

## СКЛАДНІ МЕРЕЖІ

Ю. Головач<sup>1,2</sup>, О. Олемскої<sup>3,4</sup>, К. фон Фербер<sup>5,6</sup>, Т. Головач<sup>7</sup>, О. Мриглод<sup>1,8</sup>, І. Олемскої<sup>4</sup>, В. Пальчиков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Інститут фізики конденсованих систем НАН України, 79011, Львів, Україна

<sup>2</sup>Інститут теоретичної фізики університету Йогана Кеплера, 4040, Лінц, Австрія

<sup>3</sup>Інститут прикладної фізики НАН України, 79011, Суми, Україна

<sup>4</sup>Сумський державний університет, 40007, Суми, Україна

<sup>5</sup>Дослідний центр прикладної математики університету м. Кавентрі, Кавентрі CV1 5FB, Великобританія

<sup>6</sup>Відділення теоретичної фізики полімерів університету м. Фрайбурґ, 79104, Фрайбурґ, Німеччина

<sup>7</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, Львів, Україна

<sup>8</sup>Національний університет "Львівська політехніка", 79013, Львів, Україна

(Отримано 19 грудня 2006 р.)

Здійснено огляд недавніх результатів емпіричних, числових та теоретичних досліджень складних мереж, що описують багато систем у природі й суспільстві. Прикладами можуть бути інтернет, www, нейронні, транспортні, розподільчі, соціальні мережі, мережі метаболізму, харчування, цитування та багато інших. Лише нещодавно фізики почали аналізувати мережі теоретично й емпірично, перші статті датовані кінцем 1990-их років. Мета досліджень змінилася від аналізу невеликих графів і властивостей окремих вершин та ребер до розгляду статистичних властивостей цих графів (мереж). Зі зміною мети змінилися й методи аналізу.

У статті коротко описано розвиток науки про мережі та охарактеризовано властивості деяких природних мереж і мереж, що виникли внаслідок життєдіяльності людини. Наведено приклади трьох основних моделей мереж: класичного випадкового графа Ердоша–Рені, тісного світу Ваттса–Строґаца та безмасштабної мережі Барабаші–Альберта. Подано вступ до статистичної механіки складних мереж, а також розглянуто задачі, пов'язані з фазовими переходами та критичними явищами. Зокрема проаналізовано різноманітні явища, пов'язані з мережами, які можна описати в термінах теорії перколяції.

**Ключові слова:** мережі, випадкові графи, складні системи, критичні явища, перколяція.

PACS number(s): 01.90.+g, 89.75.Hc, 89.75.Da, 05.50.+q, 64.60.Ak

### Зміст

I	Вступ. Складні мережі з погляду фізика	248	4	Представлення графа моделлю ґраткового газу . . . . .	266
II	Народження науки про мережі.		5	Ансамблі вироджених графів . . . . .	267
	Короткий огляд . . . . .	249	6	Статистика випадкових графів . . . . .	267
	A Як усе починалось . . . . .	249	B	Самоподібні ансамблі графів . . . . .	269
	B Характеристики мереж . . . . .	250	C	Складність самоподібних мереж . . . . .	271
	C Основні типи природних і штучних мереж	252	VI	Фазові переходи і критичні явища	274
III	Моделі мереж	253	A	Теорія Ландау . . . . .	274
	A Класичний випадковий граф Ердоша–Рені	254	B	Мережі тісного світу . . . . .	275
	B Модель Ваттса–Строґаца . . . . .	254	1	Модель Ізинґа на мережах тісного світу	275
	C Сценарій переважного приєднання		2	XУ-модель на мережах тісного світу . . . . .	276
	Барабаші–Альберта . . . . .	255	C	Модель Ізинґа на безмасштабних мережах	277
IV	Топологічні властивості деяких реальних		1	Загальний випадковий безмасштабний граф . . . . .	277
	мереж. Емпіричні результати	256	2	Мережі Барабаші–Альберта . . . . .	278
	A Мережі співпраці . . . . .	256	D	Урахування структурного безладу . . . . .	279
	B Мережі громадського транспорту . . . . .	259	VII	Перколяція і складні мережі	279
	C Комп'ютерні мережі . . . . .	261	A	Перколяція як критичне явище . . . . .	279
V	Статистична фізика складних мереж	263	B	Перколяція на випадковому графі Ердоша–Рені, ґратці Бете і мережі тісного світу Ваттса–Строґаца. Критерій Моллоя–Ріда . . . . .	280
	A Експоненційні ансамблі графів . . . . .	264	C	Вразливість безмасштабних мереж до атак	281
	1 Енергетично визначені ансамблі графів	264	D	Поширення епідемій та імунізація . . . . .	283
	2 Ансамблі графів, які не володіють енергією . . . . .	265	VIII	Висновки: погляд у майбутнє	285
	3 Різні означення енергій графів . . . . .	265			

## І. ВСТУП. СКЛАДНІ МЕРЕЖІ З ПОГЛЯДУ ФІЗИКА

Визначаючи першість експерименту, його поєднання з теоретичним обґрунтуванням та симуляціями, використовуючи математику як інструмент та мову аналізу й застосовуючи моделювання, фізика була й залишається архетипом природничої науки. Упродовж останніх десятиліть ми маємо змогу спостерігати спричинене цим явище — фізика (або, принаймні, фізики) розширює коло своїх зацікавлень, удаючись до аналізу проблем, які спочатку були традиційними об'єктами досліджень інших наук. Одна з таких проблем, а саме теорія складних мереж, є предметом нашого огляду.

Мережею (network) називається сукупність вузлів, що поєднані зв'язками (див. рис. 1).

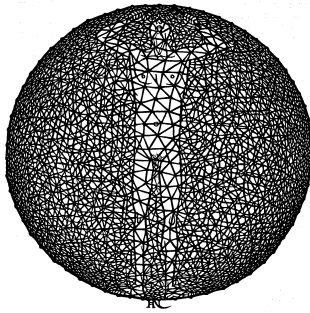


Рис. 1. З погляду теорії мереж, дереворит Я. Гніздовського “Конструктор” — це *мережа*, що складається з  $N$  вузлів, які поєднані  $M$  зв'язками. Кількість вузлів  $N$  у мережах, які досліджуються в наш час, коливається від  $10^3$  до  $10^{10}$ . Кожна окрема мережа є представником ансамблю мереж, що містить мережі, побудовані згідно з певними правилами. Такий ансамбль характеризується функцією розподілу ступенів вузлів  $P(k)$  — імовірністю того, що випадково обраний вузол  $i$  має ступінь  $k_i = k$ .

У математичній літературі прийнято вживати термін “граф”. Теорія графів — це одна з частин дискретної математики [1, 2]. Типовий приклад графа подано на рис. 2.

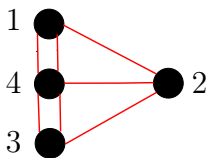


Рис. 2. Зображений на рисунку граф має  $N = 4$  вершини, які пов'язані за допомогою  $M = 7$  ребер. Вершини 1, 2, і 3 мають ступінь три ( $k_1 = k_2 = k_3 = 3$ ), вершина 4 має ступінь п'ять ( $k_4 = 5$ ).

Поняття мережі стало одним із центральних понять нашого часу. Вибух зацікавлення ними — це культурне й соціальне явище, яке відбулося наприкінці минулого століття [3–13].

Існує багато систем, що мають форму мережі: це інтернет, www, нейронні мережі, мережі метаболізму, харчування, транспортні, розподільчі (наприклад, кровоносні артерії чи поштова служба), соціальні мережі, мережі цитування та багато інших. Лише нещодавно фізики почали аналізувати мережі теоретично й емпірично, перші статті датовані кінцем 1990-их років. Мета досліджень змінилася від аналізу невеликих графів та властивостей окремих вершин і ребер (див. рис. 2) до розгляду статистичних властивостей цих графів (мереж). Зі зміною мети змінилися й методи аналізу. Народження “науки про мережі” відбулося внаслідок розвитку комп'ютерних технологій: www надає порівняно легкий доступ до баз даних з інформацією про різноманітні мережі й водночас потужність комп'ютерів дозволяє докладно їх аналізувати (що було би просто неможливо в іншому випадку, враховуючи розміри досліджуваних мереж). Отож, це був саме той момент, коли фізика мала б долучитися як до традиційного емпіричного вивчення мереж, так і до їх моделювання та спроб теоретичного аналізу.

Певний тип мереж, так звані нейронні мережі, цікавив фізиків і раніше. Вони й надалі є об'єктом досліджень [14], проте їхні властивості не настільки визначаються топологією мережі (в принципі, кожен вузол пов'язаний зі всіма іншими), як вагою зв'язків і станом вузлів. Тоді як у поведінці мереж, про які йтиме мова в цьому огляді, топологія відіграє провідну роль. Щоб означити такі об'єкти й коло досліджуваних питань, часто вживається термін *складні мережі* (complex networks). Відзначимо також споріднені питання, якими цікавляться у фізиці та хемії полімерів складної топології — полімерних мереж [15, 16].

Виявляється [17–20], що найважливіші мережі, які виникають унаслідок людської життєдіяльності, та природні мережі мають специфічну структуру, що характеризується розподілом ступенів вузлів із товстим хвостом (fat-tail distribution) і сильно відрізняється від структури вже дослідженого в математиці класичного випадкового графа [21, 22]. Зазвичай ці мережі не статичні, а такі, що розвиваються, і для розуміння їхньої структури необхідно знати принципи їх еволюції.

На сьогодні маємо багато літератури про мережі. Їм присвячують цілі журнали чи секції журналів. Для прикладу, серед статей, опублікованих у 2005 у журналі Physical Review, секції B, E та Letters, 446 статей містять у заголовку чи в анотації слово “мережа”. Мета нашого огляду — поглянути на мережі з погляду фізика, докладніше зупиняючись на тих проблемах, які цікавлять нас на цей момент. Ознайомивши українського читача з цим захопливим предметом, сподіваємось у такий спосіб привернути до нього увагу і в Україні. Більше інформації про мережі можна знайти в недавніх оглядових статтях [3–7] та книжках [8, 9]. Для попереднього ознайомлення варто переглянути книжки [10–13].

Структура огляду є такою: в наступному розділі II ми розповімо про етапи розвитку науки про ме-

режі, уведемо елементи теорії графів, означимо основні величини, що використовуються для кількісного опису мереж, а також коротко опишемо деякі властивості природних мереж і мереж, що виникли внаслідок життєдіяльності людини. У III розділі наведемо приклади трьох основних моделей мереж: класичного випадкового графа Ердоша–Рені, тісного світу Ваттса–Строгаца та безмасштабної мережі Барабаші–Альберта. IV розділ присвячений детальнішому розгляду трьох типів мереж: мереж співпраці, мереж громадського транспорту та комп'ютерних мереж. Цей розділ, як і наступні, акцентують увагу на тих питаннях, які пов'язані з дослідженнями авторів огляду. Вступ до статистичної механіки складних мереж подано в розділі V, розділ VI присвячено задачам, пов'язаним з фазовими переходами та критичними явищами, а в VII розділі йдеться про різноманітні явища, пов'язані з мережами, які можна описати в термінах теорії перколяції. У розділі VIII ми формулюємо певний загальний погляд на нову науку про мережі, що зароджується в наш час, а в додатку перелічуємо основні терміни теорії мереж.

## II. НАРОДЖЕННЯ НАУКИ ПРО МЕРЕЖІ. КОРОТКИЙ ОГЛЯД

У цьому розділі ми коротко розглянемо історію виникнення науки про мережі, уведемо елементи теорії графів, означимо головні спостережувані величини, що використовуються для кількісного опису мереж, а також коротко опишемо деякі властивості природних мереж і мереж, що виникли внаслідок життєдіяльності людини.

### А. Як усе починалось

Виникнення теорії графів пов'язують з іменем Леонарда Ойлера (Leonard Euler) та його знаменитим розв'язком задачі про сім мостів Кьонігсберга (чи радше, доведенням неіснування розв'язку). Тож граф на рис. 2 — найстаріший у теорії графів: його ребра відповідають мостам, що з'єднують острів Кнайпенгоф у Кьонігсберзі з берегами. Леонард Ойлер інтерпретував задачу пошуку такого неперервного шляху, що не перетинає сам себе і пройшов через усі мости, як граф (рис. 2), та спричинив виникнення теорії графів. Початки теорії графів також пов'язані з роботами Френсиса Гасрі (Francis Guthrie), який, розфарбовуючи карту графств Англії, сформулював задачу чотирьох кольорів: чи можливо, використовуючи лише чотири кольори, розфарбувати будь-яку карту так, щоб жодні суміжні області не були зафарбовані одним кольором. Розв'язуючи цю задачу, математики відкрили багато фундаментальних величин і понять теорії графів. Чимало видатних математиків зробили свій внесок у розвиток цієї теорії, яка в результаті лягла у фундамент дискретної математики [1].



Рис. 3. Леонард Ойлер (1707–1783). У 1736 опублікував статтю *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, яка стала першою роботою з теорії графів.



Рис. 4. Френсис Гасрі (1831–1899). У 1852 сформулював задачу про чотири кольори, яка більш ніж століття була однією з найвідоміших нерозв'язаних задач у математиці. Зрештою, правильність її твердження довели в 1976, використовуючи контраверсійний метод перебору за допомогою комп'ютера.

У фізиці вперше теорію графів застосував Густав Кірхгофф (Gustav Kirchhoff), увівши правила для обчислення напруги і струму в електричних колах. У XX столітті застосування теорії графів поширилось і на інші галузі науки.

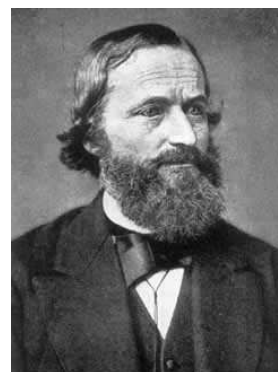


Рис. 5. Густав Роберт Кірхгофф (1824–1887). У 1845 він опублікував правила для електричного кола (правила Кірхгоффа), почавши застосовувати графи у фізиці.

Так, соціологія застосовує переважно емпіричний аналіз для встановлення зв'язків між членами суспільства. Відображення цих зв'язків у формі графа дозволяє вивчити їх кількісно (див. також розділ IV). Двома визначними прикладами є дослідження, проведені наприкінці 60-их — на початку 70-их років минулого століття. У 1967 С. Мілгрем опублікував результати такого експерименту [23]. Випадково вибраним особам у США надіслали листи. Кожен лист містив ім'я особи-цілі і прохання переслати цього листа своєму знайомому, якщо адресат не знає особи-цілі особисто. Із опису того, як розіслані листи досягнули ціль, Мілгрем зробив висновок про те, що середня відстань між двома членами суспільства становить шість кроків (шість проміжних знайомств). Це явище, також відоме як “шість ступенів розділення”, стало попередником ефекту тісного світу, відкритого згодом для багатьох мереж [13] (див. розділ III). Другим прикладом є дослідження, що провів М. Греноветтер [24], який запровадив у соціальних мережах концепцію сильних і слабких зв'язків. Його твердження про важливість слабких зв'язків базується на дослідженні, у якому проводили опитування, як і через кого працівники-“білі комірці” знайшли своє місце праці. Стаття, у якій він оприлюднив своє твердження про те, що переважно слабкі зв'язки (побічні контакти в мережі знайомств) дають змогу знайти нове місце праці, стала найбільш цитованою роботою в економічній соціології [24]. Теорія графів розвивалася завдяки застосуванню її в соціологічних працях, багато її термінів походять із соціологічного використання (наприклад “betweenness” — посередництво, див. нижче).



Рис. 6. Пауль Ердош (1913–1996) [25]. Разом із своїми майже 500 співавторами він дає чудовий приклад мережі співпраці. За оцінками, 90% активних математиків усього світу мають число Ердоша (відстань до нього виміряна в актах співавторства) менше ніж 8.

Об'єктом, що інтенсивно досліджувався в теорії графів і безпосередньо пов'язаний із складними мережами, є класичний випадковий граф, або випадковий граф Ердоша–Рені. Його ввели і дослідили наприкінці 1950-их Пауль Ердош (Paul Erdős) і Альфред Рені (Alfréd Rényi) [21] (див. також [22]). Ми дамо означення цього графа й обговоримо деякі його властивості в розділі III. Зараз ми лише скажемо, що він складається з  $N$  вершин, випадково зв'язаних  $M$  ребрами, і

що теорія випадкових графів вивчає властивості цього графа в границі  $N \rightarrow \infty$ .



Рис. 7. Альфред Рені (1921–1970) [26]. Разом із Паулем Ердошем він запровадив у 1959 р. класичний випадковий граф.

Згодом теорію графів використовували й розвивали в інформатиці, кібернетиці, біології. Фізики з'явилися на сцені лише наприкінці 1990-их, коли було проаналізовано багато природних та штучних мереж [17–20] (див. підрозділ II C) і виявилось, що їхні властивості не мають нічого спільного з властивостями класичного випадкового графа — чи не єдиного об'єкта теорії графів упродовж майже 40 років! Складні мережі виявилися тісними світами з короткою відстанню між вузлами, високим рівнем кореляції й самоорганізацією. Вони виявились надзвичайно стійкими до випадкового усунення вузлів [27, 28], однак вразливими до спрямованих атак. Певні їхні властивості підлягали степеневим законам, що стало сигналом про нетривіальні кореляції, притаманні їхній структурі [29]. Таким чином, це був час і місце для фізиків зацікавитись аналізом складних мереж. Перш ніж наводити більше даних про поведінку складних мереж (ми зробимо це в підрозділі II C і розділі IV), опишемо основні спостережувані величини, які використовуються для кількісного опису мереж.

## В. Характеристики мереж

Ми вживатимемо паралельно терміни *вузол* (node) і *вершина* (vertex) (відповідно, *зв'язок* (link) і *ребро* (edge)), говорячи і про прості графи, і про їхні складні ансамблі, мережі. Ступінь вузла  $k$  — це кількість зв'язків, приєднаних до цього вузла (див. рис. 2). Зв'язки можуть бути неспрямованими, як на рис. 2, або спрямованими (входити у вузол або виходити з нього, тоді говорять про вхідний (in-degree) та вихідний (out-degree) ступені відповідно). Повна інформація про мережу міститься в її *матриці суміжності* (adjacency matrix)  $\hat{A}$ . Для мережі з  $N$  вузлів (тут ми здебільшого говоритимемо про мережу, що не містить кратних зв'язків та петель)  $\hat{A}$  є квадратною матрицею  $N \times N$ . Її елементи  $a_{ij}$  дорівнюють 1, якщо вузли  $i$  та  $j$  з'єднані між собою, та 0, якщо ці вузли не з'єднані.

