsilon(dv, x) =$$

$$= \varepsilon^{-1} \int\limits_R (\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w))\Gamma^\varepsilon(dv, x) +$$

$$+\varepsilon^{-1} \int\limits_R (v\varphi'(w)\Gamma^\varepsilon(dv, x) + \frac{1}{2}v^2\varepsilon^{-1} \int\limits_R v^2\varphi''(w)\Gamma^\varepsilon(dv, x) =$$

$$= \int\limits_R (\varphi(u+v) - \varphi(w) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w))\Gamma_0(dv, x) +$$

$$+a(x)\varphi'(w) + +\frac{1}{2}b(x)\varphi''(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) =$$

$$= \int\limits_R (\varphi(w+v) - \varphi(w) - v\varphi'(w))\Gamma_0(dv, x) + a(x)\varphi'(w) + \gamma^\varepsilon(w)\varphi(w),$$

де передостання рівність випливає з умов P1–P3 (зауважимо, що функція $\varphi(w+v) - \varphi(w) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w) \in C^2(\mathbf{R})$, оскільки вона обмежена на підставі обмеженості $\varphi(w)$ разом з її похідними і

$$[\varphi(w+v) - \varphi(w) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w)]/|v|^2 \to 0$$

при $|v| \to 0$).

Врахувавши, що $\gamma^\varepsilon(w)\varphi(w) = O(\varepsilon^2)$, $\varphi(w) \in C^2(\mathbf{R})$, отримаємо представлення (4). Лему 1 доведено. □

Лема 2. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $(\eta^\varepsilon, x(t/\varepsilon^2))$, $t \geq 0$ *має вигляд*

$$\hat{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w, x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w, x) + \Gamma_1(x)\varphi(w, x) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w, x), \qquad (5)$$

де оператор $\Gamma_1(x)$ *визначено у лемі 1, а залишковий член* $\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w, x)\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\varphi(w,\cdot) \in C^2(\mathbf{R})$.

Доведення. Твердження леми стає очевидним, якщо використати означення генератора марковського процесу та вигляд відповідних генераторів процесів $\eta^\varepsilon(t, x)$ і $x(t/\varepsilon^2)$. □

Зрізаний оператор має структуру

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(w, u, x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}^\varepsilon\varphi(u, w, x) + \Gamma_1(x)\varphi(u, w, x). \qquad (6)$$

Лема 3. *Розв'язок задачі сингулярного збурення для зрізаного оператора (6) на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(u,w,x) = \varphi(u,w) + \varepsilon\varphi_1(u,w,x) + \varepsilon^2\varphi_2(u,w,x)$$

реалізується співвідношенням

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u,x) = \hat{\hat{L}}\varphi(u) + \varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(u), \tag{7}$$

де залишковий член рівномірно обмежений по x.

Граничний оператор визначається формулою

$$\hat{\hat{L}} = \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1\hat{\Pi}. \tag{8}$$

Доведення. Обчислимо

$$(\varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}Q_1 + \Gamma_1)(\varphi + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2) =$$
$$= \varepsilon^{-2}Q\varphi + \varepsilon^{-1}(Q\varphi_1 + Q_1\varphi) + (Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + \Gamma_1\varphi) + o(\varepsilon).$$

Звідси отримуємо три співвідношення

$$Q\varphi = 0; \tag{9}$$

$$Q\varphi_1 + Q_1\varphi = 0; \tag{10}$$

$$Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + \Gamma_1\varphi = \hat{\hat{L}}\varphi. \tag{11}$$

Далі встановимо вигляд $\hat{\hat{L}}$.

З (9) випливає, що $\varphi \in N_Q$.

З (10) та з умови розв'язності матимемо

$$\Pi Q_1 \Pi\varphi = 0,$$

оскільки $\varphi \in N_Q$.

