

СИНЕРГЕТИЧНА МОДЕЛЬ ЕКОНОМІЧНОЇ СТРУКТУРИ СУСПІЛЬСТВА

О. І. Олемской, О. В. Ющенко, С. В. Кохан
Сумський державний університет
вул. Римського-Корсакова, 2, Суми, 40007
(Отримано 16 лютого 2004 р.)

Розвинуто синергетичну модель, що дає змогу представити економічну структуру суспільства і кризисні явища в макроекономіці. Показано, що детермінована економічна система переходить до високопродуктивного стану, якщо купівельна спроможність перевищує критичне значення. Економічну структуру суспільства подано функцією розподілу попиту, вигляд якої задано стаціонарним розв'язком синергетичних рівнянь, доповнених стохастичними джерелами. Установлено, що існування надзаможного прошарку можливо тільки за наявності кризових явищ, які заважають розвиткові суспільства протягом тривалого часу.

Ключові слова: система Лоренца, рівняння Фоккера–Планка, стаціонарний розподіл.

PACS number(s): 89.20.–a, 89.65.Gh, 64.60.Cn

ВСТУП

Останніми роками спостерігаємо значний розвиток класичної економіки [1] за рахунок використання концепцій і методів, що початково були розроблені в природних науках. Так, застосування статистичної фізики дало змогу показати основні особливості економічних крахів, побудувати теорію фінансових ризиків, розвинути принцип формування оптимального портфеля, інтерпретувати процеси зміни економічних показників й обмінних курсів валют [2–4]. З іншого боку, отримала поступ еволюційна економіка, яка спирається на теорію систем, що розвиваються, та на біологічну еволюцію [5, 6].

Нарешті з'явилася синергетична економіка [7, 8], яка ґрунтується на теорії відкритих систем та дозволяє показати процеси самоорганізації у фізиці, хемії, біології, соціології і т. д. Таким чином, сформувався новий напрямок — *фізична економіка* [9] (фізики віддають перевагу термінові *econophysics* [2–4]).

Одним із основних результатів фізичної економіки є з'ясування умов еволюції економіки до низько- або до високопродуктивного стаціонарних станів, з одного боку, і опис картини переходу між ними (*економічної кризи* або *економічного дива*), з іншого [10]. Відповідно до типу стаціонарного стану формується й економічна структура суспільства, яка представляє розподіл населення за ліквідним накопиченням або іншим показником. На основі соціологічних опитувань, експертних оцінок та інших даних з'ясовано, що можна виділити низько- і високооплачувану групи населення, а також порівняно нечисельний надзаможний прошарок — так званий *утікаючий хвіст*, прибутки й накопичення якого настільки великі, що обмежуються державою або переводяться до інших країн (відтік капіталу).

Запропонована стаття присвячена розвиткові найпростішої синергетичної моделі, застосування якої дозволяє, за аналогією з теорією конденсованого середо-

вища [11], зобразити економічну структуру суспільства й умови реалізації перехідних явищ, наприклад економічної кризи. При цьому ми базуємося на системі Лоренца [12], яка відповідає найпростішому представленню системи, що самоорганізується [13].

Розділ II присвячено дослідженню функції попиту, виробничої функції та умовної ціни, які відіграють роль параметра порядку, зв'язаного з ним поля та керуючого параметра. Використання адіабатичного наближення, в межах якого характерні часи зміни виробничої функції та ціни набагато менші від часу релаксації попиту, показує, що детермінована економічна система переходить до високопродуктивного стану, якщо купівельна спроможність перевищує критичне значення (його величина задається інтенсивностями зворотних зв'язків, які визначають вплив виробничої функції на швидкість зміни попиту, з одного боку, і спільний вплив попиту та ціни на швидкість зміни виробничої функції, з другого).

Економічну структуру суспільства зображено (розділ III) функцією розподілу попиту, вигляд якої задано стаціонарним розв'язком рівнянь Лоренца, доповнених найпростішими стохастичними добавками у вигляді білого шуму. Показано, що за умов адіабатичного наближення стохастична система Лоренца зводиться до рівняння Ланжев'єна з інтенсивністю шуму, що залежить від величини попиту, який, таким чином, набуває мультиплікативного характеру. Аналіз функції розподілу свідчить, що її вигляд визначається співвідношенням між купівельною спроможністю p_e і рівнем коливань ціни I_p : за малих значень p_e , I_p розподіл обмежено взагалі невеликими значеннями попиту Q , що відповідає бідному населенню і низькопродуктивному стану; зі зростанням p_e або I_p з'являється максимум, що відповідає середньому класу, і розподіл попиту набирає бімодального характеру; і нарешті, при великих значеннях p_e і малих значеннях I_p функція розподілу має єдиний максимум, який відповідає кінцевим значенням попиту Q (високопро-

дуктивному суспільству).

Розділи 4, 5 присвячені дослідженню *утікаючої хвоста*, який представляє степеневу асимптотику функції розподілу, відому як *закон Парето*. Ґрунтуючись на факті, згідно з яким така асимптотика відповідає самоподібній економічній структурі, ми знаходимо, що умовою її реалізації є переважання коливань ціни над випадковими змінами виробничої функції та попиту. Однак у цьому випадку асимптотика розподілу попиту має вигляд степеневі функції $Q^{-\nu}$ з цілим показником $\nu = 2$, тоді як насправді він є дробовим. Відображення цієї властивості досягається заміною в стохастичних рівняннях Лоренца параметра порядку Q степеневою функцією $Q^{\frac{\nu}{2}}$ з показником $\nu < 2$. Це істотно розширює ділянку існування стратифікованого суспільства. Урахування властивостей самоподібності з використанням техніки дробового диференціювання/інтегрування дає змогу зв'язати показник Парето ν зі значенням динамічного показника z , що визначає закон еволюції попиту, і параметром деформації q , величина якого задає ентропію Реньї, що визначає безлад самоподібної стохастичної системи. У результаті виявляється, що еволюція надзможного прошарку населення є можливою тільки за наявності пасток у просторі станів. Стосовно до економічної системи це означає існування кризових явищ, які перешкоджають розвиткові суспільства протягом досить тривалого часу.

I. ПОВУДОВА СИНЕРГІТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Оскільки суспільство є відкритою економічною системою, доцільно досліджувати його в межах синергетичного підходу, що узагальнює термодинамічну картину фазових перетворень [14]. Як показують приклади ґранульованих середовищ [15] і транспортних потоків [16], у такій постановці задача зводиться до знаходження рівнянь еволюції параметра порядку, зв'язаного поля та керуючого параметра.

