ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 4, № 1 (2000) с. 48–56

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 4, No. 1 (2000) p. 48–56

СПЕКТР ВИПРОМІНЮВАННЯ СИСТЕМИ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК, ЩО РУХАЮТЬСЯ В НЕПОГЛИНАЮЧОМУ ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

А. В. Константинович, С. В. Мельничук, І. М. Раренко, І. А. Константинович, В. П. Жаркой
Чернівецький державний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012, Україна

(Отримано 29 червня 1999 р.)

Методом сили самодії Лоренца знайдено інтеґральні представлення спектрально–кутового та спектрального розподілів потужности випромінювання системи заряджених частинок, які рухаються по довільній траєкторії в ізотропному непоглинаючому середовищі та у вакуумі. Показано, що ефекти перерозподілу енерґії в спектрі випромінювання досліджуваної системи зумовлені фактором когерентности. При русі по колу в цьому середовищі спектр випромінювання системи електронів є дискретним. Ефект Доплера зумовлює появу нових гармонік, які утворюють неперервні області в спектрі випромінювання, при русі системи електронів уздовж спіралі.

Ключові слова: випромінювання системи заряджених частинок, випромінювання Черенкова, синхротронно–черенковське випромінювання, класична теорія поля, електрони в полях.

PACS number(s): 41.60.–m, 41.60.Ap, 41.60.Bq, 41.60.Cr, 41.20.–q, 41.20.Bt, 03.50.–z, 03.50.De

I. ВСТУП

Дослідження випромінювання релятивістських систем зарядів, які рухаються вздовж довільної траєкторії в електромагнетних полях у непоглинаючому ізотропному середовищі та у вакуумі, важливе з точки зору астрофізичних застосувань, застосувань у фізиці плазми, електроніці тощо.

Значний теоретичний та експериментальний інтерес представляє спектр випромінювання зарядів у постійному магнетному полі. Випромінювання релятивістських заряджених частинок у постійному магнетному полі у вакуумі отримало назву синхротронного випромінювання. Основні властивості синхротронного випромінювання заряджених частинок у вакуумі розглянуто в [1–4]. Одним із питань, яке потребує подальшого дослідження в цій області, є когерентність випромінювання електронів [5]. Частковий випадок когерентности проявляється в спіральних змійках [5–6]. При проходженні електронного пучка через спіральну змійку спостерігається лазерне випромінювання [6–7]. Подальшого вивчення потребує синхротронне, черенковське та синхротронно–черенковське випромінювання у середовищі [8–11]. Основні властивості випромінювання Черенкова при рівномірному прямолінійному русі розглянуто в [12–13].

У нашій роботі методом сили самодії Лоренца досліджено спектрально–кутовий та спектральний розподіли потужности випромінювання заряджених частинок, що рухаються вздовж довільної траєкторії в непоглинаючому ізотропному середовищі з $\varepsilon \neq 1$, $\mu \neq 1$. При розрахунках використовуємо гіпотезу Дірака [1–2, 8–10, 14–19], що власне електромагнетне поле, яке діє на заряджену частинку, можна визначити через напіврізницю запізнюючих та випереджаючих потенціялів. Досліджено явища когерентности та особливості розподілу енерґії в спектрі випромінювання системи електронів, які розташовані рівномірно вздовж спіралі. Проаналізована роль ефекту Доплера та фактора когерентности, які визначають розподіл енерґії в спектрі випромінювання системи електронів у вакуумі та в непоглинаючому ізотропному середовищі. Ця робота є розвитком праць [8–10, 15–19].

II. ЗАПІЗНЮЮЧІ ТА ВИПЕРЕДЖАЮЧІ ПОТЕНЦІЯЛИ В НЕПОГЛИНАЮЧОМУ ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Із рівнянь Максвелла для середовища [20] шляхом застосування перетворень Фур'є знаходимо рівняння Максвелла у просторі зображень. Із цих рівнянь отримуємо фур'є–образи рівнянь д'Аламбера, і за їх допомогою можемо записати вирази для запізнюючих та випереджаючих потенціялів електромагнетних полів у непоглинаючому ізотропному однорідному середовищі:

$$\varphi^{ret,adv}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \frac{\rho(\mathbf{r}',t')}{\varepsilon(\omega)} \times \frac{\exp\{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\omega(t-t')\}}{k^2 - \dfrac{n^2(\omega)}{c^2}(\omega \pm i\alpha)^2}, \tag{1}$$

$$\mathbf{A}^{ret,adv}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \times \frac{\mu(\omega)\,\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{c} \tag{2}$$

$$\times\, \frac{\exp\left\{i\mathbf{k}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)-i\omega\left(t-t'\right)\right\}}{k^2-\dfrac{n^2\left(\omega\right)}{c^2}\left(\omega\pm i\alpha\right)^2}.$$