Позначимо

$$\Pi Q_1 = \hat{Q}_1, \ \Pi\varphi = \hat{\varphi}.$$

Тоді

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi} = 0,$$

звідки

$$\hat{\varphi} \in N_{\hat{Q}_1}.$$

Розглянемо (11). З умови розв'язності для Q матимемо

$$\Pi Q_1 \Pi\varphi_1 + \Pi\Gamma_1\Pi\varphi = \Pi\hat{\hat{L}}\Pi\varphi, \tag{12}$$

звідки

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_1 + \hat{\Gamma}_1\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\varphi.$$

З умови розв'язності для $\hat{\varphi}_2$

$$\hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1\hat{\Pi}\varphi = \hat{\hat{L}}\hat{\hat{\varphi}},$$

звідки

$$\hat{\hat{L}} = \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1\hat{\Pi},$$

$$\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0[\hat{\Gamma}_1 - \hat{\hat{L}}]\hat{\varphi},$$

$$\hat{\varphi}_2 = R_0[Q_1\varphi_1 + \Gamma_1\varphi - \hat{\hat{L}}\varphi].$$

Обмеженість $\theta^{\varepsilon}_{\eta}(x)\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів Γ_1 та R_0. □

Завершення доведення теореми здійснюється з використанням леми 3 і теореми 4.2 з [3].

3. Поведінка динамічної системи

Дослідимо асимптотичні властивості вихідної еволюційної системи (1).

Теорема 2. *При виконанні умов P1–P4 справедлива слабка збіжність*

$$(u^{\varepsilon}(t), \eta^{\varepsilon}(t)) \Rightarrow (\hat{u}(t), \eta^0(t)),\ \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $(\hat{u}(t), \eta^0(t))$ визначається генератором

$$\mathbf{L}\varphi(u, w) = \hat{\hat{C}}(u)\varphi'_u(u, w) + \hat{\hat{\Gamma}}^w\varphi(\cdot, w), \tag{13}$$

де

$$\hat{\hat{C}}(u) = \Pi\mathbb{C}(x) = \sum_{k\in\hat{E}} \pi_k \int_{\hat{E}_k} \pi(dx)C(u, x),$$

а генератор $\hat{\hat{\Gamma}}^w$, визначений в теоремі 1, діє за змінною w.

Зауваження 1. Слабка збіжність процесів $u^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \hat{\hat{u}}(t)$, $\varepsilon \to 0$ буде випливати зі збіжності відповідних генераторів за умови компактності дограничної сукупності процесів $u^{\varepsilon}(t)$. Відповідні теореми про компактність процесів з незалежними приростами в схемі апроксимації Леві було доведено, зокрема в [4].

Доведення теореми 2. Має місце

Лема 4. *Генератор трикомпонентного марковського процесу $(u^{\varepsilon}(t), \eta^{\varepsilon}(t), x^{\varepsilon}(t/\varepsilon^2))$, $t \geq 0$, має представлення*

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-2}Q^{\varepsilon}\varphi(u, w, x) + \varepsilon\Gamma^{\varepsilon}_u(x)\varphi(u, \cdot, x) + \Gamma^{\varepsilon}_w(x)\varphi(\cdot, w, x) +\\ +\mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) + \theta^{\varepsilon}_w(x)\varphi(u, w, x),\end{aligned} \tag{14}$$

де $\Gamma^{\varepsilon}_{\cdot}(x)$—генератор сукупності ІПЗ (3),

$$\mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) = C(u, x)\varphi'_u(u, w, x).$$

Залишковий член $\|\theta^{\varepsilon}_w(x)\varphi(u, w, x)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доведення леми можна знайти в [7].

Лема 5. *Генератор $\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)$ у випадку імпульсного процесу збурень допускає асимптотичне представлення*

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-2}Q^{\varepsilon}\varphi(u, w, x) + \varepsilon\Gamma^u_1(x)\varphi(u, w, x) +\\ +\Gamma^w_1(x)\varphi(u, w, x) + \mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) + \hat{\theta}^{\varepsilon}_w\varphi(u, w, x),\end{aligned} \tag{15}$$

де

$$\hat{\theta}^{\varepsilon}_w(x) = \gamma^{\varepsilon} + \theta^{\varepsilon}_w(x),$$

$\Gamma^{\cdot}_1(x)$ визначено у лемі 1. Залишковий член $\|\hat{\theta}^{\varepsilon}_w(x)\varphi(u, w, x)\| \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Доведення здійснюється з допомогою представлення оператора (5) та результатів леми 4.

Зрізаний оператор має вигляд:

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-2}Q^\varepsilon\varphi(u,w,x) + \Gamma_1^w(x)\varphi(u,w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x). \quad (16)$$

Лема 6. *Розв'язання проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (16) на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(w,x) = \varphi(w) + \varepsilon\varphi_1(w,x) + \varepsilon^2\varphi_2(w,x)$$

здійснюється зі співвідношення

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x) = \mathbf{L}\varphi(w) + \varepsilon^3\theta_w^\varepsilon(x)\varphi(w), \quad (17)$$

де залишковий член $\theta_w^\varepsilon(x)$ рівномірно обмежений по x.