Для заданих значень ліквідних коштів U та ціни P роль параметра порядку, що відрізняє високопродуктивний стан від низькопродуктивного, відіграє функція попиту $Q(U, P)$, яка представляє кількість товару, що придбали за одиницю часу (в низькопродуктивному, неупорядкованому стані маємо $Q = 0$, у високопродуктивному, упорядкованому $Q \neq 0$). Відповідно, зв'язане поле зводиться до виробничої функції F , що визначається кількістю продукції, виробленої за одиницю часу (часу обігу) залежно від кількості людей, зайнятих у процесі, і вкладених (обігових) коштів. Керуючий параметр представляє умовну ціну $p \equiv P/U$, яка визначається відношенням дійсної ціни до наявних коштів.

У межах синергетичного підходу еволюція системи визначається системою самоузгоджених рівнянь, які зв'язують швидкості зміни \dot{Q} , \dot{F} , \dot{p} указаних величин з їх значеннями Q , F , p . Узнявши до уваги виділену роль параметра порядку Q (див. нижче), будемо вважати рівняння для зміни попиту в лінійному вигляді:

$$\tau_Q \dot{Q} = -Q + A_Q F. \quad (1)$$

Тут перший доданок у правій частині враховує дебаївську релаксацію попиту до нульового значення за час τ_Q , другий доданок описує лінійну реакцію швидкості зростання попиту \dot{Q} на зміну виробничої функції F (позитивна константа зв'язку A_Q визначає силу цієї реакції).

Рівняння для швидкості зміни виробничої функції (зв'язаного поля) записується в нелінійному вигляді:

$$\tau_F \dot{F} = -F + A_F Q p, \quad (2)$$

де перший доданок у правій частині має релаксаційну природу, що визначається часом τ_F , другий являє собою позитивний зворотний зв'язок функції попиту та умовної ціни зі швидкістю зміни виробничої функції ($A_F > 0$ — параметр зв'язку). Саме цей зв'язок є причиною самоорганізації економічної системи.

Останнє з необхідних рівнянь визначає зміну умовної ціни, що відіграє роль керуючого параметра:

$$\tau_p \dot{p} = (p_e - p) - A_p Q F. \quad (3)$$

На відміну від (1), (2) тут перший доданок у правій частині описує релаксацію не до нульового, а до скінченного значення p_e , величина якого задається зовнішньою дією і представляє купівельну спроможність населення (τ_p — час автономної релаксації ціни, $A_p > 0$ — константа зворотного зв'язку). Згідно з (3) зворотний зв'язок виробничої функції та попиту зі швидкістю зміни умовної ціни має негативний характер і відповідно до принципу Ле-Шательє призводить до її спадання.

Система синергетичних рівнянь (1)–(3) виділена в тому розумінні, що впливає з найпростішого лагранжіана і, таким чином, представляє найпростішу реалізацію системи, що самоорганізується [13]. Для аналізу цієї системи зручно скористатися безрозмірними величинами, віднісши час t , попит Q , виробничу функцію F і значення умовної ціни p до масштабів

$$t_Q, Q_c \equiv (A_F A_p)^{-1/2}, \\ F_c \equiv (A_Q^2 A_F A_p)^{-1/2}, \quad p_c \equiv (A_Q A_F)^{-1} \quad (4)$$

відповідно. У результаті економічна еволюція представляється безрозмірною системою

$$\dot{Q} = -Q + F, \quad (5)$$

$$\sigma \dot{F} = -F + Q p, \quad (6)$$

$$\delta \dot{p} = (p_e - p) - Q F, \quad (7)$$

де введено відношення часів релаксації

$$\sigma \equiv \frac{\tau_F}{\tau_Q}, \quad \delta \equiv \frac{\tau_p}{\tau_Q}. \quad (8)$$

Монотонний режим еволюції реалізується, якщо характерний час зміни попиту τ_Q набагато перевищує відповідні масштаби τ_F , τ_p виробничої функції та ціни:

$$\sigma, \delta \ll 1. \quad (9)$$

Оскільки безрозмірні швидкості \dot{Q} , \dot{F} , \dot{p} мають однаковий порядок, то умови (9) дозволяють знехтувати лівими частинами рівнянь (6), (7), що приводять до співвідношень

$$F = p_e \frac{Q}{1 + Q^2}, \quad p = \frac{p_e}{1 + Q^2}. \quad (10)$$

Отже, збільшення попиту в інтервалі, обмеженому максимальним значенням Q_c , приводить до зростання виробничої функції F і зменшення умовної ціни p нижче від рівня, що фіксується купівельною спроможністю p_e . Підстановка першої з рівностей (10) до (5) дає основне рівняння економічної еволюції у формі Ландау–Халатнікова:

$$\dot{Q} = -\frac{\partial V}{\partial Q}. \quad (11)$$

Його вигляд визначається ефективним потенціалом

$$V = \frac{Q^2}{2} - \frac{p_e}{2} \ln(1 + Q^2), \quad (12)$$

що вимірюється в одиницях Q_c^2 . При малих значеннях купівельної спроможності p_e залежність $V(Q)$ має монотонно зростаючий вигляд з максимумом $Q_0 = 0$, що відповідає низькопродуктивному станові економіки, у якому переважає бідне населення. Зі зростанням p_e до значень, що перевищують критичний рівень p_c , з'являється мінімум (тут використані розмірні величини)

$$Q_0 = Q_c \sqrt{p_e - p_c}, \quad (13)$$

який відповідає високопродуктивному станові, де переважає населення із середніми доходами (середній клас). Із синергетичного погляду, такий стан відповідає упорядкованій фазі, у якій виробнича функція має стаціонарне значення $F_0 = A_Q Q_0$, а умовна ціна зменшується до критичного значення $p_0 = p_c$.

Проведений розгляд показує, що використання синергетичної системи рівнянь (5)–(7) дозволяє в адіабатичному наближенні (9) зобразити самоузгоджену картину переходу економіки з низькопродуктивного стану до високопродуктивного.

II. ЕКОНОМІЧНА СТРУКТУРА СУСПІЛЬСТВА

Основна особливість системи Лоренца (5)–(7) полягає в тому, що вона представляється усередненими значеннями попиту Q , виробничої функції F та умовної ціни p , значення яких насправді випадково змінюються з часом. Для врахування цієї обставини додамо до правих частин рівнянь (5)–(7) стохастичні доданки $\sqrt{I_Q}\eta(t)$, $\sqrt{I_F}\eta(t)$, $\sqrt{I_p}\eta(t)$, які визначаються інтенсивностями I_Q , I_F , I_p , вимірними в одиницях $(A_F A_p)^{-1}$, $(A_Q^2 A_F A_p)^{-1}$, $(A_Q A_F)^{-2}$ відповідно, і білим шумом $\eta(t)$, який задається рівностями

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t - t').$$

Тоді в межах адіабатичного наближення (9) виробнича функція F й умовна ціна p розділяються на детерміністичні складові \bar{F} , \bar{p} і стохастичні добавки \tilde{F} , \tilde{p} , що визначаються рівняннями

$$F = \bar{F} + \tilde{F}\eta, \quad p = \bar{p} + \tilde{p}\eta; \quad (14)$$

$$\bar{F} \equiv p_e Q d(Q), \quad \tilde{F} \equiv \sqrt{I_F + I_p Q^2} d(Q); \quad (15)$$

$$\bar{p} \equiv p_e d(Q), \quad \tilde{p} \equiv \sqrt{I_p + I_F Q^2} d(Q), \quad (16)$$

де позначено $d(Q) \equiv (1 + Q^2)^{-1}$. У цих рівняннях детерміністичні складові зводяться до рівнянь (10), а флюктуаційні впливають із відомої властивості адитивності дисперсій гауссівських випадкових величин [17].