Тут $\mathbf{k}$ — хвильовий вектор, ω — циклічна частота, α — нескінченно мала величина, яка перетворюється на нуль після розрахунку інтеґрала, $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$.

Потенціяли власного електромагнетного поля, яке діє на заряджену частинку в середовищі, визначимо через напіврізницю запізнюючих та випереджаючих потенціялів [1–2, 8–10, 14–19]:

$$\varphi^s = \frac{1}{2}\left(\varphi^{ret}-\varphi^{adv}\right),\ \ \mathbf{A}^s = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{ret}-\mathbf{A}^{adv}\right). \quad (3)$$

Для випадку непоглинаючого ізотропного однорідного середовища з проникностями $\varepsilon \neq 1$ та $\mu \neq 1$ проінтеґруємо потенціяли $\varphi^s\left(\mathbf{r},t\right)$, $\mathbf{A}^s\left(\mathbf{r},t\right)$ за k_z, урахуємо парність функцій $\varepsilon\left(\omega\right)$, $\mu\left(\omega\right)$ та $n\left(\omega\right)$, тоді отримаємо [10]:

$$\varphi^s\left(\mathbf{r},t\right) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{r}'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\rho\left(\mathbf{r}',t'\right)\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon\left(\omega\right)}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk_xdk_y\frac{c}{n\left(\omega\right)\omega\chi}$$

$$\times\cos\left\{k_x\left(x-x'\right)+k_y\left(y-y'\right)\right\}\cos\left\{\frac{n\left(\omega\right)}{c}\omega\chi\left(z-z'\right)\right\}\sin\left\{\omega\left(t-t'\right)\right\}, \quad (4)$$

$$\mathbf{A}^s\left(\mathbf{r},t\right) = \frac{1}{2\pi^2 c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{r}'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t'\right)\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\mu\left(\omega\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk_xdk_y\frac{c}{n\left(\omega\right)\omega\chi}$$

$$\times\cos\left\{k_x\left(x-x'\right)+k_y\left(y-y'\right)\right\}\cos\left\{\frac{n(\omega)}{c}\omega\chi\left(z-z'\right)\right\}\sin\left\{\omega\left(t-t'\right)\right\}, \quad (5)$$

де

$$\chi = \sqrt{1-\frac{c^2\left({k_x}^2+{k_y}^2\right)}{n^2\left(\omega\right)\omega^2}}. \quad (6)$$

За допомогою замін $k_x = \rho\cos\varphi$, $k_y = \rho\sin\varphi$, $\rho = \dfrac{n\left(\omega\right)}{c}\omega\sin\theta$ після деяких перетворень знаходимо:

$$\varphi^s\left(\mathbf{r},t\right) = \frac{1}{4\pi^2 c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{r}'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\rho\left(\mathbf{r}',t'\right)\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi}\sin\theta d\theta\frac{1}{\varepsilon\left(\omega\right)}\omega n\left(\omega\right)$$

$$\times\cos\left\{\frac{n\left(\omega\right)}{c}\omega\sin\theta\left[\cos\varphi\left(x-x'\right)+\sin\varphi\left(y-y'\right)\right]\right\}\cos\left\{\frac{n\left(\omega\right)}{c}\omega\cos\theta\left(z-z'\right)\right\}\sin\left\{\omega\left(t-t'\right)\right\}, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}^s\left(\mathbf{r},t\right) = \frac{1}{4\pi^2 c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{r}'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t'\right)\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi}\sin\theta d\theta\mu\left(\omega\right)\omega n\left(\omega\right)$$

$$\times\cos\left\{\frac{n\left(\omega\right)}{c}\omega\sin\theta\left[\cos\varphi\left(x-x'\right)+\sin\varphi\left(y-y'\right)\right]\right\}\cos\left\{\frac{n\left(\omega\right)}{c}\omega\cos\theta\left(z-z'\right)\right\}\sin\left\{\omega\left(t-t'\right)\right\}. \quad (8)$$

Власні потенціяли (7) та (8) дають змогу знайти потужність випромінювання заряджених частинок, які рухаються по довільній траєкторії в непоглинаючому ізотропному диспергуючому середовищі.