Граничний оператор $\mathbf{L}$ *задається формулою*

$$\mathbf{L} = \hat{\hat{C}} + \hat{\hat{\Gamma}}_1^w. \quad (18)$$

Доведення. Для того, щоб виконувалась рівність (17) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва та справа були рівними. Обчислимо

$$(\varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}Q_1 + \Gamma_1^w + \mathbf{C})(\varphi + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2) =$$
$$= \varepsilon^{-2}Q\varphi + \varepsilon^{-1}(Q\varphi_1 + Q_1\varphi) + (Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + \Gamma_1^w\varphi + \mathbf{C}) + o(\varepsilon).$$

Знову ж таки, отримаємо три співвідношення

$$Q\varphi = 0; \quad (19)$$

$$Q\varphi_1 + Q_1\varphi = 0; \quad (20)$$

$$Q\varphi_2 + Q_1\varphi_1 + \Gamma_1^w\varphi = \hat{\hat{L}}\varphi. \quad (21)$$

Визначимо вигляд $\hat{\hat{L}}$.

З (19) випливає, що $\varphi \in N_Q$.

З (20), оскільки $\varphi \in N_Q$, з умови розв'язності матимемо

$$\Pi Q_1 \Pi\varphi = 0.$$

Введемо позначення

$$\Pi Q_1 = \hat{Q}_1, \ \Pi\varphi = \hat{\varphi}.$$

Тоді

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi} = 0,$$

звідки

$$\hat{\varphi} \in N_{\hat{Q}_1}.$$

Розглянемо (21). З умови розв'язності для Q матимемо

$$\Pi Q_1\Pi\varphi_1 + \Pi\Gamma_1^w\Pi\varphi + \Pi\mathbf{C}\Pi\varphi = \Pi\hat{\hat{L}}\Pi\varphi, \quad (22)$$

тоді

$$\hat{Q}_1\hat{\varphi}_1 + \hat{\Gamma}_1^w\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\varphi}.$$

Але з умови розв'язності для $\hat{\varphi}_2$

$$\hat{\Pi}\hat{C}\hat{\Pi}\hat{\varphi} + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1^w\hat{\Pi}\hat{\varphi} = \hat{\hat{L}}\hat{\hat{\varphi}},$$

звідки

$$\hat{\hat{L}} = \hat{\Pi}\hat{C}\hat{\Pi} + \hat{\Pi}\hat{\Gamma}_1^w\hat{\Pi},$$

$$\hat{\varphi}_1 = \hat{R}_0[\hat{\hat{L}} - \hat{\Gamma}_1^w - \hat{\mathbf{C}}]\hat{\varphi},$$

$$\hat{\varphi}_2 = \hat{R}_0[\hat{\hat{L}} + Q_1\varphi_1 + \Gamma_1^w\varphi + +\mathbf{C}\varphi].$$

Обмеженість $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів $\hat{\Gamma}_1$ та R_0. □

Завершення доведення теореми здійснюється з використанням леми 3 і теореми 4.2 з [3]. □

Література

1. Королюк В. С., Турбін А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения. К: Наукова думка, 1976. 184 с.
2. Korolyuk V. S., Korolyuk V. V. Stochastic Models of Systems. Kluwer, Dordrecht. 1999. 185 p.
3. Korolyuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. World Scientific, 2005. 330 p.
4. Korolyuk V. S., Limnios N., Samoilenko I. V. Levy and Poisson approximations of switched stochastic systems by a semimartingale approach. *Comptes Rendus Mathematique.* 354. 2016. P. 723–728.
5. Samoilenko I. V., Nikitin A. V. Differential equations with small stochastic terms under the Levy approximation conditions. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2018. Vol. 69. No. 9. P. 1445–1454.
6. Samoilenko A. M., Stanzhytskyi O. M. Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. World Scientific. Singapore. 2011. 323 p.
7. Nikitin A. V., Khimka U. T. Asymptotics of normalized control with Markov switchings. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2016. Vol.68. No. 8. P. 1252–1262.
8. Yin G. G., Zhang Q. Discrete-Time Markov Chains. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2006. Vol.51. No. 6. P. 1080–1081.

Надійшла: 31.03.2018 / Прийнята: 13.05.2018