Принципово важливою обставиною є те, що спочатку ми ввели адитивні шуми, інтенсивності яких I_Q , I_F , I_p не залежали від параметра порядку Q , тоді як використання синергетичного принципу підпорядкування в рівностях (14)–(16) перетворює ці шуми на мультиплікативні. У результаті рівняння (5), доповнене стохастичними виразами (14)–(16), приводить до рівняння Ланжев'єна

$$\dot{Q} = f(Q) + \sqrt{I(Q)}\eta(t), \quad f(Q) \equiv -\frac{\partial V}{\partial Q}, \quad (17)$$

де ефективна сила f задається потенціалом (12), а флюктуації попиту виражаються рівнянням

$$I(Q) \equiv I_Q + (I_F + I_p Q^2) d^2(Q), \quad (18)$$

що впливає з указаной вище властивості адитивності інтенсивностей шумів. Щоб уникнути непорозумінь, зазначимо, що пряме підставлення рівнянь (14)–(16) до (5) привело б до стохастичної добавки

$$\left[I_Q^{1/2} + \left(I_F^{1/2} + I_p^{1/2} Q \right) d(Q) \right] \eta(t), \quad (19)$$

квадрат амплітуди якої відрізняється від ефективної інтенсивності шуму (18). Щобільше, безпосереднє використання адіабатичного наближення в рівняннях (6), (7) дає флюктуаційні добавки залежностей (14) у вигляді $\tilde{F} \equiv (I_F^{1/2} + I_p^{1/2}Q)d(Q)$, $\tilde{p} \equiv (I_p^{1/2} - I_F^{1/2}Q)d(Q)$, відмінному від (15), (16). Остання з цих добавок явно не має змісту, оскільки дає повну компенсацію флюктуацій умовної ціни \tilde{p} , коли попит $Q = \sqrt{I_p/I_F}$. Формальною причиною вказаної суперечності є неможливість застосувати звичайні методи аналізу до стохастичних рівнянь (див. [17]).

Рівняння Ланжев'єна (17) має нескінченний набір випадкових розв'язків, розподіл яких $P(Q, t)$ задається рівнянням Фоккера-Планка [17]

$$\frac{\partial P(Q, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Q} \left\{ -f(Q)P(Q, t) + \frac{\partial}{\partial Q} [I(Q)P(Q, t)] \right\}. \quad (20)$$

У стаціонарному стані густина ймовірності $P(Q, t)$ не залежить від часу, і вираз, що стоїть у фігурних дужках правої частини (20), зводиться до нуля. У результаті приходимо до стаціонарного розподілу

$$P(Q) = Z^{-1} \exp\{-W(Q)\}, \quad (21)$$

де Z — нормуюча стала, а ефективний потенціал

$$W(Q) = \ln I(Q) - \int_0^Q \frac{f(Q')}{I(Q')} dQ', \quad f \equiv - \frac{\partial V}{\partial Q}, \quad (22)$$

визначається початковим значенням (12) та інтенсивністю шуму (18). Рівняння, що визначає положення екстремумів залежності $W(Q)$ і розподілу $P(Q)$, має вигляд

$$x^3 - p_e x^2 - 2I_p x + 4(I_p - I_F) = 0, \quad x \equiv 1 + Q^2. \quad (23)$$

Таким чином, форма розподілу $P(Q)$ не залежить від інтенсивності шуму I_Q попиту Q і визначається значенням купівельної спроможності p_e та інтенсивностями шумів I_F , I_p виробничої функції F й умовної ціни p . Тому далі можна покласти $I_Q = 0$ і визначити ефективний потенціал рівняннями (12), (18), (22).

Згідно з (23) цей потенціал має мінімальне значення в точці $Q = 0$, якщо купівельна спроможність p_e не перевищує критичного значення

$$p_c^0 = 1 + 2I_p - 4I_F, \quad (24)$$

що зростає зі збільшенням коливань ціни товару і зменшується зі зростанням флюктуацій виробничої функції. Така ситуація відповідає низькопродуктивному станові в економіці. Для дослідження умов виникнення високопродуктивного стану розглянемо

спочатку простий випадок $I_F = 0$, у якому стаціонарний попит отримує значення

$$Q_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[(p_e - 3) + \sqrt{(3 - p_e)^2 + 4(2p_e - 3 + 2I_p)} \right], \quad (25)$$

що випливає з (23) після виключення кореня $Q^2 = 0$. Мінімальна величина

$$Q_c^2 = \frac{1}{2} \left[(p_e - 3) - \sqrt{(p_e + 7)(p_e - 1)} \right] \quad (26)$$

досягається на прямій (24), де $I_F = 0$. Для купівельної спроможності $p_e < 4/3$ критичний попит Q_c є комплексним, а зі збільшенням до значень $p_e > 4/3$ стає дійсним. Таким чином, трикритична точка

$$p_e = 4/3, \quad I_p = 1/6 \quad (27)$$

визначає виникнення високопродуктивного стану. Якщо $p_e < 4/3$, то за умови (24) корінь $Q = 0$ відповідає мінімуму ефективного потенціалу $W(Q)$, тоді як для $p_e > 4/3$ — максимуму; відповідно, корені Q_{\pm} визначають симетричні мінімуми високопродуктивного стану.

Знайдемо умови існування останнього. Покладемо дискримінант рівняння (23) рівним нулеві і отримаємо вирази

$$I_p = 0, \quad I_p^2 - I_p \left[\frac{27}{2} \left(1 - \frac{p_e}{3} \right) - \frac{p_e^2}{8} \right] + \frac{p_e^3}{2} = 0, \quad (28)$$

останній з яких дає залежність

$$2I_p = \left[\frac{27}{2} \left(1 - \frac{p_e}{3} \right) - \frac{p_e^2}{8} \right] \pm \left\{ \left[\frac{27}{2} \left(1 - \frac{p_e}{3} \right) - \frac{p_e^2}{8} \right]^2 - 2p_e^3 \right\}^{1/2}. \quad (29)$$

Вона відповідає кривій $p_e(I_p)$, що перетинає горизонтальну вісь у точках $I_p = 0$ та $I_p = 27/2$ і має максимальне значення $p_e = 2$ для

$$I_p = 2. \quad (30)$$

Коли $I_F = 0$, ця крива торкається прямої (24) в точці (27).