III. ПОТУЖНІСТЬ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК

Середню потужність випромінювання заряджених частинок [15–16]

$$\overline{P}^{rad} = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}dt\int\limits_{V}\left(\mathbf{j}\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{E}^{s}\left(\mathbf{r},t\right)\right)d\mathbf{r} \tag{9}$$

можна виразити через потенціяли [17–19]:

$$\overline{P}^{rad} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}dt\int\limits_{V}\left(\mathbf{j}\left(\mathbf{r},t\right)\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}^{s}\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t} - \rho\left(\mathbf{r},t\right)\frac{\partial\varphi^{s}\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t}\right)d\mathbf{r}. \tag{10}$$

Використовуючи власні потенціяли (7) і (8) у співвідношенні (10), знаходимо спектрально–кутовий розподіл середньої потужности випромінювання [17]:

$$\begin{aligned}\overline{P}^{rad} &= \frac{1}{4\pi^2c^3}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}dt\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{r}'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi}\sin\theta d\theta \\ &\times\omega^2\mu\left(\omega\right)n\left(\omega\right)\cos\left\{\frac{n\left(\omega\right)}{c}\omega\sin\theta\left[\cos\varphi\left(x-x'\right)+\sin\varphi\left(y-y'\right)\right]\right\}\cos\left\{\frac{n\left(\omega\right)}{c}\omega\cos\theta\left(z-z'\right)\right\} \\ &\times\cos\left\{\omega\left(t-t'\right)\right\}\left\{\mathbf{j}\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t'\right)-\frac{c^2}{n^2\left(\omega\right)}\rho\left(\mathbf{r},t\right)\rho\left(\mathbf{r}',t'\right)\right\}.\end{aligned} \tag{11}$$

Проінтеґруємо вираз (11) за φ, використовуючи співвідношення для функції Бесселя цілого індексу [21]:

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\cos\left\{a\cos\varphi+b\sin\varphi\right\}d\varphi = 2\pi J_0\left(\sqrt{a^2+b^2}\right). \tag{12}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\overline{P}^{rad} &= \frac{1}{2\pi c^3}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}dt\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\mathbf{r}'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{0}^{\pi}\sin\theta d\theta \\ &\times\omega^2\mu\left(\omega\right)n\left(\omega\right)J_0\left(\frac{n\left(\omega\right)}{c}\omega\sin\theta\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2}\right)\cos\left\{\frac{n\left(\omega\right)}{c}\omega\cos\theta\left(z-z'\right)\right\} \\ &\times\cos\left\{\omega\left(t-t'\right)\right\}\left\{\mathbf{j}\left(\mathbf{r},t\right)\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t'\right)-\frac{c^2}{n^2\left(\omega\right)}\rho\left(\mathbf{r},t\right)\rho\left(\mathbf{r}',t'\right)\right\}.\end{aligned} \tag{13}$$

Співвідношення для функції Бесселя [21]

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta J_0\left(\alpha\sin\theta\right)\cos\left(\beta\cos\theta\right) = \frac{\sin\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \tag{14}$$

дає змогу проінтеґрувати в (13) за θ і отримати спектральний розподіл середньої потужности випромінювання заряджених частинок, які рухаються в середовищі:

$$\overline{P}^{rad} = \frac{1}{\pi c^2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{0}^{\infty} d\omega\omega\mu(\omega)$$

$$\times \frac{\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cos\{\omega(t-t')\} \left\{\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\,\mathbf{j}(\mathbf{r}',t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)}\rho(\mathbf{r},t)\,\rho(\mathbf{r}',t')\right\}. \quad (15)$$

Формули (11), (13) і (15) визначають спектрально–кутовий та спектральний розподіли середньої потужности випромінювання заряджених частинок, які рухаються по довільній траєкторії в непоглинаючому ізотропному середовищі.