Для неспрямованих мереж  $a_{ij} = a_{ji}$  та  $a_{ii} = 0$ . Тоді для ступеня  $k_i$  вузла  $i$  отримуємо:

$$k_i = \sum_j a_{ij}. \quad (2.1)$$

Тут і нижче підсумовування ведеться за всіма  $N$  вузлами мережі.

Щоб охарактеризувати “лінійний розмір” мережі, корисні поняття середнього  $\langle \ell \rangle$  і максимального  $\ell_{\max}$  найкоротших шляхів. Для зв’язної мережі з  $N$  вузлів середній найкоротший шлях означається як

$$\langle \ell \rangle = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i>j} \ell_{ij}, \quad (2.2)$$

де  $\ell_{ij}$  — довжина найкоротшого шляху між вузлами  $i$  та  $j$ . Тут і далі ми покликаємось на рис. 8, де наведені конкретні приклади. Відповідно, максимальний найкоротший шлях — це найбільше значення з усіх  $\ell_{ij}$ , заданих для цієї мережі. Зазначимо, що довжина найкоротшого шляху  $\ell$  між вузлами  $i$  та  $j$  дорівнює мінімальному степеневі матриці суміжності з ненульовим елементом  $\{ij\}$  [1, 8]:

$$(\hat{A}^{\ell-1})_{ij} = 0, \quad (\hat{A}^{\ell})_{ij} \neq 0. \quad (2.3)$$

Тоді як середня довжина найкоротшого шляху дає уявлення про цілу мережу і є глобальною характеристикою, означений нижче коефіцієнт кластерності є локальною величиною, він характеризує окремий вузол. Для заданого вузла  $m$  коефіцієнт кластерності  $C_m$  означаємо як відношення наявної кількості зв’язків  $E_m$  між його найближчими сусідами до максимально можливої кількості таких зв’язків (див. рис. 8):

$$C_m = \frac{2E_m}{k_m(k_m-1)}. \quad (2.4)$$

Щоб отримати (2.4), зауважимо, що для вузла ступеня  $k_m$  максимальна кількість зв’язків між найближчими сусідами дорівнює  $k_m(k_m-1)/2$ . Коефіцієнт кластерності мережі  $C$  означаємо як середнє значення  $C_m$  всіх її вузлів або через матрицю суміжності [8]:

$$C = \frac{1}{9} \frac{\sum_i (\hat{A}^3)_{ii}}{\sum_{i \neq j} (\hat{A}^2)_{ij}}. \quad (2.5)$$

Коефіцієнт кластерності показує, скільки найближчих сусідів заданого вузла є також найближчими сусідами один для одного. Він характеризує тенденцію до утворення груп взаємопов’язаних вузлів, так званих клік (clique). З означення (2.5) випливає, що коефіцієнт кластерності будь-якого з вузлів дерева, тобто графа, що не містить жодних циклів, дорівнює нулеві. А коефіцієнт кластерності будь-якого вузла повністю з’єднаної мережі (а complete graph) дорівнює одиниці.  $C$  вказує на ймовірність існування зв’язку між двома випадково взятими найближчими сусідами вузла, а також містить інформацію про

наявність у мережі циклів довжиною три. Наявність циклів є специфічною формою кореляції в мережах. Для реально існуючих мереж типовими є висока скорельованість та велике значення коефіцієнта кластерності (див. розділи II C, IV).

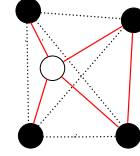


Рис. 8. Граф, що складається з  $N = 5$  вузлів та  $M = 5$  зв’язків (показані суцільними лініями). Він характеризується максимальною довжиною найкоротшого шляху  $\ell_{\max} = 2$  і середньою довжиною найкоротшого шляху  $\langle \ell \rangle = 3/2$ . Щоб обчислити коефіцієнт кластерності вузла  $m$  (відкритий кружечок,  $k_m = 4$ ), ми ділимо наявну кількість зв’язків між його найближчими сусідами,  $E_m = 1$ , на максимально можливу кількість зв’язків між ними  $k_m(k_m-1)/2$  (решта можливих зв’язків показана штриховими лініями) і отримуємо  $C_m = 1/6$ . Застосовуючи р-ня (2.6), отримуємо, що посередництво вузла  $m$  дорівнює  $\sigma_m = 5$ .

Іншою характеристикою вузла є посередництво (betweenness). Вона відображає роль вузла в установленні зв’язків у мережі й показує, скільки найкоротших шляхів проходить через цей вузол. Ця характеристика була вперше запропонована в соціології, де особи (вузли) з більшим посередництвом відіграють головну роль у встановленні зв’язків між іншими вузлами мережі. Посередництво  $\sigma_m$  вузла  $m$  означаємо як

$$\sigma(m) = \sum_{i \neq j} \frac{B(i, m, j)}{B(i, j)}, \quad (2.6)$$

де  $B(i, j)$  — загальна кількість найкоротших шляхів між вузлами  $i$  та  $j$ ,  $B(i, m, j)$  — кількість найкоротших шляхів між  $i$  та  $j$ , таких, що проходять через вузол  $m$ . Величину  $\sigma(m)$  також називають навантаженням (load) чи центральністю посередництва (betweenness centrality) вузла [8].

Однією з головних характеристик мережі є розподіл ступенів вузлів  $P(k)$ , що визначається як ймовірність того, що вузол  $i$  має ступінь  $k_i = k$ . Під час дослідження виявилось, що мережі, які характеризуються різними  $P(k)$ , демонструють дуже різноманітну поведінку, подібно до різних класів універсальності в теорії критичних явищ [30, 31]. Деякі найчастіше спостережувані приклади розподілу ступенів вузлів показані на рис. 9. А саме, розподіл Пуассона:

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}, \quad (2.7)$$

експоненційний розподіл:

$$P(k) \sim e^{-k/\langle k \rangle}, \quad (2.8)$$

степеневий розподіл:

$$P(k) \sim 1/k^\gamma, \quad k \neq 0, \quad \gamma > 0. \quad (2.9)$$

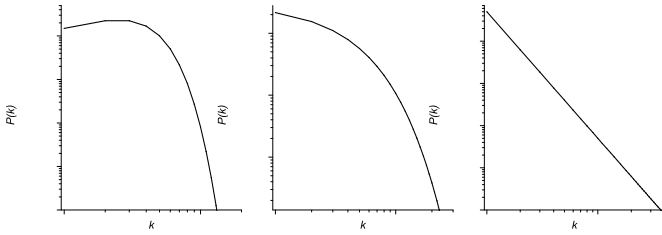


Рис. 9. Розподіл ступенів вузлів  $P(k)$  в log-log масштабі. Зліва направо: розподіл Пуассона  $P(k) = e^{-(k)} \frac{(k)^k}{k!}$ , експоненційний  $P(k) \sim e^{-k/(k)}$  і степеневий  $P(k) \sim 1/k^\gamma$  розподіли.

Попри те, що всі вище наведені функції  $P(k)$  спадають при великих  $k$ , принципова відмінність між розподілами (2.7), (2.8), з одного боку, і розподілом (2.9), з іншого, полягає в тому, що і (2.7), і (2.8) характеризуються певним масштабом. Це положення максимуму для розподілу Пуассона чи характерна довжина спадання для експоненційного розподілу. Водночас степеневий розподіл (2.9) не характеризується типовим масштабом. Мережі зі степеневим розподілом ступенів вузлів (2.9) називають *безмасштабними* (scale-free) мережами. Як буде показано в наступних розділах, саме безмасштабні розподіли часто спостерігаються в складних реально існуючих мережах.

Інша принципова відмінність цих розподілів полягає в тому, що всі моменти  $P(k)$  існують для розподілів (2.7), (2.8), але не для безмасштабного розподілу (2.9). Справді, для  $P(k)$  (2.9) моменти

$$M_n = \sum_{k=0}^{\infty} k^n P(k) \quad \text{з } n \geq \gamma - 1 \quad (2.10)$$

розбіжні. При степеневому розподілі можливе існування вузлів з дуже високим ступенем (габів, hubs), які практично відсутні в мережах із пуассоновим чи експоненційним розподілами (2.7), (2.8). Саме наявність габів пояснює поведінку моментів (2.10) і спричиняє багато інших специфічних властивостей безмасштабних мереж.

### С. Основні типи природних і штучних мереж

Як ми вже зазначали у вступі, більшість важливих мереж, що існують у природі, безмасштабні. У цьому підрозділі ми перелічимо деякі з них, не претендуючи на вичерпність. Докладніший опис кількох мереж ми зробимо в розділі IV після того, як ознайомимося з моделями мереж у розділі III.

Чи не найтривалішу історію має вивчення соціальних мереж. Перші спроби виразити соціальні відносини людей у вигляді мережі належать до 30-их років ХХ століття [5]. Залежно від поставленої задачі, вершинами соціальної мережі можуть виступати окремі особи, групи людей або цілі установи [32]. Означення

зв'язку між вершинами залежить від типу мережі: дві вершини з'єднані, якщо відповідні люди знайомі чи дружать між собою (мережа знайомих), перебувають у шлюбі, пов'язані діловими контактами тощо (див. рис. 10). Вивчення соціальних мереж було зумовлене, передусім, бажанням дослідити картину взаємодії людей. Окрім того, існує й чисто практичний інтерес до розкриття законів поширення в суспільстві потоків інформації, захворювань, різних уподобань, політичних переконань тощо [32]. При цьому загальні характеристики складних мереж набувають специфічних інтерпретацій при їх застосуванні до конкретної сфери. Для прикладу, ступінь вершини в мережі знайомих показує рівень комунікабельності особи, тобто кількість її соціальних контактів, а середнє значення цього параметра впливає на поширення в суспільстві різноманітних чуток або ж, скажімо, віянь моди. Сукупність методів вивчення механізмів формування соціальних відносин є предметом *соціометрії*, у межах якої вперше почали конструювати невеликі соціальні мережі [5]: мережа стосунків між школярами (Jacob Moreno, 1934 р.); соціальні зв'язки між жінками в одному з міст Південної Америки (Davis, Gardner and Gardner, 1936 р.); соціальна мережа робітників заводу в Чикаго (Elton Mayo, 1930 р.) та інші.

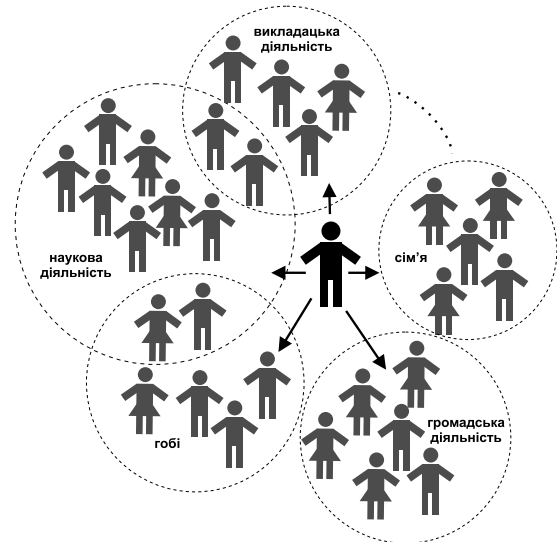


Рис. 10. Усіх людей, з якими певна особа перебуває в соціальних відносинах різного роду, можна погрупувати за належністю до тієї чи іншої сфери життєдіяльності людини. Не виключена належність одночасно до декількох груп інтересів. Будь-яка людина одночасно належить до соціальних мереж різного типу: співпраці, дружби, знайомства, сімейних та сексуальних стосунків тощо.

Необхідно наголосити, що як об'єкти досліджень соціальні мережі мають низку недоліків. Найважливішим із них є те, що, з погляду статистики, недостатньо великим, як правило, є розмір мережі (обмеження на кількість працівників заводу, студентів коледжу, жителів міста і т. д.). Виявити ж характерні властивості та закономірності формування мереж до-

звояє досить великий їхній розмір. Окрім того, для цього типу мереж часто буває важко чітко означити поняття зв'язку. Наприклад, означення “знайомого” або “друга” можуть сильно відрізнятись з погляду різних людей [32]. Мережі, у яких поняття зв'язку чіткіше означене, — це мережі співпраці (collaboration networks). Залишаючи означення вершин практично незмінними, зв'язки в таких мережах встановлюються за фактом співпраці, що, як правило, є добре задокументованим. Докладніше на них ми зупинимось в підрозділі IV В. Ще одним способом установалення соціальних стосунків між людьми й опису їх у термінах теорії складних мереж є аналіз телефонних сполучень (див., наприклад, [33]), обігу e-mail'ів [34, 35], листування. У першому випадку вузлами є телефонні номери (абоненти), а спрямований зв'язок відповідає викликові одного абонента іншим, у двох інших випадках вузли — це адреси, а спрямовані зв'язки — надіслані e-mail'и чи листи.

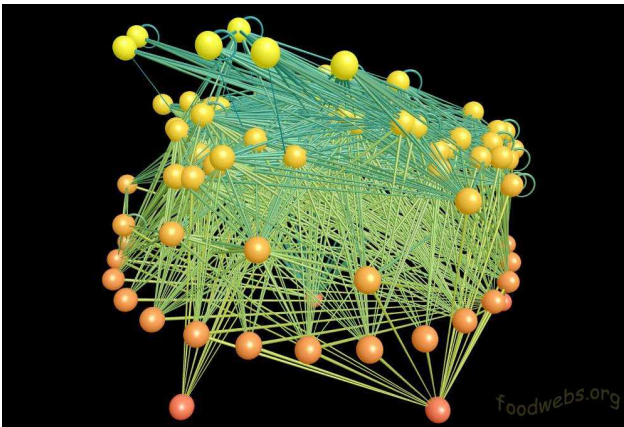


Рис. 11. Приклад добре задокументованої мережі харчування великої природної екосистеми — карибського рифу [43]. Мережа показує зв'язки харчування між різними організмами, що населяють риф. Вузли різних відтінків відповідають різним трофічним рівням. Темніший вузол відповідає нижчому рівню у трофічному ланцюгу.

Найбільшою мережею з доступною інформацією про топологічну структуру є мережа www. Вузли цієї мережі — це документи (веб-сторінки), а спрямовані зв'язки — це гіперлінки, що спрямовують від одного документа до іншого. За станом на січень 2005 р. публічно індексований веб налічував  $11.5 \cdot 10^9$  вузлів, причому розмір так званого глибокого чи невидимого вебу (deep web) оцінюється в декілька порядків більшим [36]. Зауважимо, що інформацію про www отримуємо “повзанням” по мережі, а це, своєю чергою, спричиняє недооцінку тих документів, що мають малу цитованість. Відкриття того, що мережа www безмасштабна, сталося наприкінці 1990-их [18, 37–40, 173] і викликало значне зацікавлення безмасштабними мережами як такими. У результаті аналізу підмножини вебу nd.edu, що складалася на ту пору з 325729 вузлів, отримано in- і out- показники для розподілу ступенів

вузлів  $\gamma_{in} = 2.1$ ,  $\gamma_{out} = 2.45$  [18], а дослідження іншої підмножини, що складалася з  $40 \cdot 10^6$  документів, привели до оцінок  $\gamma_{in} = 2.1$ ,  $\gamma_{out} = 2.38$  [37, 38]. Деяко інакше формулювання мережі, коли вузлу ставилось у відповідність ім'я окремого домену, а зв'язок означав, що якийсь із документів цього домену містить поклик на документ іншого домену, привело до оцінки  $\gamma_{in}^{dom} = 1.94$  [40]. Мережа www виявилася мережею тісного світу з такими оцінками середньої довжини найкоротшого шляху:  $\langle \ell \rangle = 11.2$  (на підставі аналізу 325729 документів) і  $\langle \ell \rangle \simeq 19$  (передбачення за допомогою скінченорозмірного скейлінгу для  $800 \cdot 10^6$  документів) [18];  $\langle \ell \rangle = 16$  (на підставі аналізу  $50 \cdot 10^6$  документів) [173];  $\langle \ell \rangle = 3.1$  (на доменному рівні) [3, 42]. Про скорельованість мережі свідчить велике значення коефіцієнта кластерності  $C = 0.153127$  (пор. із  $C = 0.00023$  для класичного випадкового графа такого ж розміру) [3, 42].

Згадані дотепер у цьому підрозділі мережі виникли в результаті діяльності людини. Крім соціальних та деяких інформаційних (www, мережа цитування), до таких мереж можна віднести технологічні транспортні мережі (мережі ліній електропередач, авіаліній та залізниць, мережі транспортування нафти й газу, мережу інтернету, мережі громадського транспорту — докладніше про них див. у розділі IV). Як приклад мереж, що існують у природі й безпосередньо не пов'язані з діяльністю людини, вкажемо на мережі метаболізму (обміну речовин) у живих організмах — де вузлами є речовини, а зв'язки означають, що дві речовини можуть брати участь у спільній хемічній реакції. На прикладі аналізу мереж метаболізму 43 різних організмів [19] установлено, що вони є безмасштабними з показником  $\gamma$ , що змінюється в межах  $\gamma = 2 \div 2.4$ . Про ефект тісного світу в цих мережах свідчить низьке значення середнього найкоротшого шляху та високий коефіцієнт кластерності. Так, для бактерії *Escheria coli*  $\langle \ell \rangle = 2.9$ ,  $C = 0.32$  [3, 44]. Ще одним прикладом є екологічні мережі, так звані мережі харчування (food webs) [45, 46]. Вузли в такій мережі відповідають різним видам, що населяють задану екосистему, а зв'язки вказують на стосунки жертва-хижак (див. рис. 11). Хоча розмір досліджених дотепер мереж харчування невеликий і є порядку декількох сотень, ці мережі також виявляють тенденцію до безмасштабної поведінки і є тісними світами [47, 48].

### III. МОДЕЛІ МЕРЕЖ

Існує багато моделей, покликаних пояснити ті явища, що відбуваються за участю складних мереж. У цьому розділі ми зупинимось лише на трьох головних моделях, що значною мірою спричинили сьогоденне розуміння складних мереж. Це класичний випадковий граф Ердоша–Рені (як уже згадувалося вище, мережі реального світу, як правило, не описуються цим графом), мережа тісного світу Ваттса–Строгаца та безмасштабна мережа Барабаші–Альберта. На відміну від двох перших, остання модель є прикладом

зростаючої мережі. Як виявилось, саме моделі, що враховують зростання мереж, приводять до степеневих розподілів ступенів вузлів.