Зазначена картина зображена діаграмою, наведеною на рис. 1а. З неї видно, що для значень купівельної спроможності, які перевищують границю (24), стаціонарний попит здобуває кінцеве значення $Q \neq 0$ й економіка відповідає високопродуктивному станові. За умов зниження купівельної спроможності з'яв-

ляється максимум розподілу в точці $Q = 0$, що відповідає низькопродуктивному станові економіки. Під кривою (29) цей максимум стає єдиним. Отже, коливання ціни приводять до появи ділянки між кривими (24), (29), у якій економіка може бути як у низько-, так й у високопродуктивних станах. Ця ділянка відповідає стратифікованому суспільству, яке, згідно з рис. 1а, утворюється навіть за відсутності купівельної спроможності, якщо коливання ціни перевищує поріг $I_p = 27/2$. У цьому випадку реалізується картина, властива режимові самоорганізованої критичності [18, 19].

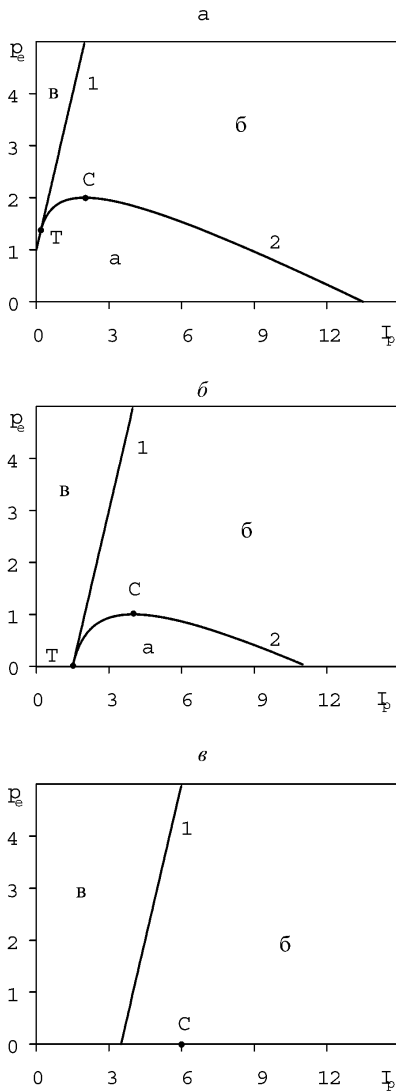


Рис. 1. Діяграма можливих станів економіки при різних значеннях купівельної спроможності p_e , коливаннях ціни I_p і флюктуаціях виробничої функції I_F (величини p_e, I_p відкладені за осями координат, значення $I_F = 0, 1, 2$ відповідають рисункам а, б, в). Криві 1, 2 вказують границі низькопродуктивного (а) і високопродуктивного (в) станів з ділянкою, що відповідає стратифікованому суспільству (б).

Розгляньмо нарешті загальний випадок, коли флюктуації виробничої функції $I_F \neq 0$. За таких умов ко-

ординати (27) трикритичної точки набувають вигляду

$$p_e = \frac{4}{3}(1 - I_F), \quad I_p = \frac{1}{6}(1 + 8I_F), \quad (31)$$

а положення критичної точки (30) змінюється складнішим чином. Як видно з рис. 2, врахування флюктуацій виробничої функції $I_F \neq 0$ приводить до пригнічення низькопродуктивного стану, обмежуючи ділянку його існування кінцевими інтервалами купівельної спроможності p_e , коливань ціни I_p і флюктуацій виробничої функції I_F . Згідно з рис. 1б, 1в зі збільшенням останніх до значення $I_F = 1$ трикритична точка (31) попадає на вісь $p_e = 0$, а для $I_F = 2$ низькопродуктивна ділянка зникає зовсім. Отже, коливання виробничої функції трансформують низькопродуктивний стан до високопродуктивного, що приводить до появи середнього класу.

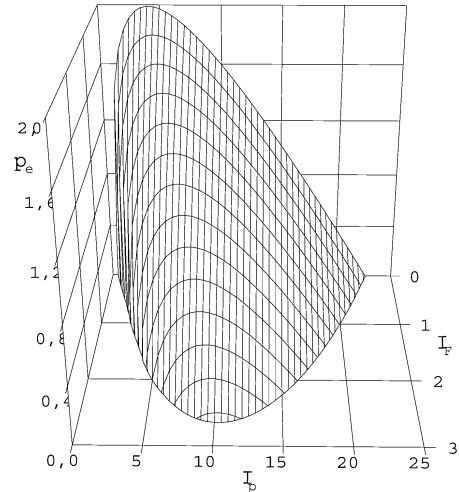


Рис. 2. Тривимірна діяграма існування низькопродуктивного стану.

III. ЗАКОН ПАРЕТО

Проведений розгляд показує, що залежно від купівельної спроможності p_e , рівня коливань цін I_p і флюктуацій виробничої функції I_F , функція розподілу попиту $P(Q)$, яка відображає економічну структуру суспільства, набуває вигляду, показаного на рис. 3. Одномодовий режим (рис. 3в), притаманний високопродуктивному станові економіки, є характерним для розвинених країн, де домінує середній клас [20]. Бімодальний режим (рис. 3б), що відповідає стратифікованому суспільству, спостерігався в Росії в 1990-ті роки [21]. При цьому виділяється група надзможного населення, що відповідає утікаючому хвосту, де розподіл попиту визначається степеневію залежністю Парето

$$P \propto Q^{-\nu} \quad (32)$$

з показником $\nu = 1 \div 2$. Незважаючи на малочисельність цієї групи, її доходи становлять не менш ніж половину всіх накопичень населення, і розподіл (32) відіграє важливу роль в економічній структурі суспільства.