IV. СПЕКТРАЛЬНО–КУТОВИЙ ТА СПЕКТРАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛИ ПОТУЖНОСТИ ВИПРОМІНЮВАННЯ

Розглянемо систему точкових невзаємодіючих заряджених частинок, які рухаються одна за одною вздовж довільної траєкторії. Функції джерел N заряджених частинок у цьому випадку мають вигляд:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \sum_{l=1}^{N} \mathbf{V}_l(t)\,\rho_l(\mathbf{r},t), \quad \rho(\mathbf{r},t) = \sum_{l=1}^{N} \rho_l(\mathbf{r},t), \quad (16)$$

де

$$\rho_l(\mathbf{r},t) = e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_l(t)). \quad (17)$$

Закон руху та швидкість l–ої частинки цієї системи визначаємо співвідношеннями

$$\mathbf{r}_l(t) = \mathbf{r}_p(t+\Delta t_l) = x_p(t+\Delta t_l)\,\mathbf{i} + y_p(t+\Delta t_l)\,\mathbf{j} + z_p(t+\Delta t_l)\,\mathbf{k}, \quad (18)$$

$$\mathbf{V}_l(t) = \mathbf{V}_p(t+\Delta t_l) = V_x(t+\Delta t_l)\,\mathbf{i} + V_y(t+\Delta t_l)\,\mathbf{j} + V_z(t+\Delta t_l)\,\mathbf{k}. \quad (19)$$

Спектрально–кутовий розподіл середньої потужности випромінювання (11) у випадку системи N заряджених частинок, функції джерел яких визначаються співвідношеннями (16)–(19), після ряду перетворень набуває вигляду:

$$\overline{P}_N^{rad} = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{0}^{\infty} d\omega \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta \mu(\omega)\, n(\omega)\,\omega^2$$

$$\times S_N(\omega)\cos\left\{\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\left[\cos\varphi\,(x_p(t)-x_p(t')) + \sin\varphi\,(y_p(t)-y_p(t'))\right]\right\} \quad (20)$$

$$\times \cos\left\{\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta\,(z_p(t)-z_p(t'))\right\}\cos\{\omega(t-t')\}\left\{\mathbf{V}(t)\,\mathbf{V}(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)}\right\},$$

де

$$S_N(\omega) = \sum_{l,k=1}^{N} \cos\{\omega(\Delta t_l - \Delta t_k)\}. \quad (21)$$

Тут $S_N(\omega)$ — фактор когерентности.

Після інтеґрування (20) за φ, з урахуванням співвідношення (12), отримаємо [18]:

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_N^{rad} &= \frac{e^2}{2\pi c^3} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{0}^{\infty} d\omega \int\limits_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta \mu(\omega)\, n(\omega)\, \omega^2 \\
&\times S_N(\omega)\, J_0\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega \sin\theta \sqrt{\left(x_p(t) - x_p(t')\right)^2 + \left(y_p(t) - y_p(t')\right)^2}\right) \\
&\times \cos\left\{\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta\left(z_p(t) - z_p(t')\right)\right\} \cos\left\{\omega\left(t - t'\right)\right\} \left\{\mathbf{V}(t)\,\mathbf{V}(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)}\right\}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Використовуючи інтеґрал (14) для функцій Бесселя цілого індексу у виразі (22), знайдемо спектральний розподіл середньої потужности випромінювання системи заряджених частинок, які рухаються вздовж довільної траєкторії в непоглинаючому ізотропному середовищі:

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_N^{rad} &= \frac{e^2}{\pi c^2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{0}^{\infty} d\omega \mu(\omega)\, \omega S_N(\omega) \cos\left\{\omega\left(t - t'\right)\right\} \\
&\times \frac{\sin\left\{\dfrac{n(\omega)}{c}\omega \left|\mathbf{r}_p(t) - \mathbf{r}_p(t')\right|\right\}}{\left|\mathbf{r}_p(t) - \mathbf{r}_p(t')\right|} \left\{\mathbf{V}(t)\,\mathbf{V}(t') - \frac{c^2}{n^2(\omega)}\right\}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Якщо ж часовий розподіл невзаємодіючих заряджених частинок уздовж траєкторії визначається виразом

$$
\Delta t_l = \Delta t\, l, \tag{24}
$$

то для фактора когерентности будемо мати співвідношення

$$
\begin{aligned}
S_N(\omega) \;&= \sum_{l=1}^{N} \cos\left(\omega\ \Delta t\ l\right) \sum_{k=1}^{N} \cos\left(\omega\ \Delta t\ k\right) \\
&+ \sum_{l=1}^{N} \sin\left(\omega\ \Delta t\ l\right) \sum_{k=1}^{N} \sin\left(\omega\ \Delta t\ k\right).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Використовуючи вирази [21]

$$
\sum_{k=1}^{N} \sin(kx) = \sin\left(\frac{N+1}{2}x\right) \frac{\sin\left(\dfrac{N}{2}x\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\ , \tag{26}
$$

$$
\sum_{k=1}^{N} \cos(kx) = \cos\left(\frac{N+1}{2}x\right) \frac{\sin\left(\dfrac{N}{2}x\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\ , \tag{27}
$$

зі співвідношення (25) знайдемо [18]:

$$
S_N(\omega) = \frac{\sin^2\left(\dfrac{N\Delta t}{2}\omega\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\Delta t}{2}\omega\right)}. \tag{28}
$$

Фактор когерентности (28) визначає перерозподіл енерґії у спектрі випромінювання системи заряджених частинок.

Вирази (20), (22) дають спектрально–кутовий, а (23) — спектральний розподіли потужности випромінювання системи заряджених точкових частинок при їх русі по довільній траєкторії в непоглинаючому ізотропному середовищі.

V. ПРЯМОЛІНІЙНИЙ РУХ СИСТЕМИ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК

При рівномірному русі вздовж оси OZ, коли радіус–вектор l–го електрона $\mathbf{r}_l(t) = V\left(t + \Delta t_l\right)\mathbf{k}$, а його швидкість $\mathbf{V}_l = V\mathbf{k}$, зі співвідношення (23) після деяких перетворень знаходимо формулу потужности випромінювання Черенкова системи заряджених частинок, які рухаються в непоглинаючому ізотропному середовищі

$$
\begin{aligned}
\overline{P}_N^{rad} &= \frac{e^2 V}{c^2} \int\limits_{0}^{\infty} d\omega \mu(\omega)\, \omega S_N(\omega)\, \theta\left(V - \frac{c}{n(\omega)}\right) \\
&\times \left\{1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)\, V^2}\right\}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Тут $\theta(x)$ — функція Гевісайда. Фактор когерентности $S_N(\omega)$ визначається виразом (21). Якщо часовий розподіл заряджених частинок задається співвідношенням (24), то фактор когерентности в (29) визначатиметься формулою (28).

При $N = 1$ вираз (29) переходить у формулу для потужности випромінювання Черенкова окремого заряду в ізотропному середовищі з $\mu \neq 1$ [22–24].

VI. РУХ СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОНІВ УЗДОВЖ СПІРАЛІ

Розглянемо рух системи невзаємодіючих електронів у випадку, коли вектор індукції магнетного поля $\mathbf{B}^{ext} \parallel \vec{OZ}$. Тоді радіус–вектор і швидкість l–го електрона встановлюємо зі співвідношень [15–19]:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_l(t) &= r_0 \cos(\omega_0 t + \psi_l)\,\mathbf{i} + r_0 \sin(\omega_0 t + \psi_l)\,\mathbf{j} \\ &+ V_\parallel\left(t + \psi_l \omega_0^{-1}\right)\mathbf{k},\end{aligned} \tag{30}$$

$$\mathbf{V}_l(t) = \frac{d\mathbf{r}_l(t)}{dt}. \tag{31}$$

Тут $r_0 = V_\perp \omega_0^{-1}$, $\omega_0 = ceB^{ext}\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$, $V_\perp$, $V_\parallel$ — компоненти швидкости, ψ_l — початкова фаза l–го електрона, $\mathbf{p}$, ε — імпульс та енерґія електрона, e і m_0 заряд і маса спокою електрона.