### А. Класичний випадковий граф Ердоша–Рені

Цей тип мереж є класичним прикладом рівноважного ансамблю графів, що включає сталу кількість вершин  $N$ . Існують дві моделі класичного випадкового графа: у першій вважається, що  $M$  ребер розподілені довільно та незалежно між парами з  $N$  вершин графа; у другій моделі фіксується ймовірність  $m$ , з якою може об'єднуватися кожна пара вершин. Як буде показано в розділі V A 6, при  $m \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  для обох варіантів розподіл ступенів вузлів  $k$  визначається формулою Пуассона (2.7), де середнє значення ступеня вузла:  $\langle k \rangle = 2M/N$  для першої моделі та  $\langle k \rangle = mN$  для другої. Якщо розглядати ребра як частинки, то модель зі сталою кількістю вершин  $N$  відповідає мікроканонічному ансамблю графів, оскільки кожна конфігурація генерується з однаковою ймовірністю. У межах моделі з фіксованою ймовірністю  $m$  постійним є лише середнє значення кількості частинок  $\langle M \rangle = mN(N-1)/2$ , що відповідає використанню великого канонічного ансамблю графів. У межі  $N \rightarrow \infty$  багато характеристик випадкового графа можна отримати точно [21, 22]. Зокрема, середня довжина найкоротшого шляху (2.2) і коефіцієнт кластерності (2.4) є такими:

$$\langle \ell \rangle \sim \ln(N)/\ln(\langle k \rangle), \quad C \sim \langle k \rangle/N. \quad (3.1)$$

Побудова випадкового графа Ердоша–Рені виконується в результаті генерування, суть якого зводиться до наступного. Нехай на початку є  $N$  ізольованих вершин, до яких послідовно додаються ребра, що випадковим чином з'єднують довільні пари вершин. Під час такого процесу граф спочатку складатиметься із множини малих компонент, розростання яких приведе до утворення гігантського кластера зв'язаних вершин, кількість яких є скінченною частиною загальної кількості  $N$ . Характерним є те, що утворення гігантського кластера спостерігається тільки за умови, що ймовірність  $m$  зв'язування вершин, яка постійно зростає під час генерації, набуває значення, вищого за критичний поріг  $m_c$ . У результаті відбудеться спонтанне утворення гігантського кластера, що нагадує конденсацію краплі води в перенасиченій парі. Такий процес має яскраво виражений характер фазового переходу, в результаті якого частка зв'язаних вершин, що входять у гігантський кластер, визначається виразом [49]

$$G = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} \langle k \rangle^{n-1} e^{-n\langle k \rangle}. \quad (3.2)$$

Він показує, що частка зв'язаних вершин монотонно зростає зі збільшенням середнього ступеня  $\langle k \rangle$ , переходячи від степеневій залежності до експоненційної.

### В. Модель Ватса–Строгаца

Здебільшого моделі складних мереж генерувались на комп'ютерах — як чисельні реалізації графів. Окреме місце займає модель “тісний світ” (small world), яка була усвідомлена задовго до появи обчислювальної техніки. Перебираючи коло своїх найближчих знайомих, а потім — людей, які знають наших найближчих знайомих (але не знають нас особисто), і т. д., легко переконатися в такому: достатньо простежити за невеликим ланцюжком таких знайомств, щоб зрозуміти, що будь-хто з нас опосередковано знайомий із довільно вибраним членом суспільства (наприклад, президентом країни). У такому розумінні наш світ є тісним, звідки й пішла назва моделі — тісний світ.

Комп'ютерну модель тісного світу розробили Ваттс і Строгац [161]. Вона описується так. Розгляньмо одновимірний періодичний ланцюг із  $N$  вершин, замкнутий у кільце (див. рис. 12). Спочатку кожна вершина з'єднується з  $k$  сусідами, де  $k$  — парне додатне число. Потім з певною ймовірністю  $m$  кожне ребро перекидається в довільну позицію. Таку процедуру називають перез'єднуванням (rewiring). Неважко помітити, що така модель зводиться до канонічного ансамблю графів, оскільки кількість ребер є сталою, а значення ймовірності реалізації графів — різні (варіювання кількості випадково перекинутих ребер). З рис. 12 видно, що граф тісного світу реалізується при малих значеннях  $m$  ймовірності перез'єднування, за яких розподіл ступенів вузлів не відрізняється від закону Пуассона (2.7).

Модель Ватса–Строгаца реалізує інтуїтивне уявлення про реально існуючі мережі, топологія яких не є ані цілком регулярною, ані цілком випадковою. Повернімося до рис. 12: для регулярної ґратки, зображеної на рисунку при  $m = 0$  в границі великих  $N$  (точніше, при умові  $N \gg k \gg \ln k \gg 1$ , що забезпечує зв'язність), середня довжина найкоротшого шляху  $\langle \ell \rangle \sim N/2k$ , а коефіцієнт кластерності  $C = 3/4$ . З іншого боку, для цілком неупорядкованої ґратки при  $m = 1$  (випадкового графа, див. попередній підрозділ III A) ці величини задаються формулами (3.1). Порівнюючи характеристики при  $m = 0$  і  $m = 1$ , бачимо, що регулярна ґратка є сильно скорельованим (кластеризованим) “великим світом”, у якому середня довжина найкоротшого шляху зростає з  $N$  лінійно, тоді як неупорядкована мережа є слабо скорельованим тісним світом ( $C \sim k/N \ll 1$ ), у якому  $\langle \ell \rangle$  зростає з  $N$  логарифмічно. Відкриття Ваттса і Строгаца полягало в тому, що ефект тісного світу (різке зменшення середньої довжини найкоротшого шляху) спостерігається вже при малих значеннях  $m$ . На локальному ж рівні такий перехід до тісного світу майже не відчутний (значення  $C$  залишається великим, як у регулярній ґратки). Тепер у літературі тісними світами прийнято називати мережі, середня довжина найкоротшого шляху в яких зростає повільніше, ніж будь-який додатний степінь  $N$  [8]. Зауважимо, що лінійний розмір  $d$ -вимірної регулярної ґратки зростає як  $N^{1/d}$ .



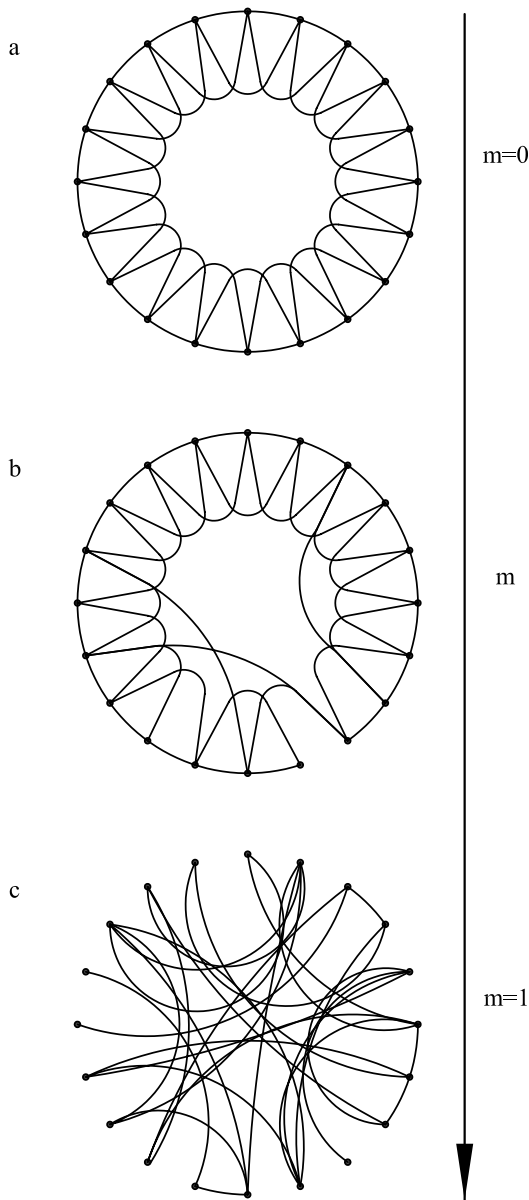


Рис. 12. Схема перебудовування Ватса–Строгаца [161], що показує трансформацію регулярного ланцюга (а) у граф тісного світу (b), а потім — у випадковий граф (с). Параметр  $m$  визначає ймовірність перекидання ребер у випадкові положення.

**С. Сценарій переважного приєднання Барабаші–Альберта**

Як показує досвід, багато реальних графів підлягають *степеневому закону розподілу* (2.9). Згідно з розглядом, що буде проведений у розділі V A, степенева функція є ознакою *самоподібності*. Завдяки далекосяжним кореляціям система не має ніякого масштабу зміни характерних величин (у зв'язку з цим складні мережі, що характеризуються степеневим розподілом, називаються *безмасштабними*). Головна відмін-

ність таких мереж від класичного випадкового графа полягає в тому, що закон розподілу (2.7) останнього має набагато швидше спадаючий хвіст  $1/k! \sim k^{-k}$ , ніж безмасштабний граф.

Сценарій побудови безмасштабних мереж, який запропонували Барабаші й Альберт [29, 39], ґрунтується на двох механізмах, що притаманні багатьом мережам. Це (i) зростання та (ii) переважне приєднання (preferential attachment). Відразу зауважимо, що подібні ідеї висловлювали в контексті походження степеневих розподілів і раніше. Прикладом може бути механізм кумулятивної переваги [51], який запропонував Прайс у 1976 р., чи ще раніше сформульована модель Саймона [52]. Модель Барабаші–Альберта використовує такий алгоритм: (i) зростання мережі відбувається, починаючи з невеликої кількості вузлів ( $n_0$ ), до яких на кожному часовому кроці додається новий вузол з  $n \leq n_0$  зв'язками, що приєднують його до вже наявних вузлів; (ii) переважне приєднання полягає в тому, що ймовірність приєднання  $\Pi$  нового вузла до вже наявного вузла  $i$  залежить від ступеня  $k_i$  вузла  $i$ :

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \tag{3.3}$$

Підсумовування в (3.3) ведеться за всіма вузлами. Оскільки  $\Pi$  пропорційне до першого степеня  $k_i$ , то таку процедуру часом ще називають лінійним переважним приєднанням. Як комп'ютерні симуляції, так і аналітичні розв'язки моделі Барабаші–Альберта [29, 39, 53, 54] дають степеневу асимптотику розподілу ступенів вузлів (2.9) із показником  $\gamma = 3$ .

Існує декілька алгоритмів побудови графів зі степеневим законом розподілу  $P(k)$ , що вимагає сталих ступенів вершин на кожному кроці генерації. Серед них основними є метод *рендомізації* (розкиду) ребер та метод рендомізації вершин. В обох випадках спочатку вибираються два ребра, а потім переставляються кінці кожного з них (з рис. 13 видно, що при цьому залишаються незмінними ступені всіх вершин). Згенерований у результаті такої процедури канонічний ансамбль матиме однакові ступені вершин та різні ваги  $P(k)$  графів. Установлено, що при рендомізації ребер кореляція ступенів різних вершин послаблюється, а при рендомізації вершин — посилюється.

Характерною особливістю безмасштабних графів Барабаші–Альберта є те, що вони можуть бути згенеровані в результаті нерівноважних процесів зростання різних ансамблів мереж. При цьому вони виникають як перехідні ансамблі, що представляють мережі, утворені при переході від вихідного до кінцевого набору графів. Так, в ансамблях, енергія яких змінюється зі ступенями вершин  $k_i$  згідно із залежністю  $E = -\sum_i k_i \ln(k_i)$ , де підсумовування виконується по всіх вершинах  $i$ , перетворення класичного випадкового графа в повністю зв'язаний кластер відбувається через проміжну зіркоподібну фазу, що не має масштабу [55].

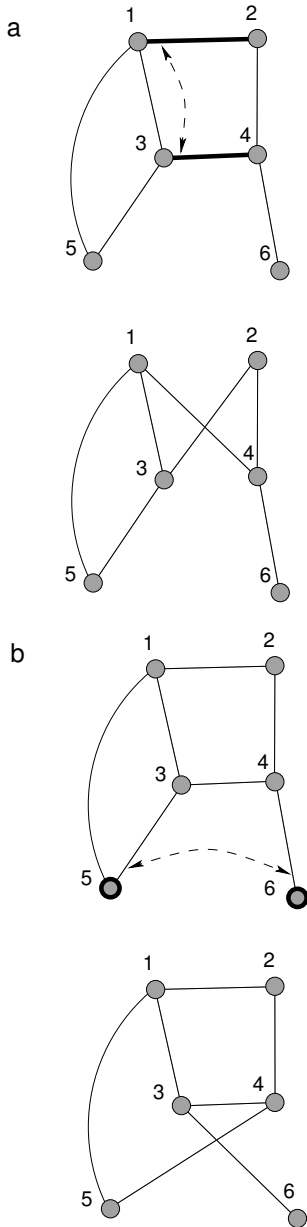


Рис. 13. Схема генерування графів методами рендомізації, при яких залишаються незмінними ступені вершин: (а) рендомізація ребер (спочатку вибираються ребра 1–2, 3–4 та вершини 1, 3; останні потім переставляються); (б) рендомізація вершин (спочатку вибираються вершини 5, 6 та ребра 3–5, 4–6; потім кінці, що прилягають до вершин, переставляються) [55].

Картину такого перетворення наведено нижче. Нехай початково є басейн ребер, що приєднані до вершин із малими ступенями, і невелика кількість вершин із високим ступенем, що є центрами конденсації. Зміна енергії, пов'язана з еволюцією ребер у басейні, є незначною, тоді як центри конденсації поглинають ребра з великою швидкістю, яка монотонно зростає зі збільшенням ступенів вершин, у яких вони сходяться. Справді, приєднання ребра до вершини приводить до зміни енергії  $\Delta E = \partial E / \partial k = -\ln k - 1$ , тому швидкість конденсації визначається арреніусівським множником:  $v(k) \sim e^{-\Delta E/T} \propto k^{1/T}$ , де  $T$  — дисперсія

ансамблю графів, що відіграє роль температури. Оскільки ймовірність  $P(k)$  знайти вершину із заданим ступенем обернено пропорційна до швидкості конденсації, то зі знайденої оцінки відразу випливає степеневий розподіл  $P(k) \propto 1/v(k) \propto k^{-\gamma}$  з показником  $\gamma = 1/T$ . Оскільки центри конденсації ребер утворюються при температурах  $T < 1$  [55], то знайдений показник обмежений значеннями  $\gamma > 1$ . Характерним є те, що при нескінченному зростанні центрів конденсації середнє значення ступенів вершин  $\langle k \rangle = \sum_k kP(k)$  розбігатиметься за умови  $\gamma < 2$ .

#### IV. ТОПОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ДЕЯКИХ РЕАЛЬНИХ МЕРЕЖ. ЕМПІРИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Мета цього розділу — докладніше описати поведінку декількох типів мереж у термінах теорії складних мереж. Зокрема, ми зупинимося на мережі співпраці, яка є прикладом соціальної мережі, та технологічних мережах громадського транспорту й комп'ютерів.

##### А. Мережі співпраці

Класичним прикладом мереж співпраці є *мережа голлівудських кіноакторів*, яку водночас можна розглядати як мережу знайомств [32]. Вершини тут — кіноактори, а зв'язки між ними виникають, якщо вони в певний момент часу зіграли ролі в одній кінострічці. Очевидно, що спільна робота над фільмом передбачає вже чітко задокументований факт знайомства між учасниками. Крім того, достатньо великим є розмір мережі: включено близько 500 тис. кіноакторів. Проте, незважаючи на те, що мережа кіноакторів є справді мережею людей, у якій усунено головні недоліки соціальних мереж, залишається все ж важливий нюанс: зв'язки між учасниками не виникають природно, а досить жорстко регулюються, для прикладу, менеджерами з кастингу [32, 56]. Остання обставина, зокрема, не дозволяє сподіватися на об'єктивні висновки щодо природи людських взаємодій на основі мережі співпраці кіноакторів.

Ближчою до природної соціальної мережі вважається *мережа наукової співпраці* [56]. Власне кажучи, мова йде про мережу співавторства, оскільки вершинами тут виступають науковці (наукові колективи), а зв'язки між ними визначаються спільними опублікованими статтями. Головні недоліки, що стосуються розміру мережі та визначеності її ключових понять, у мережі співавторства відсутні: нині це найбільша з соціальних мереж, які будь-коли вивчали [32], що включає понад мільйон учасників; а поняття зв'язку в мережі чітко визначається та документується наявністю спільних публікацій. При цьому можна будувати незважені мережі співавторства, коли зв'язок між науковцями виникає за наявності хоча б однієї спільної опублікованої роботи, або ж зважені, коли між

однією парою вершин може бути декілька паралельних зв'язків, що позначають кожну зі спільних робіт за участю тих самих співавторів, тобто враховується інтенсивність співпраці. Обумовимо, що надалі мова йтиме власне про незважені мережі співавторства.

Ідею вивчення мереж співавторства як прикладу мереж наукової співпраці досить давно розглядають у галузі інформаційних наук. Однак її передісторія пов'язана з іменем одного з найбільш продуктивних щодо кількості наукових публікацій математика Пауля Ердоша (див. рис. 6) [32, 57], який мав понад 500 співавторів, опублікувавши понад 1500 робіт [58]. Серед математиків став традиційним розрахунок так званої Ердош-дистанції (Е-дистанції), або *числа Ердоша*, що визначається довжиною найкоротшого ланцюга від певного автора до Ердоша в мережі співпраці. Власна Е-дистанція для Ердоша дорівнює 0, для безпосередніх співавторів хоча б однієї його публікації — 1, для тих, хто опублікував спільну роботу зі співавторами Ердоша, це число дорівнює 2, і так далі. Недавні дослідження наводять середнє значення довжини Е-дистанції — 4.7, а відоме максимальне — 15. Фактично, якщо це число  $\geq 4$ , знайти точне значення стає важко [32]. Проте вже з кінця 2004 року в мережі Американського математичного товариства MathSciNet (<http://www.ams.org/mathscinet/>) з'явилась можливість обчислення не лише числа Ердоша, але й довжини найкоротшого ланцюжка співпраці для будь-яких двох математиків, які мають хоча б одну публікацію у MathSciNet [57].

Мережа, вибудована навколо однієї особи, називається егоцентричною [59] (рис. 14).

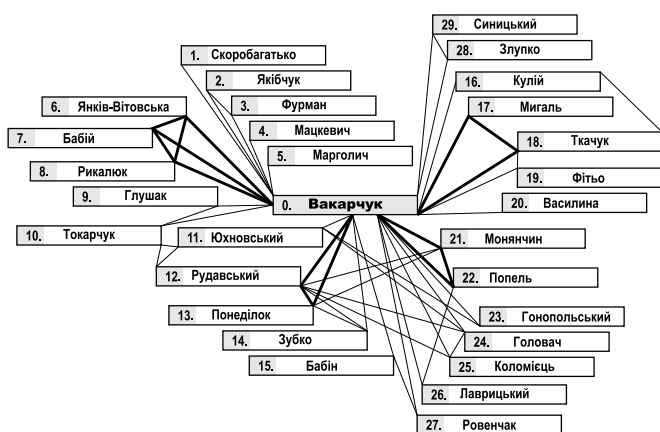


Рис. 14. Фрагмент незваженої егоцентричної мережі наукового співавторства в галузі фізики, у центрі якої український учений, професор І. О. Вакарчук. Товстими лініями виділено декілька прикладів кластерів співавторства: два трикутники (0–17–18 та 0–21–22) та повний кластер з 4-х вершин, які всі між собою попарно зв'язані (0–6–7–8).