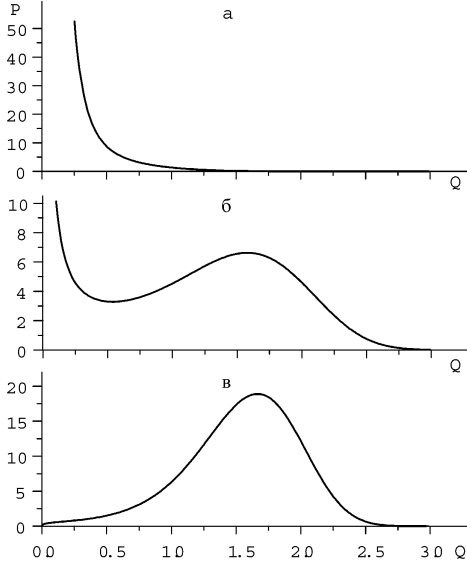


Рис. 3. Вигляд функції розподілу попиту $P(Q)$: а — у низкопродуктивному стані ($p_e = 0.1$, $I_p = 1.1$); б — у режимі, який відповідає стратифікованому суспільству ($p_e = 3$, $I_p = 2$); в — у високопродуктивному стані ($p_e = 3.5$, $I_p = 1.1$).

Пристаюючи до визначення закону Парето, відзначимо, що його степенева форма є ознакою самоподібної системи, у якій відсутній характерний масштаб [22]. Справді, властивість самоподібності виражається однорідністю функції розподілу:

$$P(Q/Q_c) = Q_c^\nu P(Q). \quad (33)$$

Згідно з (33) зміна масштабу Q_c випадкової величини Q приводить до мультиплікативної зміни ймовірності її реалізації P з характерним показником ν . Уводячи масштабовану змінну $\kappa \equiv Q/Q_c$ і функцію розподілу $\mathcal{P}(\kappa) \equiv \kappa^\nu P(\kappa)$, можна переписати (33) у вигляді

$$P(Q) = Q^{-\nu} \mathcal{P}(\kappa), \quad \kappa \equiv Q/Q_c. \quad (34)$$

Для самоподібних систем, у яких відсутність масштабу виражається умовою $Q_c \rightarrow \infty$, можна скористатися границею $\kappa \rightarrow 0$. При цьому функція $\mathcal{P}(\kappa)$ прямує до постійного значення, і розподіл $P(Q)$ набирає степеневі форми (32).

Для кількісного подання закону Парето будемо виходити з розподілу (21), вигляд якого задається ефективним потенціалом (22). Великі коливання виробничої функції $I_F \gg I_Q, I_p$ відповідають виразові

$$P(Q) \approx I_F^{-1} (1 + Q^2)^2 \exp \left\{ I_F^{-1} \int f(Q) (1 + Q^2)^2 dQ \right\},$$

$$f(Q) \equiv -Q + p_e \frac{Q}{1 + Q^2}, \quad (35)$$

суттєво відмінному від однорідної функції (34). Розподіл у потрібному вигляді одержується в протилежному випадку $I_p \gg I_Q, I_F$:

$$P(Q) \approx I_p^{-1} \left(\frac{1 + Q^2}{Q} \right)^2$$

$$\times \exp \left\{ I_p^{-1} \int \frac{f(Q) (1 + Q^2)^2}{Q^2} dQ \right\} \propto Q^{-2}. \quad (36)$$

Таким чином, розкид коливань ціни приводить до встановлення самоподібного режиму, якому відповідає однорідна функція з цілим показником $\nu = 2$.

Вище ми бачили, що в загальному випадку (34) цей показник зводиться до дробового значення $\nu < 2$. Для відображення цієї обставини замінимо параметр порядку Q в системі Лоренца (5)–(7), доповненій стохастичними джерелами, степеневим множником $Q^{\frac{\nu}{2}}$. Формально заміна параметра $Q \leq 1$ збільшеним значенням $Q^{\frac{\nu}{2}}$ означає, що процес упорядкування впливає на самоузгоджену поведінку системи сильніше, ніж у випадку $\nu = 2$. У результаті економічна еволюція зображається фрактальною системою Лоренца зі стохастичними джерелами:

$$\tau_Q \dot{Q} = -Q^{\frac{\nu}{2}} + A_Q F + \sqrt{I_Q} \eta(t),$$

$$\tau_F \dot{F} = -F + A_F Q^{\frac{\nu}{2}} p + \sqrt{I_F} \eta(t), \quad (37)$$

$$\tau_p \dot{p} = (p_e - p) - A_p Q^{\frac{\nu}{2}} F + \sqrt{I_p} \eta(t).$$

Для аналізу цієї системи зручно використати безрозмірні змінні, відносячи час t , попит Q , виробничу функцію F , умовну ціну p і відповідні інтенсивності шумів I_Q, I_F, I_p до масштабів

$$\tau_c \equiv \tau_Q (A_F A_p)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}}; \quad Q_c \equiv (A_F A_p)^{-\frac{1}{\nu}},$$

$$F_c \equiv (A_Q^2 A_F A_p)^{-\frac{1}{2}}, \quad p_c \equiv (A_Q A_F)^{-1}; \quad (38)$$

$$I_Q^c \equiv (A_F A_p)^{-1}, \quad I_F^c \equiv (A_Q^2 A_F A_p)^{-1},$$

$$I_p^c \equiv (A_Q A_F)^{-2}.$$

У результаті система (37) набирає найпростішого вигляду

$$\dot{Q} = -Q^{\frac{\nu}{2}} + F + \sqrt{I_Q} \eta(t),$$

$$(\tau_F/\tau_c) \dot{F} = -F + Q^{\frac{\nu}{2}} p + \sqrt{I_F} \eta(t), \quad (39)$$

$$(\tau_p/\tau_c)\dot{p} = (p_e - p) - Q^{\frac{\nu}{2}}F + \sqrt{I_p}\eta(t).$$

Перш ніж розпочати аналіз функції розподілу $P(Q)$, зазначимо, що в стаціонарному детермінованому випадку система (39) дає розв'язок

$$Q_0 = (p_e - 1)^{\frac{1}{\nu}}, \quad \nu \leq 2, \quad (40)$$

що узагальнює кореневу залежність (13), яка відповідає показникові $\nu = 2$. Використання деформованої моделі Ізинга показує [23], що показник ν визначається параметром деформації $0 \leq q \leq 1$ згідно з рівністю

$$\nu = 1 + q, \quad (41)$$

з якого випливає $1 \leq \nu \leq 2$.