З урахуванням співвідношень (30)–(31), спектрально–кутовий розподіл середньої потужности випромінювання (22) системи N електронів, які рухаються вздовж спіралі в непоглинаючому ізотропному середовищі, набуває вигляду:

$$\begin{aligned}\overline{P}_N^{rad} &= \frac{e^2}{2\pi c^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_0^{\infty} d\omega \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \mu(\omega)\, n(\omega)\, \omega^2 S_N(\omega)\, J_0\left(2\frac{n(\omega)}{c}\frac{\omega}{\omega_0} V_\perp \sin\theta \sin\left(\frac{\omega_0}{2}x\right)\right) \\ &\times \cos\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega V_\parallel \cos\theta x\right)\cos(\omega x)\left\{V_\perp^2 \cos(\omega_0 x) + V_\parallel^2 - \frac{c^2}{n^2(\omega)}\right\}.\end{aligned} \tag{32}$$

Тут $S_N(\omega)$–фактор когерентности, який визначається виразом [15–19]:

$$S_N(\omega) = \sum_{l,k=1}^{N} \cos\left\{\frac{\omega}{\omega_0}(\psi_l - \psi_k)\right\}. \tag{33}$$

Спектральний розподіл середньої потужности випромінювання системи електронів, які рухаються вздовж спіралі в непоглинаючому ізотропному середовищі, отримаємо зі співвідношення (23)

$$\overline{P}_N^{rad} = \frac{e^2}{\pi c^2}\int\limits_0^{\infty} d\omega \omega \mu(\omega)\, S_N(\omega) \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\eta(x)\right)}{\eta(x)} \cos(\omega x)\left\{V_\perp^2\cos(\omega_0 x) + V_\parallel^2 - \frac{c^2}{n^2(\omega)}\right\}, \tag{34}$$

де

$$\eta(x) = \sqrt{V_\parallel^2 x^2 + 4\frac{V_\perp^2}{\omega_0^2}\sin^2\left(\frac{\omega_0}{2}x\right)}. \tag{35}$$

Якщо ж електрони розподілені вздовж спіралі рівномірно, таким чином, що

$$\Delta t_l = \frac{\psi_l}{\omega_0} = \frac{\Delta\psi}{\omega_0} l, \tag{36}$$

то для фактора когерентности будемо мати співвідношення

$$S_N(\omega) = \frac{\sin^2\left(\frac{N\Delta\psi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\psi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}\right)}. \qquad (37)$$

Для $\Delta\psi = \frac{2\pi}{N}$ фактор когерентности $S_N(\omega)$ набуває вигляду, отриманого в працях [15–16].

Перетворимо вираз для спектрально–кутового розподілу середньої потужности випромінювання (32). Використаємо ряди за функціями Бесселя [21]

$$J_0(z\sin\alpha) = J_0^2\left(\frac{z}{2}\right) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m^2\left(\frac{z}{2}\right)\cos(2m\alpha) \qquad (38)$$

та інтеґральне представлення для дельта–функції

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(i\alpha x). \qquad (39)$$

Тоді для середньої потужности випромінювання системи електронів, які рухаються по спіралі в постійному магнетному полі в непоглинаючому ізотропному середовищі, отримаємо такий вираз [19]:

$$\overline{P}_N^{rad} = \frac{e^2}{c^3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} d\omega\mu(\omega)n(\omega)\omega^2\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\frac{\sin^2\left(\frac{N\Delta\psi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\psi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}\right)}\,\delta\left\{\omega\left(1-\frac{n(\omega)}{c}V_\parallel\cos\theta\right)-m\omega_0\right\}$$
$$\times\left\{V_\perp^2\left[\frac{m^2}{q^2}J_m^2(q)+J_m^{\prime 2}(q)\right]+\left(V_\parallel^2-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right)J_m^2(q)\right\}, \qquad (40)$$

де

$$q = V_\perp\frac{n(\omega)}{c}\frac{\omega}{\omega_0}\sin\theta. \qquad (41)$$

Для системи електронів, які рухаються вздовж спіралі у вакуумі, при $\Delta\psi = \frac{2\pi}{N}$ співвідношення (40) переходить у вираз потужности синхротронного випромінювання, отриманий у працях [15–16].