Аналогічно до Е-дистанції для математиків, у згаданій мережі голлівудських кіноакторів розраховується число актора Кевіна Бекона (Kevin Bacon), що дорівнює 1 для тих, хто зіграв із ним в одному фільмі. Цікавим є той факт, що для самого Пауля Ердо-

ша число Бекона дорівнює 4. Це зумовлено тим, що математик зіграв самого себе в документальному фільмі [25], де один із виконавців невеликої ролі мав число Бекона 3 [59].

Мережі наукової співпраці досліджували в роботах [32, 59, 60]. На основі даних із кількох баз наукових публікацій за певний часовий інтервал (з 1995 року до 1999: біомедичні дослідження — MEDLINE, кілька розділів фізики — Los Alamos e-Print Archive, комп'ютерні науки — NCSTRL; а також з 1940 до 2004: математика — база журналу Mathematical Reviews) досліджено топологію та властивості відповідних мереж наукового співавторства [32]. Розміри баз даних коливались від 2 мільйонів статей (MEDLINE) до 13 тис. (NCSTRL). Зроблено висновок про те, що мережі наукової співпраці мають низку характерних властивостей мереж тісного світу, а саме: високий коефіцієнт кластерності, коротку дистанцію між двома довільно обраними вершинами та розподілом ступенів вершин, близький до степеневого закону [32, 60]. Нижче наведемо коротку характеристику основних параметрів мереж наукової співпраці.

Загальна кількість вершин мережі співпраці в різних галузях науки може сильно відрізнятись залежно від того, є напрямок вузькоспеціалізованим чи ширшого спектра; новий він або ж належить до класичних досліджень. Середня кількість статей на одного автора не дуже залежить від галузі науки, на відміну від середньої кількості співавторів однієї публікації [60]. На значення останнього параметра навіть сильніше впливає те, до теоретичної чи експериментальної ділянки належить праця [32]. Теоретичні статті характеризуються переважно малою кількістю співавторів, тоді як експериментальні роботи можуть мати досить багато співавторів. Ступінь вершини в незваженій мережі співавторства визначається кількістю авторів, з якими цей науковець мав спільні роботи. Його значення, очевидно, також залежить від того, якою наукою переважно він займається [32, 60]: в експериментальній сфері середній ступінь вершин мережі співавторства є значно вищим, ніж у теоретичній.

Крім середніх значень згаданих параметрів, можна будувати їхні розподіли, які виявляються схожими між собою за формою та близькими до степеневого закону. Є підстави вважати, що, на відміну від інших складних мереж (наприклад, *www*), розподіли параметрів мережі співавторства не відповідають усе ж чистому степеневому закону, а швидше — степеневому закону з експоненційним обрізанням [32, 60]. Це, зокрема, може бути зумовлено наявністю певних специфічних рис: урахуванням даних лише за певний часовий проміжок, природною обмеженістю активного робочого віку науковців тощо [32, 60].

Для відносно невеликої кількості даних мережа співавторства складатиметься з набору невеликих фрагментів, що асоціюються з групами авторів, які працюють над однією тематикою. Зі зростанням кількості вершин між окремими кластерами виникають зв'язки і врешті утворюється ділянка, що включає ве-

лику групу осіб, пов'язаних між собою співпрацею — компонента сильної зв'язності [61] мережі або гігантська компонента (Giant Component), рис. 15.

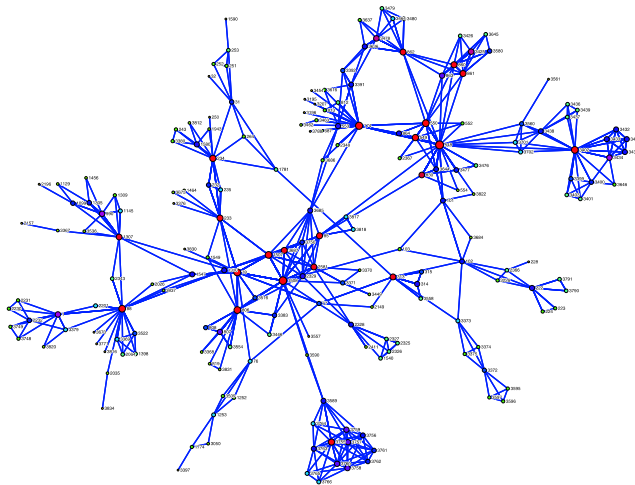


Рис. 15. Найбільший кластер мережі співавторства журналу “Condensed Matter Physics” (за 12 років існування видання, 1993–2005), що станом на 2005 включає 198 вершин, причому наступний за розміром кластер складається всього з 14 вершин (загальна кількість авторів за цей період дорівнює 779). Чітко можна виділити окремі ділянки мережі, які позначають тематичні напрямки публікацій.

Дослідження мереж співавторства на основі кількох різних баз даних показали, що найбільший кластер, як правило, містить понад 80% усіх авторів [32, 60] — тобто майже кожен з авторів пов'язаний у мережі з будь-яким іншим автором через певний (можливо, не єдиний) ланцюг посередників. Так забезпечується швидке поширення нової інформації в мережі та підтверджується високий рівень приватної комунікації між науковцями. Цікаво, що в усіх досліджених випадках наступний за розміром зв'язний кластер виявляється набагато меншим за головний [32] (рис. 15). Оскільки переважна більшість вершин у мережі співавторства є “взаємодосяжними”, то можна порахувати середню довжину мінімального ланцюга між двома довільними авторами. Результати таких розрахунків дають дуже мале значення порівняно із загальною кількістю вершин; а зі збільшенням розміру мережі це число суттєво не змінюється і є близьким до шести [32]. Цікаві аспекти питання про найкоротші шляхи співпраці сформулював С. Строгац, досліджуючи набір індивідуальних найкоротших шляхів для певного автора, що проходять через його найближчих сусідів. Виявилось, що близько 60% з них проходять через одного — найкраще “зв'язаного” — його співавтора, а більшість із решти — через співавтора з наступним показником зв'язності [60]. Значення посередництва для різних вершин мережі можуть сильно відрізнятись, і завжди можна виділити невелику кількість вершин із помітно вищим значенням цього показника [60]. Усунувши всього кілька таких ключових вершин, можна зруйнувати зв'язність

усієї мережі [60], приводячи її до фрагментованого вигляду.

Для різних галузей науки змінюється також величина діаметра мережі, що визначається максимальною відстанню між двома вершинами. Проте зміни ці є незначними, порівняно з розміром мережі: діаметри всіх мереж у згаданих дослідженнях Ньюмена становили 20–30 кроків [60].

Характерною рисою соціальних мереж є також висока кластерність, що описує ділянки мережі, в яких вершини зв'язані між собою особливо сильно. У термінах наукового співавторства такі кластери можуть становити собою групи працівників однієї установи або ж колективи авторів, які працюють над спільною проблемою. При цьому помітний вплив на значення коефіцієнта кластерності мають публікації з трьома співавторами, які автоматично утворюють трикутник (рис. 14). Коефіцієнт кластерності також змінюється залежно від галузі науки [60].

Така характерна риса мереж наукового співавторства, як точна задокументованість часу виходу статей, дозволяє розраховувати ймовірність утворення зв'язку між авторами, які в минулому не співпрацювали, проте мали спільного співавтора. Проведені дослідження показали, що вона буде майже в 45 разів вищою, ніж за відсутності спільних співавторів, і зростає ще більше за наявності двох спільних співавторів [60]. Урешті, це відображає той факт, що більш комунікабельні автори мають вищу ймовірність бути поєднаними між собою. Можна також визначати силу зв'язку між певною парою вершин, наприклад, простим підрахунком частоти появи спільних статей упродовж певного проміжку часу або ж об'єктивнішими методами, що враховують наявність інших співавторів [60] (чим більше співавторів працює над статтею, тим меншою є попарна взаємодія між ними).

Нові нюанси з'являються під час вивчення мереж співавторства з урахуванням їх зміни в часі (evolving network). При цьому вивчається розростання мережі, зумовлене як появою нових статей (зв'язків), так і фактом приєднання нових співавторів (вершин). Для мереж, що зростають, топологія та властивості визначаються їх динамікою; під таким кутом зору показники, що сприймалися перед тим як статичні (діаметр, коефіцієнт кластерності, середній ступінь вершин) стають залежними від часу [56, 60]. Певний клас моделей таких мереж базується на гіпотезі про переважне приєднання [60]. Оскільки, як було відзначено вище, мережа співавторства задокументована в часі, таке припущення легко перевірити. У результаті застосування різноманітних методів для такої перевірки виявилось, що механізм переважного приєднання справді наявний у мережах співавторства [56, 60].

Підсумовуючи сказане, слід звернути увагу на практичний бік досліджень мереж наукової співпраці. Базуючись на їхній результаті, сьогодні активно розробляють методики ідентифікації наукових шкіл, визначення рівня інтегрованості національних наукових ресурсів окремих країн у глобальну наукову спільноту. Вивчають можливості визначення перспек-

тивних напрямків та прогнозування розвитку науки, що необхідно враховувати при формуванні державної науково-технічної політики та організації фінансування наукової сфери. Цікаво, що проблеми стратегічного планування та прогнозування науки намагались розв'язувати ще в минулому столітті, зокрема й на теренах колишнього СРСР [62].

**В. Мережі громадського транспорту**

Зважаючи на загальний інтерес до складних мереж, дивно, що одна з мереж, з якими ми найчастіше стикаємося, мережа громадського транспорту (ГТ), докладно проаналізована лише недавно [63–65]. Мережі ГТ є прикладом транспортних мереж, і для них характерні загальні риси цих систем: еволюційна динаміка, оптимізація, вкладення у двовимірний простір. Однак про топологічні властивості мереж ГТ відомо значно менше, ніж, скажімо, про властивості мереж аеропортів, які також належать до транспортних мереж [66–72]. Як приклади можна навести і залізничні мережі [73], електромережі [66, 74, 75] та ін.

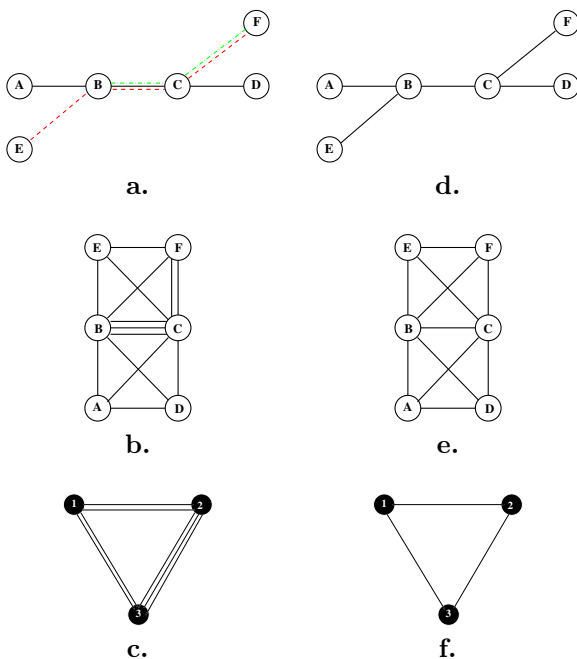


Рис. 16. **a:** фрагмент карти громадського транспорту. Станції А–F розміщені на трамвайних лініях № 1 (суцільна лінія), № 2 (пунктирна лінія), № 3 (пунктирна лінія з крапками). Таке зображення називатимемо простором  $L'$ . **b:** простір  $P'$ , дві станції (два вузли) з'єднані, якщо через них проходить спільний маршрут. **c:** простір  $C'$ , вузли зображають маршрути, два вузли з'єднані, якщо маршрути проходять через спільну зупинку. Унікаючи в просторах  $L'$ ,  $P'$ , і  $C'$  кратних з'єднань і зображаючи їх одним зв'язком, отримуємо простори  $L$ ,  $P$ , і  $C$ , як показано на рис. **d**, **e**, **f** відповідно. Докладніше див. далі.

Існує декілька праць, що аналізують специфічні підмножини мереж ГТ, як-от дослідження мережі метро Бостона [76–79], Відня [79] чи автобусних мереж трьох міст у Китаї [80]. Однак кожен окремий тип

громадського транспорту (мережа автобусів, трамваїв чи метро) не є замкнутою системою: це лише підграф ширшої системи транспорту міста, чи, як ми її називаємо, мережі ГТ. Тому, щоб зрозуміти й описати властивості міського транспорту в цілому, необхідно аналізувати мережу ГТ повністю, не поділяючи її на специфічні частини. І справді, при переході від аналізу окремої мережі метро до мережі “метро + автобус” властивості мережі значно змінюються. На прикладі Бостона цей ефект показано в статтях [77, 78].

Наскільки нам відомо, мережі ГТ розглянуто в трьох працях [63–65]. У першій, [63], проаналізовано мережі ГТ Берліна, Дюссельдорфа та Парижа, у другій, [64], — системи громадського транспорту 22 польських міст, у третій, [65], досліджено мережі громадського транспорту 14 великих міст світу. У статті [63] зосереджено увагу на безмасштабних властивостях мереж ГТ. Показано, що для названих міст притаманний степеневий розподіл ступенів вузлів. Також степеневий закон спостерігався і для інших характеристик, що описують інтенсивність руху в мережах ГТ. Однак статистичних даних виявилось надто мало, щоб можна було зробити однозначні висновки. У праці [64] зроблено висновок про те, що розподіл ступенів вузлів може мати як степеневий, так і експоненційний характер, залежно від того, яке означення топології мережі прийняти. Водночас широко проаналізовано й інші характеристики мереж ГТ (кластерність, посередництво, асортативність (assortativity)).

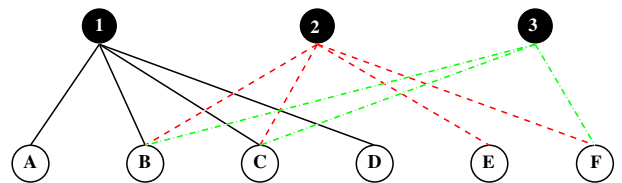


Рис. 17. Двосортний (bipartite) граф, “В-простір”, що складається з маршрутів (заповнені кружечки) та станцій (пусті кружечки) і відповідає карті громадського транспорту з рис. 16а. Відзначимо, що на рис. 16с і 16е зображено одномодові проєкції цього двосортного графа. Для зручності зображення лінії, що відповідають різним маршрутам, намальовані по-різному. Однак ані тип ліній, ані порядок розташування станцій не мають значення в цьому випадку.

Аналізуючи мережі ГТ, зручно використовувати різні способи зображення графів (див. рис. 16). Переважно мережі зображають у так званому  $L'$ -просторі [65], визначеному як набір маршрутів, кожен із яких обслуговує певний набір станцій. Однак при аналізі використовували й інші означення сусідства між станціями, які приводять до різних зображень. В одному випадку отримуємо  $L$ -простір, у якому дві станції вважаються сусідами, якщо вони розміщені безпосередньо поруч на одному й тому ж маршруті [77, 78]. У другому випадку —  $P$ -простір, для якого дві станції означені як сусіди, якщо вони належать одному й тому ж маршруту [73]. Деякі специфічні характе-

ристики мереж ГТ природніше і зручніше описувати в додаткових представленнях. Двосортний (bipartite) граф, **В**-простір, передбачає трактування і маршрутів, і станцій як вузлів різних типів, що й означають пусті й заповнені кружечки на рис. 16. Одномода проекція графа з простору **В** повертає нас у **Р**-простір, якщо ми вважаємо вузлами станції, і пере-

носить нас у **С**-простір, якщо ми вважаємо вузлами маршрути. Відзначимо, що простір **L'** відрізняється від простору **L** тільки кратністю зв'язків. Аналогічно можна означити додаткові простори **P'**, **C'**, зображуючи кратні зв'язки в **Р**- і **С**-просторах одиничними зв'язками [65] (див. рис. 16).

Місто	$N$	$R$	$\kappa$	$\kappa_P$	$\gamma$	$\hat{k}$	$\hat{k}/\langle k \rangle$	$\gamma_P$	$\hat{k}_P$	$\hat{k}_P/\langle k_P \rangle$	$\langle C \rangle$	$C$	$\langle C_P \rangle$	$C_P$	$\hat{\ell}$	$\langle \ell \rangle$	$\hat{\ell}_P$	$\langle \ell_P \rangle$
Берлін	2996	218	3.16	84.4	(4.30)	1.24	0.48	(5.86)	38.5	0.68	0.05	52.85	0.79	42.03	68	18.61	5	2.93
Даллас	6571	131	2.10	135.7	4.99	(1.01)	0.49	(4.67)	76.9	0.77	0.01	17.26	0.95	63.00	269	85.84	10	3.78
Дюссельдорф	1544	124	3.21	90.3	(3.99)	1.12	0.44	(4.63)	58.8	1.02	0.04	22.45	0.79	20.97	56	13.18	5	2.58
Гамбург	8158	708	3.26	78.4	(4.70)	1.47	0.56	(4.92)	55.6	1.11	0.09	262.92	0.82	133.99	158	39.74	11	4.79
Гонконг	2117	321	5.30	230.1	(3.04)	2.60	0.73	(4.40)	125.0	1.01	0.10	58.98	0.73	12.51	60	11.11	4	2.26
Стамбул	4043	414	2.69	140.1	4.04	(1.13)	0.49	(2.70)	71.4	0.93	0.02	41.40	0.79	41.54	131	29.69	6	3.09
Лондон	11012	2005	3.22	167.0	4.58	(1.46)	0.56	4.39	(142.9)	1.57	0.08	326.17	0.74	90.00	107	26.68	6	3.26
Лос-Анджелес	46244	1893	2.73	154.0	4.88	(1.50)	0.64	3.92	(200.0)	2.09	0.03	588.44	0.88	427.06	247	43.55	14	4.60
Москва	3755	679	7.93	129.7	(3.31)	2.12	0.64	(2.91)	50.0	0.79	0.11	128.23	0.71	41.93	28	7.08	5	2.52
Париж	4003	232	6.20	79.1	2.61	(3.24)	0.95	3.70	(100.0)	2.12	0.07	85.90	0.85	71.75	47	7.22	5	2.79
Рим	6315	681	3.02	86.4	4.39	(1.16)	0.45	(5.87)	45.5	0.76	0.03	68.61	0.73	76.93	93	29.64	8	3.58
Сан Пауло	7223	998	5.95	333.6	2.72	(4.20)	1.31	(3.06)	200.0	1.46	0.12	268.83	0.73	38.32	33	10.34	5	2.66
Сідней	2034	596	4.35	73.2	3.99	(1.82)	0.55	(5.66)	38.5	0.91	0.13	81.62	0.73	34.92	35	12.76	7	3.03
Тайпей	5311	389	4.02	415.5	(3.74)	1.75	0.56	(5.17)	200.0	0.85	0.11	186.23	0.69	15.38	74	20.86	6	2.35
$a=0, b=0.1$	635	500	2.77	216.6	—	—	—	4.43	(76.9)	0.47	—	—	0.76	2.9	110	36.10	4	1.96
$a=0, b=0.5$	3336	500	3.14	302.7	—	—	—	(7.66)	111.1	0.62	—	—	0.68	12.6	190	49.21	7	3.00
$a=0, b=8$	5464	500	3.36	233.8	—	—	—	(12.35)	71.4	0.46	—	—	0.65	22.8	229	59.37	9	3.71

Таблиця І. Характеристики мереж ГТ в **L**- і **Р**-просторах [65]. Індекс “р” означає характеристику в **Р**-просторі. В останніх трьох рядках наведено дані для симульованих міст. Наведено кількість станцій  $N$ , кількість маршрутів  $R$ , відношення  $\kappa$  другого моменту  $\langle k^2 \rangle$  розподілу ступенів вузлів  $P(k)$  до першого моменту  $\langle k \rangle$ , показник  $\gamma$  і масштаб  $\hat{k}$  розподілу  $P(k)$  (коли  $P(k)$  зображається степеневим та експоненційним законами відповідно), відношення  $\hat{k}/\langle k \rangle$ , середній коефіцієнт кластерності  $\langle C \rangle$  та його відношення  $C$  до відповідного значення для випадкового графа Ердоша-Рені  $C_{ER} = \langle k \rangle/N$ , максимальне  $\hat{\ell}$  і середнє  $\langle \ell \rangle$  значення довжини найкоротшого шляху. Так, наприклад, усереднена мандрівка між 11026 станціями Лондона потребує  $\langle \ell_P \rangle - 1 = 2.2$  пересадок, а максимальне значення  $\hat{\ell}_P - 1 = 5$ ; див. текст.