У межах адіабатичного наближення $\tau_F, \tau_p \ll \tau_c$ економічна еволюція надзможного прошарку суспільства зводиться до аналізу рівняння Ланжев'єна (17), де параметр порядку Q і знаменник $d(Q) \equiv (1 + Q^2)^{-1}$ замінюються деформованими виразами $Q^{\frac{\nu}{2}}$, $d_\nu(Q) \equiv (1 + Q^\nu)^{-1}$. Тоді ефективна сила та інтенсивність шуму приймають форму

$$f(Q) \equiv -Q^{\frac{\nu}{2}} + p_e Q^{\frac{\nu}{2}} d_\nu(Q), \quad (42)$$

$$I(Q) \equiv I_Q + (I_F + I_p Q^\nu) d_\nu^2(Q), \quad (43)$$

яка визначає вигляд розподілу (21). Його максимум задається рівнянням

$$\begin{aligned} \nu I_p Q^\nu + Q^{1-\frac{\nu}{2}} (1 + Q^\nu)^2 [(p_e - 1) - Q^\nu] \\ = \nu (I_p - 2I_F), \end{aligned} \quad (44)$$

з якого видно, що коливання попиту не впливають на його розподіл, тоді як флюктуації цін і виробничої функції позначаються критично. Границя стратифікованого суспільства задається умовою $Q = 0$, згідно з якою

$$I_p = 2I_F. \quad (45)$$

У критичному режимі виконується умова $\left| \frac{dQ}{dp_e} \right| = \infty$, яка приводить до рівняння

$$\begin{aligned} Q^{1-\frac{\nu}{2}} (1 + Q^\nu)^2 \left[\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{\nu} \right) + \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2} \right) Q^{-\nu} \right] \\ - p_e Q^{1-\frac{\nu}{2}} (1 + Q^\nu) \left[\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\nu} \right) + \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2} \right) Q^{-\nu} \right] \\ = \nu I_p. \end{aligned} \quad (46)$$

Сумісний розв'язок системи (44), (46) в режимі самоорганізації ($p_e = 0$) приводить до діаграми станів,

показаної на рис. 4. З неї видно, що зменшення показника ν суттєво розширює ділянку коливань цін I_p і флюктуацій виробничої функції I_F , у якій реалізується стратифіковане суспільство.

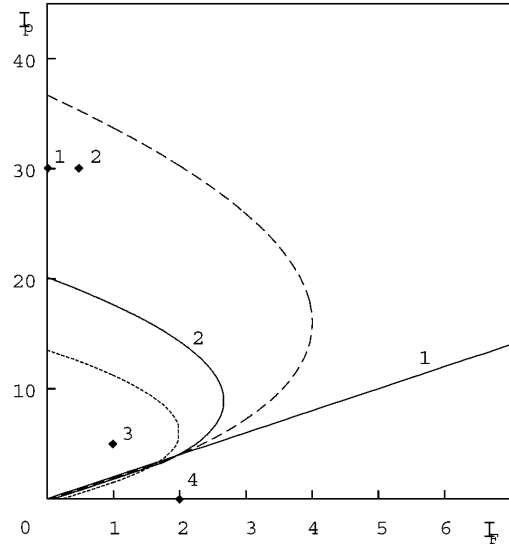


Рис. 4. Діаграма станів системи залежно від інтенсивностей коливання цін I_p і виробничої функції I_F ($I_Q = 0$, $p_e = 0$). Пунктирна, суцільна і штрихова криві відповідають показникам Парето $\nu = 1.0, 1.5, 2.0$. Ромби 1–4 відповідають кривим на рис. 5. За аналогією з рис. 1, криві 1, 2 вказують границі між ділянками низько- і високопродуктивного станів зі стратифікованим суспільством.

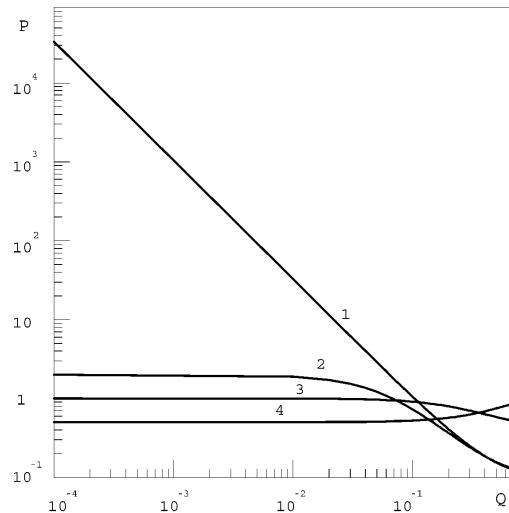


Рис. 5. Утікаючий хвіст функції розподілу попиту при $\nu = 1.5$ та інтенсивностях коливань, зазначених відповідними точками на рис. 4.

Стационарний розподіл попиту для інтенсивностей флюктуацій ціни і виробничої функції, що відповідає

ють точкам 1–4 на рис. 4, має вигляд, показаний на рис. 5. Відповідно до попереднього аналізу впливає, що степенева поведінка, притаманна законові Парето, реалізується за умов $I_Q, I_F \ll I_p$, $p_e = 0$. При цьому функція розподілу набирає вигляду (34), де експоненціальний множник визначається виразом

$$\mathcal{P}(Q) = Z^{-1} d_\nu^{-2}(Q) \exp \left\{ -I_p^{-1} \int \frac{d_\nu^{-2}(Q)}{Q^{\frac{\nu}{2}}} dQ \right\},$$

$$d_\nu(Q) \equiv (1 + Q^\nu)^{-1}. \quad (47)$$

Тут Z – нормуюча стала, а безрозмірна функція попиту Q , віднесена до масштабу Q_c (див. друге рівняння (38)), відіграє роль скейлінгової змінної $\kappa \equiv Q/Q_c$ в (34). Оскільки для $Q \rightarrow 0$ інтеграл у (47) веде себе регулярно, то отриманий розподіл зводиться до степеневого закону Парето (32).

IV. ФРАКТАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ САМОПОДІБНОГО РЕЖИМУ ЕКОНОМІКИ

Ураховуючи визначення інтеграла дробового порядку (див. Додаток), легко помітити, що функція (47) зводиться до інтеграла $\mathcal{I}_{-Q}^{1-\frac{\nu}{2}}$ порядку $1 - \frac{\nu}{2}$:

$$\mathcal{P}(Q) = Z^{-1} d_\nu^{-2}(Q) \times \exp \left\{ -\frac{\Gamma(1 - \frac{\nu}{2})}{I_p} \mathcal{I}_{-Q}^{1-\frac{\nu}{2}} d_\nu^{-2}(Q) \right\}, \quad (48)$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція. З другого боку, відомо [24], що вираз такого типу є розв'язком дробово-диференціального рівняння Фоккера–Планка

$$Q^{-\nu} \mathcal{D}_t^\omega \mathcal{P}(Q, t) = \mathcal{D}_{-Q}^\varpi \times \left\{ Q^{-\frac{\nu}{2}} \mathcal{P}(Q, t) + \frac{I_p}{\Gamma(\varpi)} \mathcal{D}_{-Q}^\varpi [d_\nu^2(Q) \mathcal{P}(Q, t)] \right\}, \quad (49)$$