Якщо $N = 1$, то зі співвідношення (40) приходимо до формули, наведеної у працях [9–10].

При $V > c/n(\omega)$ вирази (32), (34) та (40) визначають єдиний процес, а саме, синхротронно–черенковське випромінювання [8–11, 16, 18–19].

З рівняння (40) випливає, що у випадку руху зарядів по колу в середовищі їхній спектр випромінювання є дискретним навіть при виконанні умови випромінювання Черенкова [9–10]. При $V_\parallel < c/n(\omega)$ ці дискретні гармоніки розширюються в смуги, межі яких, ω_{min}^m і ω_{max}^m, є відповідно розв'язками рівнянь:

$$\omega\left(1+\frac{n(\omega)}{c}V_\parallel\right) - m\omega_0 = 0,$$
$$\omega\left(1-\frac{n(\omega)}{c}V_\parallel\right) - m\omega_0 = 0. \qquad (42)$$

Розширення дискретних гармонік у смуги, при наявності складової швидкости $V_\parallel$, зумовлене ефектом Доплера.

Фактор когерентности в середовищі й у вакуумі характеризує перерозподіл випромінюваної енерґії по гармоніках [15–19]. Частоти випромінювання визначаються δ–функцією. Однак фактор когерентности накладає додаткові обмеження, і ряд гармонік не буде випромінюватися, хоча δ–функція дозволяє випромінювання таких частот. Із співвідношення (40) при $\Delta\psi = 2\pi/N$ випливає, що на частотах $\omega = \omega_0$, $\omega = 2\omega_0$, ..., $\omega = (N-1)\omega_0$ випромінювання відсутнє, а на частоті $\omega = N\omega_0$ потужність випромінювання в N^2 разів більша, ніж для окремого електрона [15–19].

Потужність випромінювання системи електронів при постійних ε та μ в області швидкостей $nV_\parallel/c < 1$ після інтеґрування за ω набуває вигляду

$$\overline{P}_N^{rad} = \frac{e^2}{c^3}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\mu n\frac{m^2\omega_0^2}{\left(1-\frac{nV_\parallel}{c}\cos\theta\right)^3}S_N(m,\theta)$$

$$\times \left\{ V_\perp^2 \left[\frac{m^2}{q_m^2} J_m^2\left(q_m\right) + J_m^{'2}\left(q_m\right) \right] + \left(V_\parallel^2 - \frac{c^2}{n^2} \right) J_m^2\left(q_m\right) \right\}, \tag{43}$$

де

$$q_m = \frac{nV_\perp}{c} \frac{m \sin\theta}{\left(1 - \dfrac{nV_\parallel}{c}\cos\theta\right)}, \tag{44}$$

$$S_N\left(m,\theta\right) = \frac{\sin^2\left\{ \dfrac{Nm\Delta\psi}{2}\left(1 - \dfrac{nV_\parallel}{c}\cos\theta\right)^{-1}\right\}}{\sin^2\left\{ \dfrac{m\Delta\psi}{2}\left(1 - \dfrac{nV_\parallel}{c}\cos\theta\right)^{-1}\right\}}. \tag{45}$$

При $N=1$ та $\mu=1$ зі співвідношення (43) отримаємо вираз, знайдений у праці [25].

Отже, ефекти когерентности в спектрально–кутовому та спектральному розподілах потужности випромінювання системи заряджених частинок, які рухаються вздовж довільної траєкторії в непоглинаючому ізотропному середовищі з $\varepsilon \neq 1$, $\mu \neq 1$, зумовлені характером їх розташування вздовж траєкторії. Фактор когерентности визначає перерозподіл енерґії у спектрі випромінювання і не дозволяє випромінювання системою зарядів деяких частот, випромінювання яких можливе для окремих зарядів.

У випадку руху системи електронів по колу в середовищі їхній спектр випромінювання є дискретним навіть при виконанні умов випромінювання Черенкова. При русі системи електронів по спіралі або по колу в непоглинаючому ізотропному середовищі можливі три типи випромінювання: синхротронне, черенковське та синхротронно–черенковське . Ефект Доплера зумовлює появу нових гармонік, які утворюють неперервні області в спектрі випромінювання при русі електронів по спіралі.