Зазначимо, що стандартні характеристики мережі (такі, як середній ступінь вузла  $\langle k \rangle$ , середня довжина найкоротшого шляху  $\langle \ell \rangle$ , коефіцієнт кластерності  $C$  і т. ін.), зображені в різних просторах, стають специфічними характеристиками, важливими для оцінки громадського транспорту міста. Так, наприклад, середня довжина найкоротшого шляху  $\langle \ell \rangle$  в **L**-просторі,  $\langle \ell_L \rangle$ , — це мінімальна кількість зупинок, які треба в середньому проїхати між двома довільними станціями. Водночас просторі **P**, величина  $\langle \ell_P \rangle - 1$ , каже нам, яку мінімальну кількість разів у середньому необхідно поміняти маршрут при мандрівці між будь-якими двома станціями. А в просторі **C**,  $\langle \ell_C \rangle$ , вона визначає в середньому кількість змін маршруту, необхід-

них, щоб змінити один маршрут на інший довільний. Ще одним прикладом є ступінь вузла  $k$ :  $k_L$  вказує кількість маршрутів, доступних пасажирові на даній станції;  $k_L$  — це кількість сусідніх зупинок;  $k_P$  — це кількість зупинок, до яких можна доїхати, не змінюючи маршруту; а  $k_C$  каже нам, скільки маршрутів безпосередньо доступні з цього маршруту.

Таблиця І містить результати досліджень мереж ГТ 14 великих міст [65]. Проаналізовані мережі виявились тісними світами з відносно малим значенням найкоротшого шляху й високим коефіцієнтом кластерності. Спостережувані розподіли ступенів вузлів цих мереж апроксимувалися степеневою ( $P(k) \sim 1/k^\gamma$ ) та експоненційною ( $P(k) \sim \exp(-k/\hat{k})$ ) функція-

ми. У таблиці вказано значення параметрів  $\gamma$  та  $\hat{k}$  для кожного міста), у дужках вказано те значення, яке забезпечує гіршу точність. Аналіз показує, що дуже великі мережі ГТ мають безмасштабний розподіл не тільки для **L**-простору [63, 64], а і для **P**-простору.



Рис. 18. Карта мережі ГТ симульованого міста [65, 81]. Лінії різних кольорів (різної інтенсивності) відповідають різним маршрутам ГТ (ґратка не показана).

Те, що деякі мережі ГТ є безмасштабними, дало змогу побудувати еволюційну модель цих мереж [65]. У моделі вулиці міста зображено квадратною двовимірною ґраткою, а маршрути ГТ змодельовано як блукання із самоуніканням (SAWs) на цій ґратці. Реальні маршрути плануються для досягнення певного місця. Це місце служить точкою притягання блукань, й усереднення за специфічними для цього міста конфігураціями таких точок приводить до ефективного притягання між маршрутами (подібно до сценарію переважного приєднання, що обговорюємо в розділі III). Наведені ефекти враховано у двох параметрах  $a$  та  $b$  (див. таблицю), що впливали на вибір початкової станції та розвиток маршруту (докладніше див. у [65]). Зі зміною параметрів можна побачити перехід від безмасштабного характеру поведінки в **P**-просторі до експоненційного. Таблиця містить характеристики, порашовані для симульованих мереж ГТ, що мають  $R = 500$  маршрутів, кожен з яких має по  $N = 50$  станцій, при певних типових значеннях параметрів  $a$  і  $b$ . Рис. 18 показує карту мережі ГТ симульованого міста [65, 81].

### С. Комп'ютерні мережі

Можна навести багато прикладів мережевих структур, які в той чи інший спосіб пов'язані з комп'ютерами. Найпопулярнішими прикладами комп'ютерних мереж є *всесвітня павутина* й *інтернет* (див. рис. 19). Всесвітня павутина (англійська абрєвіатура *www* — від *World Wide Web*) — це віртуальна мережа гіпертекстових та інших документів, які об'єднані гіперзв'язками (*Uniform Resource Locator*, абрєвіатура *URL*, що є уніфікованим вказівником інформаційного

ресурсу у вигляді стандартизованого рядка символів, який визначає місцезнаходження документа в мережі). Відповідно, інтернет є мережею комп'ютерів, які зв'язані між собою і з серверами.

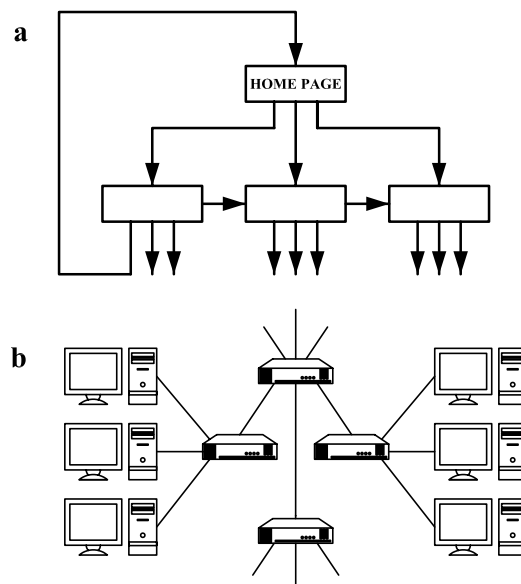


Рис. 19. Зразок мережевої структури всесвітньої павутини (а) та інтернету (б).

Тоді як *www*-мережа є прикладом інформаційної мережі, інтернет — це технологічна мережа (як і вище описані мережі громадського транспорту). Особлива властивість технологічних мереж полягає в тому, що їхня форма й топологія залежить від просторових (географічних) обмежень [5, 82]. Ми розглянемо властивості інтернету як складної мережі. Докладнішу інформацію про структуру інтернету можна знайти у [83], а результати попередніх та поточних вимірювань його кількісних характеристик на [84].

Вивчення топології інтернету цікаве з багатьох причин. Найважливішими є такі з них: (i) розробка ефективніших протоколів, що враховуватимуть топологію інтернету; (ii) встановлення достовірності моделей, що симулюють інтернет; (iii) забезпечення подальшого розвитку інтернету [17, 82, 85–92]. Емпіричне вивчення інтернету переважно проводять на рівні маршрутизаторів або на міждоміненному рівні. У першому випадку вузли мережі представлені маршрутизаторами, спеціальними комп'ютерами, що контролюють рух даних у мережі, а в другому — вузлами є так звані автономні системи (АС). Переважно АС складається з багатьох комп'ютерів та маршрутизаторів, між якими прокладена локальна мережа. Варто відзначити, що на різних рівнях інтернет характеризується властивостями вільної від масштабу мережі [17]. У статті [17] інтернет проаналізований і на рівні АС, на основі трьох карт, створених від листопада 1997 р. до грудня 1998 р., і на рівні маршрутизаторів, на основі даних 1995 року. Кількість вузлів  $N$  та зв'язків  $L$  на проаналізованих картах АС зростала з часом

від  $N = 3015, L = 5156$  до  $N = 4389, L = 8256$ , а характеристики карти мережі на рівні маршрутизаторів були такими:  $N = 3888, L = 5012$ . Дослідження показало, що розподіл багатьох кількісних характеристик інтернету має степеневий характер, а отже, помилкою було б оцінювати його за середніми значеннями цих характеристик. Так, наприклад, 85% вузлів (рівень АС) мали вихідний ступінь нижчий від середнього. Натомість, використовуючи показник степеневого закону як числову характеристику, отримуємо достовірну картину. Для трьох згаданих карт АС середній вихідний ступінь вузла, максимальний і середній найкоротший шлях були такими:  $\langle k_{out} \rangle = 3.42; 3.65; 3.76$ ,  $\ell_{max} = 9; 11; 10$ ,  $\langle \ell \rangle = 3.76; 3.77; 3.76$  відповідно. А розподіл ступенів вузлів мав степеневий характер із показником  $\gamma = 2.15; 2.16; 2.20$ . Для карти маршрутизаторів значення були такими:  $\langle k_{out} \rangle = 2.57$ ,  $\gamma = 2.48$ .

Пізніше, розглядаючи еволюцію карт АС упродовж 1997–2000 років, було досліджено властивості динаміки та кореляції інтернету [86,87,93]. Кореляційні властивості ступенів вузлів та часова поведінка деяких кількісних характеристик пов'язані зі зростанням динаміки досліджуваних вузлів. Як і в попередніх роботах, розподіл ступенів вузлів мав степеневий характер із показником  $\gamma = 2.2(1)$  [86]. Причому значення показника не змінювалось з часом, що вказує на те, що топологічні властивості інтернету вже перебувають у стійкому стаціонарному стані. Поза тим, розподіл посередництва  $\sigma$  (2.6) також характеризується степеневим законом  $P_\sigma \sim \sigma^{-\eta}$  з показником  $\eta = 2.0(1)$  [87,94].

Середній ступінь вузла, коефіцієнт кластерності та довжина найкоротшого шляху в 1997, 1998, 1999 роках були такими:  $\langle k \rangle = 3.47(4); 3.62(5); 3.82(6)$ ,  $\langle C \rangle = 0.18(1); 0.21(2); 0.24(1)$ ,  $\langle \ell \rangle = 3.77(1); 3.76(2); 3.72(1)$  відповідно [86]. Як показують ці дані, перші дві характеристики мають тенденцію до повільного зростання, а середня довжина найкоротшого шляху з часом повільно зменшується. Порівняно невеликі значення  $\langle \ell \rangle$  і високий коефіцієнт кластерності вказують на те, що інтернет є тісним світом.

Щоб проаналізувати кореляцію між різними ступенями вузлів, використовували таку формулу [86]:

$$\langle k_{nn} \rangle = \sum_{k'} k' P_c(k'|k), \quad (4.1)$$

де  $P_c(k'|k)$  — це умовна ймовірність того, що існує зв'язок між вузлами зі ступенями  $k$  та  $k'$ . Значення  $\langle k_{nn} \rangle$  — це середнє значення ступеня найближчих сусідів вузлів зі ступенем  $k$ . Аналіз карти АС інтернету 1998 року показує степеневу залежність  $\langle k_{nn} \rangle \sim k^{-\nu}$  з показником  $\nu \simeq 0.5$ . Ці та подібні [90] результати вказують на існування незвичних кореляційних властивостей інтернету. Для аналізу динаміки інтернету визначалося процентне відношення нових зв'язків, що поєднують вже наявні вузли з новими ( $\ell_{new}$ ) та старими ( $\ell_{old}$ ) вузлами. Це відношення становило  $\ell_{new}/\ell_{old} = 0.34(2); 0.48(2); 0.53(3)$  в 1997, 1998, 1999 роках відповідно [86]. Еволюція середнього ступеня нових вузлів показує, що спочатку він є майже незмінним, а з часом починає характеризуватися степе-

невим розподілом.

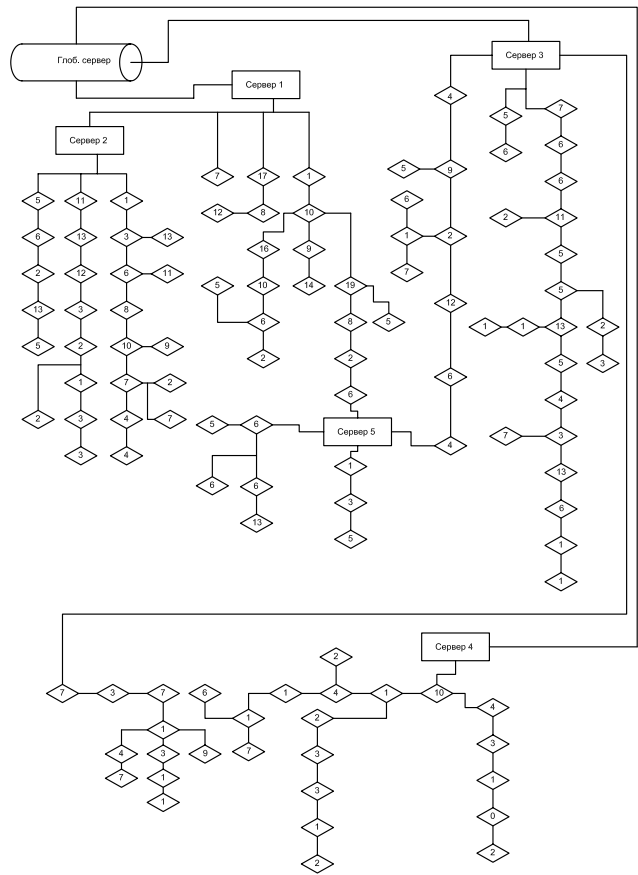


Рис. 20. Схема комп'ютерної мережі "Авеню" (цифри в ромбах, які відповідають світчам, показують приєднаних до них користувачів, які для простоти не зображаються).

Подальше розуміння структури інтернету впливає з дослідження його еволюції в часі, топології та реального розташування [82, 85]. Виявлено, що маршрутизатори та АС утворюють фрактальну множину [95], що сильно корелює з густиною населення в світі. Фрактальна вимірність цієї множини дорівнює  $D_f = 1.5(1)$  [82]. Окрім того, ймовірність  $P(d)$  зв'язку між двома вузлами, що перебувають на Евклідовій (географічній) відстані одне від одного  $d$ , лінійно спадає разом із  $d$ . Цей результат заперечив так звану модель Ваксмана, яка широко використовувалася для генерування топології інтернету і припускала, що  $P(d) \sim \exp(-d/d_0)$ . Імовірність зростання ступеня вузла виявилась прямо пропорційною до кількості його зв'язків, що підтверджує наявність лінійного переважного приєднання (див. розділ III C) [82]. Водночас варто пам'ятати і про інші сценарії розвитку топології інтернету в часі [89,92,96]. Окрім розподілів, що характеризуються степеневим законом, багато різних характеристик інтернету можна апроксимувати розподілом Вейбала (Weibull)  $P(x) \sim \exp[-(x/b)^c]$  [88].



$k$	$N(k)$	$P_0(k)$	$P(k)$
1	631	0.840	0
2	5	0.007	0.042
3	18	0.024	0.15
4	13	0.017	0.108
5	15	0.020	0.125
6	13	0.017	0.108
7	9	0.012	0.075
8	15	0.020	0.125
9	3	0.004	0.025
10	6	0.008	0.05
11	2	0.003	0.017
12	3	0.004	0.025
13	4	0.005	0.033
14	6	0.008	0.05
15	4	0.005	0.033
16	1	0.001	0.008
17	0	0	0
18	1	0.001	0.008
19	1	0.001	0.008
20	0	0	0
21	0	0	0
22	1	0.001	0.008

Таблиця II. Характеристики комп'ютерної мережі "Авеню" в м. Сумах. Див. рис. 20 та текст для докладніших пояснень.

Ми завершимо цей розділ розглядом типових характеристик комп'ютерної мережі "Авеню", що знаходиться в місті Суми (конфігурація мережі зображена на рис. 20). Із цією метою для кожного типу вершин, якими є сервери, світчі та користувачі (6, 114 та 631 відповідно), підраховуємо їхні кількості та ступені, а потім знаходимо кількості  $N(k)$  вершин із заданими ступенями  $k$ . Тоді ймовірність реалізації цього ступеня  $k$  визначається діленням  $N(k)$  на загальну кількість вершин  $N = 751$ :  $P_0(k) = N(k)/N$ . У результаті отримуємо розподіл, який наведено у трьох перших стовпчиках таблиці IV С.

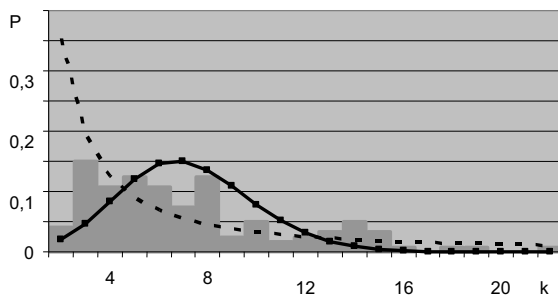


Рис. 21. Розподіл ступенів вершин мережі "Авеню" (гістограма) в порівнянні з розподілом Пуассона (2.7) (суцільна лінія) і степеневим законом  $P(k) = k^{-1.5}$  (штрихована лінія).