де дробова похідна \mathcal{D}_x^ϖ , що визначена рівнянням (A.2), являє собою операцію, обернену до дробового інтеграла (A.1); $\omega \leq 1$, $\varpi \leq 1$ – показники диференціювання. Домножуючи рівняння (49) на $Q^{2\varpi}$ та усереднюючи за Q , для середньої величини дробового порядку $\alpha \equiv 2\varpi$

$$|Q| \equiv \langle Q^\alpha \rangle^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \langle Q^\alpha \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} Q^\alpha P(Q, t) dQ, \quad \alpha > 0, \quad (50)$$

де розподіл $P(Q, t)$ задається однорідною функцією (34), отримуємо

$$|Q|^z \sim t, \quad z = \frac{2\varpi}{\omega}. \quad (51)$$

Цей вираз відповідає границі великого часу, де тільки дифузійний внесок є суттєвим, z – динамічний показник. Комбінування рівнянь (48), (51) та (A.1) приводить до співвідношень $1 - \nu/2 = \varpi = z\omega/2$, згідно з якими

$$\nu = 2 - z\omega. \quad (52)$$

У наближенні середнього поля розподіл (34) має показник $\nu = 3/2$, що приводить до співвідношення [25]

$$z\omega = \frac{1}{2}. \quad (53)$$

Якщо процес еволюції системи характеризується відсутністю пасток у просторі станів, то показник похідної за часом набуває стаціонарного значення $\omega = 1$ для динамічного показника $z = \frac{1}{2}$, значення якого менше від граничної величини $z = 1$, що відповідає лінійному закономірності економічної еволюції (51). З іншого боку, дробово-диференціальне рівняння Фоккера–Планка (49) приводить до дифузійного режиму, який відповідає показникові $z = 2$ тільки за малих значень $\omega = \frac{1}{4}$ показника похідної за часом.

Таким чином, у наближенні середнього поля, коли $\nu = \frac{3}{2}$, $\varpi = \frac{1}{4}$, самоподібний режим економічної еволюції характеризується наявністю ефективних пасток у просторі станів, і реалізується режим субдифузії, за умов якого динамічний показник набуває значення $z > 2$ [26]. У результаті показник похідної за часом не перевищує величини $\omega = \frac{1}{4}$.

Розгляньмо зв'язок зазначених показників з параметром деформації q , який визначається ентропією Реньї

$$S_q \equiv \frac{\ln \sum_i P_i^q}{1 - q}, \quad (54)$$

що набуває стандартної форми Больцмана для границі $q \rightarrow 1$ (тут індекс i нумерує статистичні стани). Згідно з [27] еволюція q -деформованої системи зображується нелінійним рівнянням Фоккера–Планка

$$\mathcal{D}_t^\omega P(Q, t) = \mathcal{D}_{-Q}^2 P^q(Q, t) \quad (55)$$

з дробовими показниками $\omega > 0$, $q > 0$ (одиниці вимірювання обрані так, щоб позбутися коефіцієнта дифузії). Для самоподібної нормованої функції розподілу

$$P(Q, t) = Q_c^{-1} \mathcal{P}(\kappa); \quad \kappa \equiv Q/Q_c, \quad Q_c \equiv Q_c(t) \quad (56)$$

отримуємо

$$Q_c^{1+q} \sim t^\omega. \quad (57)$$

З другого боку, використання дробово-диференціального рівняння Фоккера–Планка типу (49)

$$\mathcal{D}_t^\omega P(Q, t) = D_{-Q}^{2\varpi} P(Q, t) \quad (58)$$

приводить до залежності

$$Q_c^{2\varpi} \sim t^\omega. \quad (59)$$

Її порівняння з (57) дає зв'язок

$$1 + q = 2\varpi. \quad (60)$$

Оскільки середнє значення $|Q|$ у (50) зводиться для самоподібних систем до масштабу Q_c , то з рівнянь (51), (57) і (59) випливає співвідношення

$$1 + q = z\omega. \quad (61)$$

Вище ми показали, що типове значення величини $z\omega$ не перевищує 1 (так, у наближенні середнього поля маємо (53)). У результаті виявляється, що умова (61) не виконується і наведений режим економічної еволюції не реалізується. Як відомо [26], такий режим відповідає супердифузії, яка забезпечується польотами Леві, що представляють випадкові (включаючи нескінченні) зміщення блукаючої частинки. Процес супердифузії характеризується динамічним показником $z \equiv 2\varpi/\omega$, величина якого визначається індексом Леві α . Останній задає ймовірність зміщень \mathbf{x}

$$p(\mathbf{x}) \sim x^{-(D+\alpha)} \quad (62)$$

у просторі станів з фрактальною розмірністю D . При $\alpha < 2$ показник z зводиться до індексу Леві ($z = \alpha < 2$), а для $\alpha \geq 2$ відповідає звичайній дифузії ($z = 2$) [28]. Основна особливість польотів Леві полягає в тому, що випадковий процес розвивається безперервно в часі, але дискретно у просторі.

Зовсім протилежну ситуацію спостерігаємо при субдифузії, коли зміщення неперервні в просторі, але, завдяки дії пасток, дискретні в часі. Вище ми бачили, що така ситуація відповідає еволюції надзamoжного прошарку суспільства, де показник похідної за часом $\omega < 1$ набуває дробових значень. На мікроскопічному рівні процес субдифузії зображається розподілом Цалліса [27, 29]

$$p(\mathbf{x}) \propto [1 - \beta(1 - q)x^2]^{\frac{1}{1-q}}, \quad \beta = \text{const} > 0, \quad (63)$$

де параметр $q > 1$ фіксується показником Леві α згідно з рівнянням

$$q = 1 + \frac{2}{D + \alpha}. \quad (64)$$

Порівняно зі стандартним експоненціальним виразом перевага степеневого розподілу (63) полягає в тому, що для всіх показників $\alpha > 0$ він дає скінченні значення q -зваженого середнього

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle_q \equiv \int \mathbf{x}^2 p^q(\mathbf{x}) d^D x, \quad (65)$$

оскільки підінтегральна функція змінюється як $x^{-(1+\alpha)}$. У результаті закон випадкових блукань набуває вигляду

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle_q \sim t^\omega, \quad \omega = \begin{cases} q - 1, & \alpha, q < 2; \\ 1 - (q - 1)\frac{D}{2}, & \alpha \geq 2, q > 1. \end{cases} \quad (66)$$

На відміну від закону супердифузії (59), де $\varpi < 1$, $\omega = 1$, у випадку субдифузії маємо обернені співвідношення $\varpi = 1$, $\omega < 1$, і остання рівність (51) дає динамічний показник $z > 2$. У загальному випадку $\varpi, \omega \neq 1$, підстановка (66) в (61) приводить до рівнянь

$$z = \begin{cases} \frac{1+q}{1-\frac{D}{2}(q-1)}, & 1 < q \leq q_D; \\ \frac{1+q}{q-1}, & q_D \leq q \leq 2, \end{cases} \quad (67)$$

де введено граничний параметр деформації

$$q_D \equiv \frac{4 + D}{2 + D}. \quad (68)$$

Відзначимо, що знайдені співвідношення (66)–(68) визначають процес субдифузії не в реальному геометричному просторі, а в просторі станів з фрактальною розмірністю D .