Отримані теоретичні результати мають важливе практичне значення. Ефекти когерентности необхідно враховувати при розробці нових джерел електромагнетного випромінювання, зокрема лазерів на вільних електронах.

[1] J. Schwinger, Phys. Rev. **75**, 1912 (1949).

[2] Д. Иваненко, А. Соколов, *Классическая теория поля* (Гос. изд–во техн.–теор. лит., Москва, Ленинград, 1951).

[3] А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон* (Наука, Москва, 1974).

[4] И. М. Тернов, Усп. фіз. наук **165**, 429 (1995).

[5] В. Кунц, в:*Синхротронное излучение. Свойства и применения* (Мир, Москва, 1981), с. 9.

[6] Э. Роу, в:*Синхротронное излучение. Свойства и применения* (Мир, Москва, 1981), с. 37.

[7] D. A. G. Deacon, L. K. Elias, J. M. J. Madey, H. A. Schwettman, T. I. Smith, Phys. Rev. Lett. **38**, 892, (1977).

[8] А. В. Константинович, В. М. Ницович, Изв. вузов, физика, № 2, 59 (1973).

[9] А. В. Константинович, В. М. Ніцович, Укр. фіз. журн. **18**, 853 (1973).

[10] А. В. Константинович, дисерт. канд. фіз.–мат. наук (Чернівецький державний університет, Чернівці, 1974).

[11] J. Schwinger, Wu–yang Tsai, T. Erber, Ann. Phys. **96**, 303 (1976).

[12] Дж. Джелли, *Черенковское излучение* (Наука, Москва, 1960).

[13] Зрелов В. П. *Излучение Вавилова–Черенкова. Т. 1–2* (Атомиздат, Москва 1968).

[14] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. London, Ser. A **167**, 148 (1938).

[15] А. В. Константинович, В. В. Фортуна, Изв. вузов, физика, № 12, 102 (1983).

[16] І. А. Константинович, Є. І. Каптар, *Матеріали студентської наукової конференції Чернівецького державного університету. Книга 2. Природничі науки* (Чернівці, 1998), с. 135.

[17] А. В. Константинович, Наук. вісн. Чернівецького ун–ту, фізика, вип. 29, 21 (1998).

[18] А. В. Константинович, Наук. вісн. Чернівецького ун–ту, фізика, вип. 32, 3 (1998).

[19] А. В. Константинович, С. В. Мельничук, І. А. Константинович, В. П. Жаркой, Наук. вісн. Чернівецького ун–ту, фізика, вип. 32, 8 (1998).

[20] Дж. Джексон, *Классическая электродинамика* (Мир, Москва, 1965).

[21] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Наука, Москва, 1971).

[22] А. Г. Ситенко, Журн. тех. физ. **23**, 2200 (1953).

[23] Д. Д. Иваненко, В. Н. Цытович, Журн. эксп. теор. физ. **28**, 291 (1955).

[24] B. D. Nag, A. M. Sayied, Proc. R. Soc., London, Ser. A **235**, 544 (1956).

[25] А. В. Константинович, Изв. вузов, физика, № 7, 145 (1971).

RADIATION SPECTRUM OF THE SYSTEM OF CHARGED PARTICLES MOVING IN NONABSORBING ISOTROPIC MEDIUM

A. V. Konstantinovich, S. V. Melnychuk, I. M. Rarenko, I. A. Konstantinovich, V. P. Zharkoy
Fedkovych Chernivtsi State University,
2, Kotsiubynskyi Str., Chernivtsi, UA–58012, Ukraine
E–mail: theormyk@chdu.cv.ua

The integral expressions for spectral–angular and spectral distributions of the radiation power of the system of charged particles moving on an arbitrary trajectory in nonabsorbing isotropic medium and in vacuum are obtained using Lorentz's self–action method. It is shown what the redistribution effects of energy in the radiation spectrum of the studied system are caused by the coherence factor. The radiation spectrum of the system of electrons moving in a circle in this medium is discrete. The Doppler effect causes the appearance of new harmonics for the system of electrons moving in a spiral. These harmonics form the region of continuous radiation spectrum.