Завдяки тому, що основний внесок роблять користувачі, вершини, які мають мінімальний ступінь  $k = 1$ , середній ступінь мережі, знайдений таким спосо-

бом, є порівняно малою величиною  $\langle k \rangle = 4.948$ . Якщо знехтувати внеском користувачів, то загальна кількість світчів і серверів становить  $N = 120$  і розподіл імовірностей задається четвертим стовпчиком таблиці IV С. З них видно, що нехтування елементами вершин, які відповідають користувачам, приводить до значно більшого значення  $\langle k \rangle = 7.233$ . Із рис. 21 також видно, що розподіл ступенів немонотонний і спадає значно повільніше, ніж розподіл Пуассона (2.7), проте швидше за степеневий розподіл  $P(k) = k^{-1.5}$ . Це вказує на те, що досліджувана мережа займає проміжне місце між класичним випадковим і безмасштабним графами.

## V. СТАТИСТИЧНА ФІЗИКА СКЛАДНИХ МЕРЕЖ

Якщо випадковий граф містить велику кількість вершин і ребер, то його кількісний опис (наприклад, при оптимізації) потребує використання статистичного підходу. Цей підхід ґрунтується на *самоусередненості* складної мережі, завдяки якій розкид її характеристик можна представити ансамблем графів, які реалізуються з ймовірністю, що дорівнює відповідному значенню у вихідній мережі. У розділі II В вказано, що за характером розподілу ступенів вершин можна виділити три типи складних мереж — *експоненційні*, *пуассонівські* та *степеневі*. Далі ми покажемо (див. перехід від (5.36) до (5.37)), що два перші з них належать до масштабованих графів, а останній не має жодного масштабу в розкиді випадкової величини. У результаті, основна проблема статистичного опису складних мереж зводиться до визначення експоненційного і степеневого розподілів.

У підрозділі V А буде показано, що, незалежно від природи випадкової величини, достатньо досліджувати розкид ефективної енергії  $E_i$  за вершинами  $i$ . Ймовірність  $P_i$ , що вершина має енергію  $E_i$ , визначається умовою максимуму ентропії Больцмана

$$S = - \sum_i P_i \ln P_i. \quad (5.1)$$

При цьому повинні забезпечуватися умови

$$\sum_i P_i = 1, \quad U = \sum_i E_i P_i, \quad (5.2)$$

які задають нормування і внутрішню енергію  $U$ . У результаті приходимо до експоненційного розподілу Гіббса

$$P_i = Z^{-1} \exp(-E_i/T), \quad (5.3)$$

де статистична сума  $Z$  і температура  $T$  визначаються множниками Лагранжа, які враховують умови (5.2).

Із формального погляду, перехід від експоненційного розподілу до степеневого забезпечується деформуванням логарифмічної й експоненційної функції згідно з рівностями [97]

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, \quad \exp_q(x) \equiv [1 + (1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (5.4)$$

де  $[y]_+ \equiv \max(0, y)$ . Легко бачити, що при параметрі деформації  $q \rightarrow 1$  означення (5.4) приводять до звичайних функцій. Деформуючи в (5.1) логарифмічну функцію, приходимо до ентропії Цалліса

$$S_q\{P_i\} \equiv - \sum_i P_i \ln_q(P_i) = \frac{\sum_i (P_i - P_i^Q)}{Q-1}, \quad (5.5)$$

де введений показник  $Q \equiv 2 - q$ . Неважко переконатися, що, на відміну від ентропії Больцмана (5.1), означення (5.5) приводить до неадитивної величини, що є основною особливістю статистики Цалліса [97]. Варіювання виразу (5.5) з урахуванням умов (5.2) дає шуканий розподіл:

$$P_i = \exp_Q \left( - \frac{\alpha + \beta E_i}{Q} \right) \quad (5.6) \\ \equiv \left[ 1 - \frac{Q-1}{Q} (\alpha + \beta E_i) \right]_+^{\frac{1}{Q-1}},$$

який у межі  $Q \rightarrow 1$  зводиться до експоненти Гіббса (5.3). При  $Q < 1$ ,  $\alpha/\beta \ll E_i$  другий доданок у квадратних дужках (5.6) набагато більший за одиницю, і розподіл Цалліса зводиться до степеневому закону

$$P_i \sim E_i^{-\gamma}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{1-Q} > 0. \quad (5.7)$$

Важливість степеневих розподілів типу (5.7) зумовлена тим, що вони описують самоподібні статистичні системи, у яких відсутній будь-який масштаб зміни випадкової величини  $x$ . Справді, самоподібний (а точніше, самоафінний) розподіл імовірностей  $P(x)$  визначається рівністю

$$P(x/a) = a^\gamma P(x), \quad (5.8)$$

згідно з якою варіація масштабу  $a$ , який характеризує зміну величини  $x$ , приводить до факторизації густини ймовірності тим самим масштабом, який деформований показником подібності  $\gamma$ . Використання масштабованої змінної  $y \equiv x/a$  і функції  $\pi(y) \equiv y^\gamma P(y)$  зводить умову самоподібності (5.8) до однорідного розподілу ймовірностей:

$$P(x) = x^{-\gamma} \pi(y), \quad y \equiv x/a, \quad (5.9)$$

який означає, що зменшення аргументу функції  $\pi(y)$  в  $a$  разів приводить до факторизації ймовірності випадкової змінної  $x$ , піднесеної до степеня  $-\gamma$ . Відсутність масштабу відповідає межах  $a \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow 0$ , при яких множник  $\pi(y)$  прямує до константи, а розподіл (5.9) набирає степеневу форму.

Нижче ми подаємо основи статистичної теорії складних мереж спочатку для експоненційного розподілу (підрозділ V A), а потім для самоподібних графів

(підрозділи V B, V C). Для першого з наведених випадків побудуємо мікροканонічний, канонічний та великий канонічний ансамблі, а потім узагальнимо на системи, яким неможливо присвоїти певне значення енергії. Досліджено властивості рівноважних статистичних ансамблів графів, енергії яких визначаються як ступенями окремих вершин і сусідів, так і глобальними властивостями. Показано, як можна узагальнити стандартні методи статистичної теорії на вироджені графи, які містять петлі та кратні ребра. Розвинуто представлення випадкового графа моделлю ґраткового газу, у межах якої викладено основи мікроскопічної теорії фазових переходів. Розділ V B ґрунтується на узагальненому стохастичному представленні Фоккера–Планка, у межах якого показано, що безмасштабні самоподібні графи утворюються в результаті ієрархічної кластерності вузлів мережі. Цей процес розвивається подібно до супердифузії у просторі, який має ультраметричну топологію. У підрозділі V C визначено міру складності ієрархічно співвідпорядкованого самоподібного ансамблю графів.

Наведений статистичний аналіз рівноважних ансамблів служить основою для практичного застосування таких методів, як оптимізація графів.

## A. Експоненційні ансамблі графів

Стандартний апарат статистичної фізики ґрунтується на розподілі Гіббса (5.3), згідно з яким зростання енергії статистичних станів веде до експоненційно швидкого спадання ймовірності їх реалізації. Такий розподіл визначає поведінку простих систем, які можна зобразити *канонічним ансамблем* графів. У рівноважних мережах зв'язки відповідають частинкам, а заданий граф реалізує стан системи. Умова збереження об'єму забезпечується вимогою незмінної кількості вузлів складної мережі.

Хоча енергія є ключовим поняттям теорії оптимізації мереж, не завжди можливо зіставити її значення із заданим графом. Однак, ґрунтуючись на евристичних представленнях, завжди можна приписати ефективне значення енергії якомусь феноменологічному параметрові. Далі ми докладно розглянемо різні можливості такого вибору, але перед тим треба представити розподіли, які відповідають різним статистичним ансамблям.

### 1. Енергетично визначені ансамблі графів

**Мікροканонічний ансамбль графів** визначається наданням однакових питомих ваг кожному стану системи із заданим значенням енергії  $E$  і кількістю частинок  $M$  (усі інші стани мають нульову вагу). Таким чином, мікροканонічний ансамбль графів задається вагою

$$P = n^{-1} \quad (5.10)$$

кожного з  $n$  графів, які мають  $M$  ребер і енергію  $E$ .

**Канонічний ансамбль** складається з графів із заданою кількістю ребер і вагою

$$P_a = \frac{e^{-E_a/T}}{Z}, \quad (5.11)$$

де  $T$  — температура,  $E_a$  — енергія графа  $a$ ; статистична сума визначається виразом

$$Z = \sum_b e^{-E_b/T}. \quad (5.12)$$

До цієї категорії належать графи зі сталою кількістю ребер і функцією вартості, яка зводиться до мінімуму відхилення від очікуваних властивостей (наприклад, при сталій кількості трикутників, які утворюють граф).

**Великий канонічний ансамбль графів** характеризується заданими значеннями температури  $T$  і хемічного потенціалу  $\mu$ . Енергія  $E_a$  і кількість ребер (частинок)  $M_a$  можуть змінюватися, а ймовірність реалізації графа  $a$  задається рівністю

$$P_a = \frac{e^{-(E_a - \mu M_a)/T}}{Z}, \quad (5.13)$$

де статистична сума записується виразом

$$Z = \sum_b e^{-(E_b - \mu M_b)/T}. \quad (5.14)$$

## 2. Ансамблі графів, які не володіють енергією

**Мікроканонічний ансамбль графів.** Чисельні моделі мереж визначаються статичним набором допустимих графів, у якому відсутні процеси реструкції. Хоча значення енергій та ймовірності для таких графів не визначені, мікроканонічний ансамбль можна задати присвоєнням кожному з допустимих графів тієї самої ваги. Це рівноцінно надання кожному з допустимих графів однакового значення енергії.

**Канонічний ансамбль графів.** Якщо в моделі графа задано значення ймовірності для комплексу графів з однаковою кількістю ребер, то його можна вважати канонічним. При цьому енергія визначається значенням ймовірності відповідно до рівняння (5.11):

$$E_a = -T \ln P_a + \ln Z. \quad (5.15)$$

**Великий канонічний ансамбль графів** зводиться до канонічного, у якому можна варіювати кількість ребер. При цьому енергія визначається рівнянням (5.13):

$$E_a = -T \ln P_a + \mu M_a + \ln Z. \quad (5.16)$$

## 3. Різні означення енергій графів

**Енергія, яка визначається ступенями окремих вершин.** Оскільки вершини є основним атрибутом графів, то логічно присвоїти кожній з них певне

значення енергії  $E(k_i)$ , де  $k_i$  — ступінь  $i$ -тої вершини. У результаті, повна енергія графа визначається сумою за всіма вершинами:

$$E = \sum_{i=1}^N E(k_i). \quad (5.17)$$

Якщо кількість ребер  $M$  є сталою, то лінійна частина функції  $E(k_i)$  не має принципового значення, оскільки її сума в (5.17) дає величину, пропорційну до кількості  $M$ , яка перенормує хемічний потенціал великого канонічного ансамблю. У границі безмежних температур такий ансамбль зводиться до класичного випадкового ансамблю графів. Якщо ж функція  $E(k_i)$  змінюється швидше, ніж за лінійним законом, слід урахувати квадратичний внесок

$$E = - \sum_{i=1}^N k_i^2. \quad (5.18)$$

При цьому в границі низьких температур типові графи матимуть нерівноважний розподіл ступенів — малу кількість вершин із високими ступенями і велику із низькими. Щоб запобігти появі ізольованих вершин і вершин із великими ступенями, потрібно увести кубічний доданок з додатним коефіцієнтом  $\eta$ :

$$E = \sum_{i=1}^N (-k_i^2 + \eta k_i^3). \quad (5.19)$$

**Енергія, яка визначається ступенями сусідніх вершин.** Якщо присвоювати значення енергії не вершинам, а ребрам, то повна енергія графа визначається сумою за найближчими сусідами:

$$E = \sum_{ij} E(k_i, k_j), \quad (5.20)$$

де функція  $E(k_i, k_j)$  задається кореляцією між вершинами. У найпростішому випадку

$$E(k_i, k_j) = \zeta \delta_{k_i 1} \delta_{k_j 1} \quad (5.21)$$

вона є сталою  $\zeta$  і приводить до графа, який зображено на рис. 22а (побудова цього графа ґрунтується на методі генерації, суть якого викладена на початку розділу III). Характерною особливістю такого графа є те, що його ребра, як правило, об'єднують вершини зі ступенями, які сильно відрізняються. Така сама ситуація виникає при виборі

$$E(k_i, k_j) = \frac{\min(k_i, k_j)}{\max(k_i, k_j)} - 1. \quad (5.22)$$

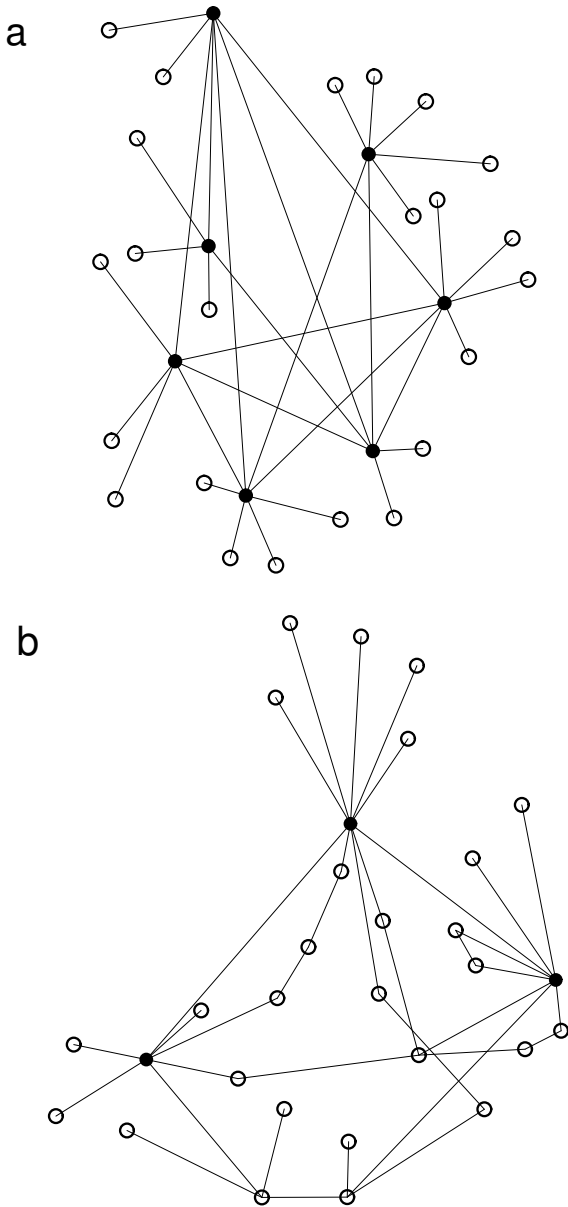


Рис. 22. Оптимізовані мережі, які отримані з використанням (а) енергії локальних зв'язків (5.21); (б) енергії, що визначаються глобальними властивостями (5.26). В обох випадках температура вибрана достатньо низькою. Вершини з високими ступенями позначені темними кружечками, з низькими — світлими [98].

Якщо основний внесок дають віддалені сусіди, то слід виходити з матриці суміжності  $\mathbf{A}$ , яка враховує зв'язки всіх вершин. Так, від'ємні внески трикутників визначаються енергією

$$E = -\frac{1}{6} \text{Tr} \mathbf{A}^3. \quad (5.23)$$

Якщо кількість ребер дорівнює  $M = n(n-2)/2$ , де ціле число  $n < N$ , то при низьких температурах виникає граф, який складається з  $n$  цілком зв'язаних вершин (решта  $N - n$  вершин будуть ізольованими).

**Енергія, яка визначається глобальними властивостями графа.** Основною глобальною характе-

ристикою мережі є її розмір, який визначається кількістю вершин, що входять до її компонент. Однак оскільки частинкам ставляться у відповідність ребра, то глобальна статистична характеристика зводиться до кількості  $s_i$  ребер, які входять в  $i$ -ту компоненту. Тому глобальна енергія записується так:

$$E = \sum_{i=1}^n E(s_i), \quad (5.24)$$

де  $n$  — кількість компонент графа.

Якщо основний внесок дає найбільша компонента, яка складається з  $s_{\max}$  ребер, то формула (5.24) набуває найпростішого вигляду

$$E = -s_{\max}. \quad (5.25)$$

У системі з такою енергією зниження температури спричиняє *фазовий перехід*. Виявляється, що лінійна залежність (5.25) приводить до *неперервного переходу*, тоді як квадратична  $E = -s_{\max}^2$  (або складніша залежність  $E = -\sum_{i=1}^N s_i^2$ ) дають *уриччастий*.

Одне із завдань оптимізації графів зводиться до зменшення їх *діаметра*  $d$ . У такому випадку треба використовувати енергію виду

$$E = -\sum_{ij} d_{ij}, \quad (5.26)$$

де сумування проходить за всіма парами вершин, найменша кількість зв'язків між якими дорівнює  $d_{ij}$ . На основі цього виразу побудовані графи, зображені на рис. 22б.

#### 4. Представлення графа моделлю ґраткового газу

У межах цього представлення вершина графа (вузол мережі) відповідає стороні ґратки, а його ребро (зв'язок мережі) — частинці ґраткового газу, яка може розміщуватися на будь-якому з  $N(N-1)/2$  вузлів. Два вузли ґратки вважаються сусідніми, якщо позиції ребер, що їм відповідають (не обов'язково зайняті ними), мають одну спільну вершину. Слід мати на увазі, що така ґратка сильно відрізняється від тих, що звичайно використовуються в моделі ґраткового газу. Так, якщо взяти довільне ребро графа, то існує  $2(N-2)$  ребер, які мають спільний кінець із ним. Тому в ґратковому газі кожен вузол має  $2(N-2)$  найближчих сусідів, а решта  $N(N-1)/2 - 2(N-2) - 1$  є другими сусідами.

Легко побачити, що квадратична енергія (5.18) одновіршинної моделі (5.17) зводиться до визначення енергії ґраткового газу, який володіє притяганням найближчих сусідів:

$$E = -\sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i (k_i - 1). \quad (5.27)$$

Тут  $n_\alpha$  — числа заповнення вузлів  $\alpha$ , які дорівнюють 0 або 1 залежно від того, існує це ребро у вихідному

графі чи ні. Перше сумування в (5.27) виконується за парами найближчих сусідів ґраткового газу, що відповідає другій сумі за парами ребер, які мають спільний кінець.

Як відомо, ґратковий газ відповідає моделі Ізинґа, яка описує динаміку спінів  $S_\alpha \equiv 2n_\alpha - 1 = \pm 1$ , для яких енергія (5.27) набуває вигляду:

$$E = -\frac{N(N-1)(N-2)}{8} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N(N-1)/2} S_\alpha - \sum_{\alpha\beta} S_\alpha S_\beta. \quad (5.28)$$

Тут першим доданком, який залежить тільки від кількості вершин ґратки  $N(N-1)/2$ , можна знехтувати, приймаючи його за початок відліку; другий член, лінійний за спінами  $S_\alpha$ , дає сумарну намагнетиченість ґратки, яка перенормує зовнішнє поле — подібно до того, як лінійний доданок у (5.17) перенормував хемічний потенціал вершин графа; нарешті, квадратичний член енергії (5.28) діє за аналогією до відповідного внеску вершин (5.18). Таким чином, відображення рівноважного ансамблю графів з енергією вершин  $E = -\sum_i k_i^2$  на ґратковий газ з енергією ребер  $E = -\sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$  показує, що різниця між наведеними моделями зводиться лише до геометрії ґратки.