Проведений розгляд показує, що дія стохастичних джерел і фрактальний зворотний зв'язок дають змогу описати основні особливості економічної структури суспільства на основі системи Лоренца (39). При цьому надзamoжний прошарок стратифікованого суспільства характеризується степеневим розподілом (34), показник ν якого визначається інтенсивністю процесів самоорганізації. З іншого боку, використання дробово-диференціального рівняння Фоккера–Планка (49) показує, що величина ν задається динамічним показником z та показником похідної за часом ω згідно з рівністю (52). У результаті стандартне співвідношення (53) виконується тільки за наявності пасток у просторі станів, де $\omega < 1$. Стосовно економічної системи це означає наявність кризових явищ типу фінансових крахів, що перешкоджають розвиткові суспільства протягом досить тривалого часу. Подібний висновок впливає також із рівняння Фоккера–Планка, записаного в нелінійній формі Цалліса (55). При заданому значенні показника деформації q економічна еволюція відповідає процесові субдифузії, що визначається показником похідної за часом (66) та динамічним показником (67).

ДОДАТОК

Інтеграл дробового порядку ϖ визначається рівнянням [30, 31]

$$\mathcal{I}_x^\varpi f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\varpi)} \int_0^x \frac{f(x')}{(x-x')^{1-\varpi}} dx', \quad \varpi > 0, \quad (\text{A.1})$$

де $f(x)$ — довільна функція, $\Gamma(x)$ — гамма-функція. Похідна $\mathcal{D}_x^\varpi \equiv \mathcal{I}_x^{-\varpi}$ є оберненою операцією:

$$\mathcal{D}_x^\varpi f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(-\varpi)} \int_0^x \frac{f(x')}{(x-x')^{1+\varpi}} dx'. \quad (\text{A.2})$$

У ділянці $0 < \varpi < 1$ зручно використати вираз

$$\mathcal{D}_x^\varpi f(x) \equiv \frac{\varpi}{\Gamma(1-\varpi)} \int_0^x \frac{f(x) - f(x')}{(x-x')^{1+\varpi}} dx', \quad (\text{A.3})$$

де враховане відоме рівняння $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ для $x \equiv -\varpi$.

-
- [1] С. А. Ашманов, *Введение в математическую экономику* (Наука, Москва, 1984).
- [2] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, *An introduction to econophysics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [3] J-P. Bouchaud, M. Potter, *Theory of financial risks* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [4] J. Voit, *The statistical mechanics of financial markets* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2001).
- [5] В. И. Маевский, *Введение в эволюционную экономику* (Япония сегодня, Москва, 1997).
- [6] Р. Р. Нельсон, С. Дж. Уинтер, *Эволюционная теория экономических изменений* (ЗАО “Финстатинформ”, Москва, 2000).
- [7] В. В. Лебедев, *Математическое моделирование социально-экономических процессов* Изограф, Москва, 1997.
- [8] В.-Б. Занг, *Синергетическая экономика: Время и перемены в нелинейной экономической теории* (Мир, Москва, 1999).
- [9] Л. Ларуш, *Физическая экономика как платоновская эпистемологическая основа всех отраслей человеческого знания* (Научная книга, Москва, 1997).
- [10] Д. С. Чернавский, Н. И. Старков, А. В. Щербаков, Усп. физ. наук **172**, №9, 1045, (2002).
- [11] А. И. Олемской, А. А. Кацнельсон, *Синергетика конденсированной среды* (УРСС, Москва, 2003).
- [12] E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).
- [13] A. I. Olemskoi, Physica A **310**, 223 (2002).
- [14] А. И. Олемской, А. В. Хоменко, Журн. эксп. теор. физ. **110**, №6(12), 2144 (1996).
- [15] А. И. Олемской, О. В. Ющенко, Журн. тех. физ. **73**, № 10, 13 (2003).
- [16] A. I. Olemskoi, A. V. Khomenko, Phys. Rev. E **63**, №3, 036116(1–4) (2001).
- [17] H. Risken, *The Fokker–Planck equation* (Springer, Berlin–Heidelberg, 1989).
- [18] P. Bak, *How Nature Works: the Science of Self-Organized Criticality* (Oxford University Press, Oxford, 1997).
- [19] H. J. Jensen, *Self-Organized Criticality. Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems*, in: *Cambridge Lecture Notes in Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [20] Родо Токэй Еран, *Обзор трудовой политики в Японии* (Токио, 1988).
- [21] М. М. Вороновицкий, Экономика и математические методы **33**, вып. 2. (1997).
- [22] D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* (McGraw-Hill, Inc., New York, 1978).
- [23] A. I. Olemskoi, O. V. Yushchenko, Вісн. Сум. ун-ту №8(54), 4 (2003).
- [24] A. I. Saichev, G. M. Zaslavsky, Chaos. **7**, №4, 753 (1997).
- [25] A. I. Olemskoi, A. V. Khomenko, D. O. Kharchenko, Physica A **323**, 263 (2003).
- [26] R. Metzler, J. Klafter, Phys. Rep. **339**, №1, 1 (2000).
- [27] C. Tsallis, in: *Lecture Notes in Physics*, edited by S. Abe, Y. Okamoto (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001).
- [28] H. C. Fogedby, Phys. Rev. E **58**, 1690 (1998).
- [29] D. H. Zanette, P. A. Alemany, Phys. Rev. Lett. **75**, 366 (1995).
- [30] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives – theory and applications* (Gordon and Breach, New-York, 1993).
- [31] *Applications of Fractional Calculus in physics*, edited R. Hilfer (World Scientific, Singapore, 2000).

О. И. ОЛЕМСКОЙ, О. В. ЮЩЕНКО, С. В. КОХАН

SYNERGETIC MODEL FOR THE ECONOMIC SOCIETY STRUCTURE

A. I. Olemskoi, O. V. Yushchenko, S. V. Kokhan

Sumy State University

2 Rimskii-Korsakov St. Sumy, 40007, Ukraine

alex@ufn.ru, kpe@ssu.sumy.ua

A synergetic model allowing to present the economic society structure and crisis phenomena in macroeconomy was developed. It was shown that a deterministic economic system turns into a highly-productive state if the purchasing capacity exceeds the critical value. The economic society structure was presented by demand distribution function the form of which is given by the stationary solution of synergetic equations supplemented with stochastic sources. It was shown that the existence of the super-rich layer is possible only in the presence of crisis phenomena which hinder the society's development during a long time.