### 5. Ансамблі вироджених графів

Вироджені графи, які містять петлі чи кратні зв'язки, трапляються практично у всіх мережах: харчових (канібалізм), системах біохемічних зв'язків (автокаталітичні, або, інакше кажучи, ланцюгові реакції), технологічних системах (численні зв'язки між підгрупами), мережах співпраці (постійне співтворство), а також у теорії збурень, яка представляється діаграмами Фейнмана. Ансамблі вироджених графів можна зобразити подібно до простих мереж. Так, набір помічених вироджених графів зводиться до мікроканонічного ансамблю, якщо можна присвоїти однакові ваги кожному графу, який має  $N$  вершин і  $M$  ребер. Кількість таких графів можна задати таким чином: оскільки існує  $N(N+1)/2$  можливих позицій для кожного ребра виродженого графа, то, вибираючи дві вершини, з'єднані  $N(N-1)/2$  різними способами, отримуємо кількість самоз'єднань, що дорівнює  $N$ . Ураховуючи, що кожне з  $M$  ребер може займати дві з  $N(N+1)/2$  позицій, для ймовірності мікроканонічного розподілу простих графів отримуємо

$$P = \left( \frac{N(N+1)}{2} \right)^{-M}. \quad (5.29)$$

Беручи до уваги, що в мікроканонічному ансамблі всі графи мають однакову вагу, легко побачити, що ймовірність реалізації цієї матриці суміжності  $\mathbf{A}$  пропорційна до кількості різних графів  $N(\mathbf{A})$ , які відповідають даній матриці:

$$P \propto N(\mathbf{A}) = M! \prod_{i=1}^N \frac{1}{(A_{ii}/2)!} \prod_{j<k=1}^N \frac{1}{A_{jk}!}. \quad (5.30)$$

Тут ми врахували, що  $M$  ребер графа можуть бути переставлені  $M!$  способами, однак  $A_{jk}!$  з цих перестановок, які комутують ребра між вершинами  $j$  і  $k$ , не змінюють графа — точно так, як і  $(A_{ii}/2)!$  перестановок петель, що замикаються на цій вершині  $i$ .

Можна побудувати канонічний ансамбль вироджених графів, використовуючи стаціонарний процес, при якому зберігається степінь розподілу та кількість ребер. На кожному етапі такого процесу один кінець довільно вибраного ребра переприєднується до нової вершини  $i$ , вага якої дорівнює  $w(k_i)$ . Подібно можна показати, що віддалені ребра між вершинами  $i$  та  $j$  зі швидкістю  $\mu N$  і їх подальше відновлення зі швидкістю, пропорційною до  $w(k_i)w(k_j)$ , приводить до великого канонічного ансамблю.

### 6. Статистика випадкових графів

Викладемо спочатку статистичну теорію неорієнтованих графів із фіксованою кількістю  $N$  вершин, що не мають петель [99]. Цей випадок відповідає великому канонічному ансамблю, поведінка якого визначається енергією

$$E = \mu M, \quad (5.31)$$

що задана хемічним потенціалом  $\mu$  та кількістю ребер  $M$ . Із використанням елементів матриці суміжності  $A_{ij} = 0; 1$  кількість ребер виражається рівністю

$$M = \sum_{i<j}^N A_{ij}, \quad (5.32)$$

підстановка якої в (5.31) дає статистичну суму

$$\begin{aligned} Z &\equiv \sum_{\{A_{ij}\}} \exp\left(-\frac{\mu \sum_{i<j} A_{ij}}{T}\right) \\ &= \prod_{i<j}^N \sum_{A_{ij}=0}^1 \exp\left(-\frac{\mu A_{ij}}{T}\right) = \left(1 + e^{-\mu/T}\right)^{\mathcal{N}}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

де степінь  $\mathcal{N} = \binom{N}{2} \equiv \frac{N!}{2!(N-2)!}$  визначає кількість пар вершин, якому пропорційна вільна енергія  $F = -T \ln Z$ . У результаті для середньої кількості ребер знаходимо

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &\equiv \frac{1}{Z} \sum_M M \exp\left(-\frac{\mu M}{T}\right) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial(\mu/T)} \\ &= \frac{\partial(F/T)}{\partial(\mu/T)} = \frac{\mathcal{N}}{e^{\mu/T} + 1}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Відповідно до (5.34), середня кількість ребер  $\langle M \rangle$  випадкового графа дорівнює їх загальній кількості  $\mathcal{N}$ , помноженій на ймовірність реалізації одного зв'язку

$$m \equiv \frac{1}{e^{\mu/T} + 1}. \quad (5.35)$$

Із використанням останньої рівності повна ймовірність реалізації графа (5.11) набирає вигляду біномного розподілу:

$$P = \frac{\exp(-E/T)}{Z} = \frac{e^{-\mu M/T}}{(1 + e^{-\mu/T})^N} = m^M (1 - m)^{N-M}. \quad (5.36)$$

Як відомо з теорії ймовірностей [100], у межі безмежно малого значення  $m = \langle M \rangle / N \ll 1$  розподіл (5.36) набуває стандартної форми Пуассона:

$$P = e^{-\langle M \rangle} \frac{\langle M \rangle^M}{M!}. \quad (5.37)$$

При цьому, незважаючи на малу величину одиничної ймовірності  $m$ , у термодинамічній границі  $N = N(N - 1)/2 \rightarrow \infty$  середня кількість ребер  $\langle M \rangle$  виявляється скінченною величиною, яка відіграє роль масштабу розподілу Пуассона. У вступі до розділу V показано (див. формулу (5.9) та коментарі до неї), що в границі  $\langle M \rangle \rightarrow \infty$  розподіл за випадковими графами, що визначається кореляціями на довільних масштабах, стає самоподібним і ймовірність (5.37) набуває степеневі форми типу (5.7).

Викладену схему легко узагальнити для випадку, коли від розподілу кількості ребер  $M$  потрібно перейти до розподілу ступенів вершин  $k_i$ . Справді, враховуючи очевидні співвідношення  $k_i = \sum_j A_{ij}$ ,  $M = \frac{1}{2} \sum_i k_i = \sum_{i < j} A_{ij}$ , неважко побачити, що для розв'язання поставленої задачі достатньо перейти від виразів (5.31), (5.32) до енергії

$$E = T \sum_{i < j} (\theta_i + \theta_j) A_{ij}, \quad (5.38)$$

де замість хемічного потенціалу  $\mu$  береться двоточкове локальне поле  $T(\theta_i + \theta_j)$ . З урахуванням вказаної заміни статистична сума визначається виразом (5.33), а вільна енергія набирає вигляду:

$$F = -T \sum_{i < j} \ln \left[ 1 + e^{-(\theta_i + \theta_j)} \right]. \quad (5.39)$$

Корелятори ступенів вершин і відповідні їм кумулянти визначаються рівняннями

$$\langle k_i k_j \dots \rangle = \frac{1}{Z} \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \dots \right) Z, \quad (5.40)$$

$$\langle k_i k_j \dots \rangle_c = \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \dots \right) \frac{F}{T}. \quad (5.41)$$

Якщо, крім ступенів вершин, нас цікавить коефіцієнт кластерності  $C$ , то енергія матиме вигляд:

$$E = T \sum_{i < j}^N \theta_i k_i + \gamma C, \quad (5.42)$$

а середнє значення

$$\langle C \rangle = \left. \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} \quad (5.43)$$

визначається похідною за спряженим полем  $\gamma$ .

Розділяючи польові змінні  $\theta_i$  на набори, один з яких,  $\theta_i^{\text{in}}$ , відповідає ребрам, що входять у вершину  $i$ , а інший,  $\theta_i^{\text{out}}$ , — тим, що з неї виходять, легко узагальнити цю схему на орієнтовані графи. При цьому сума польових змінних у виразах типу (5.39) набирає вигляду:  $\theta_i^{\text{in}} + \theta_j^{\text{out}}$ .

У вироджених графах вершини можуть бути пов'язані не одним ребром, а декількома. При цьому елементи  $A_{ij}$  матриці суміжності пробігають набір натуральних чисел, сумування по яких приводить до зміни знаків експоненти й показника  $N$  у статистичній сумі (5.33). Відповідно, у виразі (5.35), що визначає середню кількість ребер, змінюється знак перед одиницею, а вільна енергія (5.39) буде такою:

$$F = T \sum_{i < j}^N \ln \left[ 1 - e^{-(\theta_i + \theta_j)} \right]. \quad (5.44)$$

Подібно до квантової статистики, випадок одиничних ребер відповідає статистиці Фермі, а багатореберні граfi — статистиці Бозе. У межі сильних полів  $\theta_i \gg 1$ , що реалізується в розріджених графах, обидва вказані випадки зводяться до експоненційного розподілу Больцмана  $m \simeq e^{-\mu/T}$ .

Викладений формалізм передбачає змінну кількість ребер  $M$ , що відповідає великому канонічному ансамблю. При фіксованому значенні  $M = M_0$  слід перейти до канонічного ансамблю, розгляд якого є менш зручним. Це ускладнення можна обійти, вводячи у визначенні статистичної суми (5.33) фур'є-представлення  $\delta$ -функції

$$\delta(M - M_0) = \int_0^1 e^{2\pi i(M_0 - M)\eta} d\eta. \quad (5.45)$$

У результаті приходимо до виразу:

$$Z = \int_0^1 d\eta e^{2\pi i M_0 \eta} \prod_{i < j} \left[ 1 \pm e^{-(\theta_i + \theta_j) - 2\pi i M \eta} \right]^{\pm 1}, \quad (5.46)$$

де верхній знак відповідає одиничним ребрам, а нижній — кратним. Цей вираз показує, що фіксація кількості ребер спричиняє появу поля духів  $\eta \in (0, 1)$ , включення якого зміщує спряжене поле  $\theta$  в ділянку уявних значень.

Закінчуючи виклад статистичної теорії, розглянемо гамільтоніян

$$\frac{E}{T} = -\frac{J}{N-1} \sum_i k_i^2 - B \sum_i k_i, \quad k_i = \sum_j A_{ij}, \quad (5.47)$$

який, за аналогією до моделі Ізинга, де  $J$  — параметр взаємодії,  $B$  — зовнішнє поле, описує колективні ефекти в складних мережах. Їхня особливість полягає в тому, що кількість вершин  $N$  визначає не тільки максимальну кількість ребер  $N(N - 1)/2$ , але й розмір системи  $N - 1$ . Тому в термодинамічній границі  $N \rightarrow \infty$ , коли кількість найближчих сусідів ґраткового газу, що представляє цей граф, буде нескінченною, теорія середнього поля стає точною. При цьому енергію, що відповідає фіксованому значенню  $A_{ij}$ , запишемо так:

$$E(A_{ij}) = -2T(2Jm + B)A_{ij}, \quad A_{ij} = 0; 1. \quad (5.48)$$

Імовірності  $m = \langle A_{ij} \rangle$ ,  $1 - m = \langle 1 - A_{ij} \rangle$  наявності та відсутності ребра між вершинами  $i, j$  перебувають у співвідношенні:

$$\frac{m}{1 - m} = \frac{e^{-E(A_{ij}=1)/T}}{e^{-E(A_{ij}=0)/T}}. \quad (5.49)$$

Підставляючи в нього (5.48), отримуємо рівняння

$$m = \frac{1}{2} [1 + \tanh(2Jm + B)], \quad (5.50)$$

що визначає параметр порядку  $m$ . Згідно з рис. 23, при докритичних значеннях  $J \leq 1$  це рівняння має єдиний розв'язок, а при перевищенні порога  $J = 1$  відбувається біфуркація, що приводить до гістерезису поблизу критичного поля  $B = -J$ . Тут стійкі розв'язки мають кореневу особливість  $|m - \frac{1}{2}| \sim \sqrt{J - 1}$ , що вказує на співіснування фаз із високою та низькою щільностями ребер графа, що відповідає енергії (5.47).

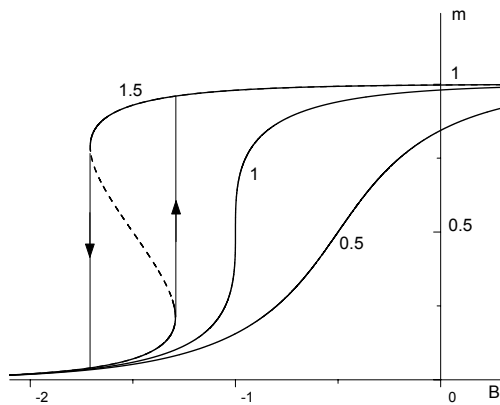


Рис. 23. Залежність середньої кількості ребер  $m$  від поля  $B$  при різних значеннях параметра взаємодії  $J$  (його значення вказані поруч із відповідними кривими).

### В. Самоподібні ансамблі графів

У вступі до розділу V ми вказували, що степенева форма самоподібного розподілу зумовлена відсутністю будь-якого масштабу у зміні випадкової величини, роль якої відіграє ступінь вершин  $k$ . Уперше самоподібні ансамблі використовувались при вивченні

критичних явищ [101], коли групи з  $s$  спінів (у найпростішому випадку  $s = 2$ ) об'єднувались у кластери, потім кожні з  $s$  кластерів утворювали суперкластер наступного рівня і т. д. — до утворення максимального кластера, що містив практично всі спіни. Така побудова має ієрархічний характер, який наочно зображено деревами Кейлі, що наведені на рис. 24.

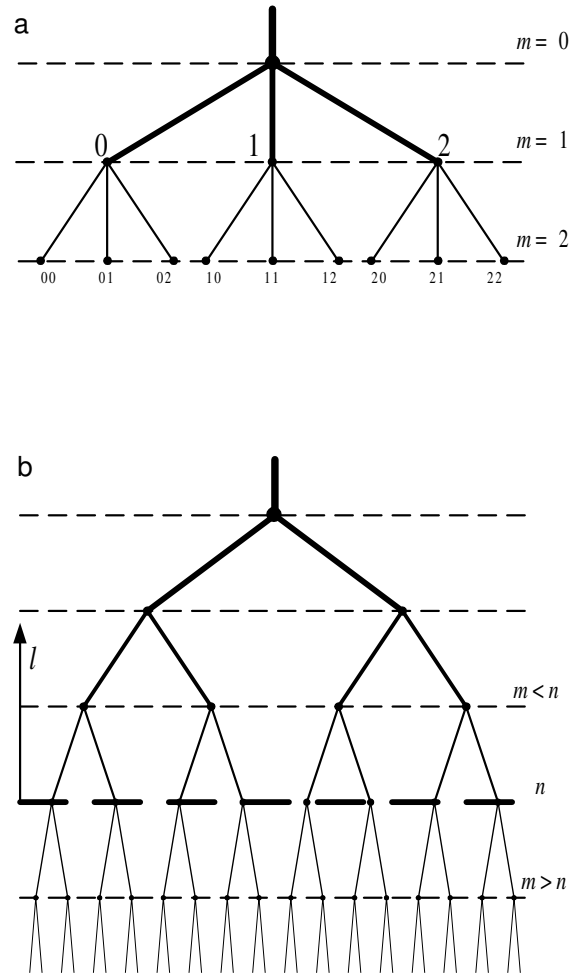


Рис. 24. Найпростіші ієрархічні дерева: а — параметризація дерева з показником розгалуженості  $s = 3$ ; б — біфуркаційне дерево ( $s = 2$ ).

Очевидно, поведінка складної мережі визначається кластерною структурою всіх ієрархічних рівнів, проте властивість самоподібності дає змогу обмежитися заданням структури мінімального кластера та фіксацією номера рівня. Оскільки ієрархічне дерево є геометричним зображенням ультраметричного простору [102], то в межах методу генерації опис складної мережі зводиться до визначення дифузії в цьому просторі [103]. Базуючись на узагальненому рівнянні Фоккера–Планка, ми покажемо, що еволюція самоподібної складної мережі представляє аномальну дифузю за ієрархічними рівнями, у процесі якої встановлюється стаціонарний розподіл у формі Цалліса.

Із урахуванням ієрархічної структури поведінка складної мережі визначається щільністю ймовірнос-

тей  $P_u(t)$  розподілу системи за координатами “ $u$ ” ультраметричного простору в момент часу  $t$ . Цей розподіл підпорядковується основному кінетичному рівнянню

$$\tau_0 \dot{P}_u(t) = \sum_{u'} [f_{uu'} P_{u'}(t) - f_{u'u} P_u(t)], \quad (5.51)$$

де крапка означає диференціювання за часом, мікроскопічний масштаб якого дорівнює  $\tau_0$ ,  $f_{uu'}$  — інтенсивність переходу з  $u'$  в  $u$ . Для виявлення залежності від ультраметричних координат розглянемо регулярне ієрархічне дерево, що характеризується фіксованим значенням показника розгалуженості  $s > 1$  та кількістю рівнів ієрархії  $n \gg 1$ . Тоді ультраметрична координата  $u$  є  $n$ -значним числом в  $s$ -вій системі числення:  $u \equiv u_0 u_1 \dots u_m \dots u_{n-1}$ ,  $u_m = 0, 1, \dots, s-1$  (див. приклад на рис. 24а). Відповідно, інтенсивність переходів записується як степеневий ряд  $f_{uu'} = \sum_{m=0}^n f(u_m - u'_m) s^{n-m}$ , де перший доданок ( $m=0$ ) відповідає верхньому рівневі ієрархії, що визначає поведінку всієї системи, а останній ( $m=n$ ) — нижньому рівневі, що відповідає найдрібнішим кластерам. За означенням, відстань між точками  $u, u'$  становить  $0 \leq \ell \leq n$ , якщо виконуються умови  $u_m = u'_m$  для  $m = 0, 1, \dots, n - (\ell + 1)$ , але  $u_m \neq u'_m$  для  $m = n - \ell, n - \ell + 1, \dots, n$  [102]. Тому при фіксованій відстані  $\ell$  перші  $n - \ell$  доданки вказаного ряду дорівнюють нулеві за означенням, а останні  $\ell$  містять множник  $s^{n-m}$ , величина якого в континуальній границі  $s \gg 1$  набагато менша від множника  $s^\ell$ , що міститься в першому з решти доданків. У результаті виявляється, що в досліджуваному степеневому ряді провідну роль відіграє єдиний доданок, що відповідає  $m = n - \ell$ :  $f_{uu'} \sim s^\ell = s^{n-m}$ . Подібно можна показати, що щільність імовірностей має вигляд  $P_u \sim s^{n-\ell} = s^m$ . При переході від регулярного дерева до випадкового показник розгалуженості  $s$  стає змінною величиною і, згідно з наведеними оцінками, інтенсивність переходів  $f_{uu'} \Rightarrow f_{n-m}$  і щільність імовірностей  $P_u \Rightarrow P_m$  набувають форми перетворення Мелліна (див. [104])

$$f_{n-m} \equiv \int_0^\infty f(s) s^{n-m} ds, \quad P_m \equiv \int_0^\infty P(s) s^m ds, \quad (5.52)$$

де  $f(s), P(s)$  — відповідні вагові функції.

У результаті основне кінетичне рівняння записуємо так:

$$\tau_0 \dot{P}_n(t) = \sum_{m>n} f_{m-n} P_n(t) - \sum_{m<n} f_{n-m} P_m(t). \quad (5.53)$$

Тут перший доданок у правій частині враховує ієрархічний зв'язок між вузлами нижніх рівнів  $m > n$  через заданий  $n$ , а частина після “—” (від’ємник) — зв'язок цього рівня  $n$  через верхні  $m < n$  (див. рис. 24б). При отриманні рівняння (5.53) використано адіабатичне наближення, у межах якого утворення зв'язків між вузлами мережі відбувається набагато швидше, ніж зміна кластерної структури, що характеризується макроскопічним часом  $\tau$  (див. нижче). Розкладаючи  $P_m(t)$  за різницею  $n - m$ , в континуальній границі  $n \gg 1$  з точністю до квадратичного члена отримуємо:

$$\tau_0 \dot{P}_n(t) = \frac{\partial}{\partial n} \left[ F_n P_n(t) - \frac{\partial}{\partial n} D_n P_n(t) \right] + D_n P_n(t), \quad (5.54)$$

де введені моменти  $F_n \equiv \sum_{m<n} (n-m) f_{n-m}$ ,  $2D_n \equiv \sum_{m<n} (n-m)^2 f_{n-m}$  і величина

$$D_n \equiv \sum_{m>n} f_{m-n} - \sum_{m<n} f_{n-m}, \quad (5.55)$$

що визначає різницю між швидкостями встановлення ієрархічного зв'язку через нижні та верхні рівні.

Зазвичай, при сумуванні за станами системи відсутні обмеження  $m > n$ ,  $m < n$ , що фігурують у (5.55), і  $D_n = 0$  [105]. Проте немає ніяких підстав приймати таку умову для ієрархічних систем, де швидкість установа зв'язку суттєво залежить від того, якими рівнями (нижніми чи верхніми) він забезпечується. Це зумовлено неоднорідністю ультраметричного простору, яка очевидна вже з його геометричного зображення (див. рис. 24). Тому далі приймається анзац

$$D_n \equiv -\epsilon Q P_n^{Q-1} \frac{\partial}{\partial n}, \quad (5.56)$$

де  $Q, \epsilon$  — додатні параметри. Його формальне обґрунтування полягає в тому, що з точністю до множника  $-\epsilon(Q-1)$  інтеграл  $\int D_n P_n dn$  зводиться до похідної Джексона [104]

$$D_n P_n \equiv \frac{P_n^Q - 1}{Q - 1}. \quad (5.57)$$

На відміну від звичайної похідної, що відповідає межі  $Q \rightarrow 1$ , похідна Джексона визначає швидкість зміни функції  $P_n$  не при зсуві аргументу  $dn \rightarrow 0$ , а при його дилатації  $Qn$  і тому є основою аналізу самоподібних систем. З фізичної точки зору той факт, що різниця швидкостей установа зв'язку  $D_n$  залежить від щільності ймовірностей  $P_n$ , означає наявність нелінійного зворотного зв'язку, який, як стане видно далі, і є причиною неадитивності.

Підстановка виразу (5.56) в (5.54) дає такий остаточний вигляд основного кінетичного рівняння:

$$\tau_0 \dot{P}_n(t) = \frac{\partial}{\partial n} \left\{ [F_n P_n(t) - \epsilon P_n^Q(t)] - \frac{\partial}{\partial n} D_n P_n(t) \right\}. \quad (5.58)$$

У порівнянні зі звичайними системами [106], привертають увагу протилежні знаки перед дифузійним та лінійним дрейфовими доданками, що зумовлено зворотним вибором знаків у вихідному рівнянні (5.53). Причина такого перетворення полягає в тому, що автономні ієрархічні системи (наприклад, бюрократична) не руйнуються, а самовільно відтворюються [107].



Відзначимо також, що нелінійність рівняння (5.58) не дозволяє використати перетворення Мелліна (5.52).

Якщо ймовірності утворення й руйнування ієрархічного зв'язку однакові, то функція  $f_{n-m}$  є симетричною і сила  $F_n = 0$ , а коефіцієнт дифузії  $D_n$  зводиться до сталої  $D$ . Тоді в рівнянні (5.58) основну роль відіграє нелінійний дрейфовий доданок і стаціонарний розподіл імовірностей набирає вигляду

$$P_n = A [\Delta + (Q - 1)(n + 1)]^{-\frac{1}{Q-1}} ;$$

$$A \equiv (2 - Q) [(Q - 1) + \Delta]^{\frac{2-Q}{Q-1}} , \quad \Delta \equiv D/\epsilon. \quad (5.59)$$

Відповідно до рис. 25, імовірність утворення самоподібної системи монотонно

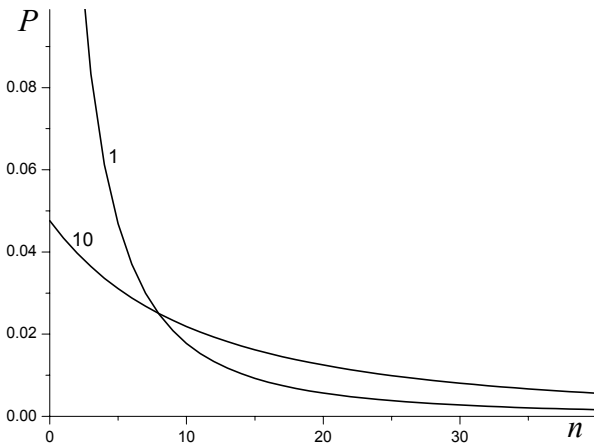


Рис. 25. Стаціонарний розподіл імовірностей за ієрархічними рівняннями при показнику  $Q = 1.5$  та дисперсіях  $\Delta = 1, 10$ .

збільшується зі зменшенням  $n$  (збільшенням ієрархічного кластера), переходячи до розподілу Цалліса на верхньому рівні  $n = 0$ , що відповідає всій системі. Відповідно до [97], при  $Q \neq 1$  розподіл (5.59) відповідає неадитивній статистичній системі, для якої випадки  $Q < 1, Q > 1$  є рівноправними. З подальшого видно, що перший із них відповідає необмежено наростаючим асимптотикам щільності ймовірностей, тому далі вважаємо  $Q > 1$ .

Як показує рис. 25, зростання дисперсії  $\Delta = D/\epsilon$ , що визначається відношенням коефіцієнта дифузії  $D$  до енергії  $\epsilon$ , значно розширює розкид стаціонарної ймовірності по ієрархічних рівнях. Характерно, що при  $\Delta \gg 1$  розподіл (5.59) мало відрізняється від експоненційного

$$P_n = \Delta^{-1} e^{-n/\Delta} \quad (5.60)$$

на високих рівнях  $n \ll \Delta$ , проте з їх поглибленням степеневий хвіст починає проявлятися усе більш значучо. Це означає, що подальші кореляції, відповідальні за перебудову експоненційного розподілу в степеневий, найяскравіше проявляються зі зменшенням ієрархічних кластерів.

У нестаціонарному випадку аналітичне дослідження досягається в автономному режимі, коли поведінка

системи визначається часовою залежністю  $n_c(t)$  характерного масштабу ієрархії, а розподіл імовірностей представляється однорідною функцією  $P_n(t) = n_c^\alpha(t)\pi(\nu)$ ,  $\nu \equiv n/n_c$  [103]. Якщо виконується умова нормування  $\int_0^\infty P_n(t) dn = 1$ , то визначальний внесок робить дрейфовий доданок, зумовлений неоднорідністю ультраметричного простору. Тоді показник  $\alpha = -1$ , і автономний режим встановлюється при виконанні умови  $n_c^{Q-1}\dot{n}_c = \text{const} \equiv C/\tau_0$  та рівняння  $(\epsilon Q \pi^{Q-1} - C\nu)\pi' - C\pi = 0$  (тут і нижче штрих означає диференціювання за відповідним аргументом). Розв'язок має вигляд  $\pi^{Q-1} = (C/\epsilon)\nu$  та реалізується при часах  $t \ll \tau_d$ , де  $\tau_d \equiv (\epsilon^{Q-2}/D^{Q-1})n^Q\tau_0$ . При сумірності дрейфового та дифузійного внесків ( $t \sim \tau_d$ ) розподіл за ієрархічними рівнями втрачає нормування, і для забезпечення автономного режиму необхідне виконання умов  $\alpha(Q-1) + 1 = 0$ ,  $n_c\dot{n}_c = C/\tau_0$  та рівняння  $D\pi'' + (\epsilon Q \pi^{Q-1} - C\nu)\pi' + \alpha C\pi = 0$ . Тут розв'язок характеризується асимптотиками  $\pi^{Q-1} \rightarrow (Q-1)^{-1}(D/\epsilon)\nu^{-1}$  при  $\nu \rightarrow 0$  та  $\pi^{Q-1} \rightarrow (2C/Q\epsilon)\nu$  при  $\nu \rightarrow \infty$ . Перша реалізується при великих часах  $t \gg \tau$ ,  $\tau \equiv (n^2/C)\tau_0$ , друга — при малих  $t \ll \tau$ .

Таким чином, на початковій стадії  $t \ll \tau_d$  внесок дифузійного доданка достатньо, щоб ним знехтувати, і розподіл за рівнями нормований звичайною умовою. При цьому характерний масштаб ієрархії зростає з часом за степеневим законом  $n_c^Q = QC(t/\tau_0)$  (стають суттєвими все нижчі рівні), а щільність імовірностей спадає за гіперболічним законом  $P_n^{Q-1}(t) = (n/Q\epsilon)(t/\tau_0)^{-1}$  тим швидше, чим нижчий рівень (звідси впливає також  $Q > 1$ ). Перехід на дифузійну стадію, який прискорюється з підвищенням рівня, приводить при  $\tau_d \sim t \ll \tau$  до трансформації часової залежності  $n_c(t)$  до звичайного кореневого вигляду  $n_c = \sqrt{2C(t/\tau_0)}$ , а щільність імовірностей спадає за тим же гіперболічним законом. Із подальшим зростанням часу до макроскопічних значень  $t \gg \tau$  залежність  $n_c(t)$  залишається незмінною, а розподіл імовірностей виходить на асимптотику  $P_n^{Q-1} \rightarrow (Q-1)^{-1}\Delta/n$ , що відповідає стаціонарному розподілу (5.59) при  $n \gg \Delta$ .

### С. Складність самоподібних мереж

Ієрархічна структура є однією з універсальних особливостей побудови складних мереж у фізиці, біології, економіці, соціології та інших галузях [102, 108–111]. Як показав огляд, зроблений у попередньому розділі, еволюція самоподібних мереж зводиться до аномальної дифузії в ультраметричному просторі ієрархічної системи, стаціонарний розподіл за рівнями якої визначається степеневим законом (5.59). Основна особливість випадкових ієрархічних систем полягає в тому, що при переході на глибший рівень кожен статистичний ансамбль поділяється на дрібніші підансамблі, які, своєю чергою, складаються із ще дрібніших субансамблів наступного рівня і т. д. Зі статистичного погляду набір указаних (під)ансамблів визначається *складністю* системи, яка, за аналогією до

ентропії, характеризує неупорядкованість ієрархічного зв'язку<sup>1</sup>. Цей розділ присвячений визначенню такої складності для самоподібних ієрархічно співвідпорядкованих ансамблів [112]. Ми покажемо, що з підсиленням ієрархічного зв'язку складність наростає до значення, величина якого збігається зі зростанням дисперсії цього зв'язку і показника неадитивності.

У вступі до розділу V показано, що статистична теорія самоподібних мереж ґрунтується на використанні деформованих логарифма та експоненти (5.4). Визначаючи  $q$ -деформовані добуток і частку додатних величин  $x, y$  [113]

$$\begin{aligned} x \otimes_q y &\equiv [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}}, \\ x \oslash_q y &\equiv [x^{1-q} - y^{1-q} + 1]_+^{\frac{1}{1-q}}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

легко переконатись, що вони мають звичайні властивості:  $\ln_q(x \otimes_q x) = \ln_q x + \ln_q y$ ,  $\ln_q(x \oslash_q x) = \ln_q x - \ln_q y$ ;  $\exp_q(x) \otimes_q \exp_q(y) = \exp_q(x+y)$ ,  $\exp_q(x) \oslash_q \exp_q(y) = \exp_q(x-y)$ .

У межах комбінаторного підходу  $q$ -деформована статистика зводиться до розгляду узагальненого фак-

торіяла  $N!_q \equiv 1 \otimes_q \dots \otimes_q N$ , логарифм якого має вигляд [113]:

$$\ln_q(N!_q) = \frac{\sum_{i=1}^N i^{1-q} - N}{1-q}. \quad (5.62)$$

У термодинамічній границі  $N \rightarrow \infty$  наявна тут сума оцінюється інтегралом, обчислення якого дає

$$\ln_q(N!_q) = \begin{cases} \frac{N}{2-q} \ln_q N - \frac{N}{2-q} + O(\ln_q N), & q \neq 2, \\ N - \ln N + O(1), & q = 2. \end{cases} \quad (5.63)$$

Визначаючи  $q$ -деформований поліноміальний коефіцієнт рівнянням

$$\binom{N}{N_1 \dots N_k}_q \equiv (N!_q) \oslash_q [(N_1!_q) \otimes_q \dots \otimes_q (N_k!_q)], \quad (5.64)$$

де набір цілих чисел  $N_i$  задовольняє умову  $N = \sum_{i=1}^n N_i$ , знаходимо

$$\binom{N}{N_1 \dots N_k}_q = \left[ \sum_{i=1}^N i^{1-q} - \sum_{i_1=1}^{N_1} i_1^{1-q} - \dots - \sum_{i_k=1}^{N_k} i_k^{1-q} + 1 \right]_+^{1/(1-q)}. \quad (5.65)$$

Звідси, нехтуючи логарифмічними поправками (див. (5.63)), отримуємо вираз

$$\ln_q \binom{N}{N_1 \dots N_k}_q \simeq \begin{cases} \frac{N^{2-q}}{2-q} S_{2-q} \left( \frac{N_1}{N}, \dots, \frac{N_k}{N} \right), & q > 0, \quad q \neq 2, \\ -S_1(N) + \sum_{i=1}^k S_1(N_i), & q = 2 \end{cases} \quad (5.66)$$

для ентропії Цалліса (5.5).

Викладений формалізм легко узагальнюється на ієрархічні системи [114]. Припустимо, що  $N$  станів верхнього рівня розподілені за ансамблями  $i = 1, \dots, n$ , кожен з яких містить  $N_i$  станів. Своєю чергою,  $N_i$  станів згруповані в  $m_i$  підансамблів  $ij$ , що містять по  $N_{ij}$  станів, для яких виконуються співвідношення  $\sum_{j=1}^{m_i} N_{ij} = N_i$ ,  $\sum_{i=1}^n N_i = N$ . Тоді, замість поліноміального коефіцієнта (5.64), слід використовувати вираз

$$\binom{N}{N_{11} \dots N_{nm_n}}_q = \binom{N}{N_1 \dots N_n}_q \otimes_q \binom{N_1}{N_{11} \dots N_{1m_1}}_q \otimes_q \dots \otimes_q \binom{N_n}{N_{n1} \dots N_{nm_n}}_q, \quad (5.67)$$

логарифм якого дає

$$\ln_q \binom{N}{N_{11} \dots N_{nm_n}}_q = \ln_q \binom{N}{N_1 \dots N_n}_q + \sum_{i=1}^n \ln_q \binom{N_i}{N_{i1} \dots N_{im_i}}_q. \quad (5.68)$$

У результаті оцінка (5.66) приводить до зв'язку між складностями найближчих ієрархічних рівнів

$$S_Q(P_{11}, \dots, P_{nm_n}) = S_Q(P_1, \dots, P_n) + \sum_{i=1}^n P_i^Q S_Q \left( \frac{P_{i1}}{P_i}, \dots, \frac{P_{im_i}}{P_i} \right), \quad (5.69)$$

<sup>1</sup>Хоча з формального погляду складність та ентропія не відрізняються, їхня фізична природа абсолютно різна: якщо ентропія характеризує неупорядкованість у розподілі найменших структурних одиниць (атомів), то при визначенні складності їх роль переходить до підансамблів, на які поділяється повний статистичний ансамбль.

розподіли за станами яких задані рівняннями  $P_{ij} = N_{ij}/N$ ,  $P_i = N_i/N$  (тут ми ввели фізично визначений параметр неадитивності  $Q = 2 - q$ ,  $1 \leq Q \leq 2$ ). Використання означення (5.5) і зв'язку  $P_i = \sum_{j=1}^{m_i} P_{ij}$  при умові  $P_i - P_{ij} \ll P_i$  дає оцінку

$$S_Q \left( \frac{P_{i1}}{P_i}, \dots, \frac{P_{im_i}}{P_i} \right) \approx \frac{Q}{2} \sum_{j=1}^{m_i} \left( \frac{P_i - P_{ij}}{P_i} \right)^2, \quad (5.70)$$

з урахуванням якої знаходимо:

$$S_Q(P_{11}, \dots, P_{nm_n}) - S_Q(P_1, \dots, P_n) \approx \frac{Q}{2} \sum_{i=1}^n P_i^{Q-2} \sum_{j=1}^{m_i} (P_i - P_{ij})^2. \quad (5.71)$$

Якщо статистичні стани розподілені за мікромканонічними ансамблями, то ймовірності й відповідні складності визначаються номерами рівнів  $n$ :  $\{P_i\}_1^n \Rightarrow P_n$ ,  $\{P_{ij}\}_1^{m_i} \Rightarrow P_{n+1}$ ;  $S_Q(P_1, \dots, P_n) \Rightarrow S(n)$ ,  $S_Q(P_{11}, \dots, P_{nm_n}) \Rightarrow S(n+1)$ . У результаті рівняння (5.71) набирає простого вигляду:

$$S(n+1) - S(n) \approx \frac{Q(n+1)}{2} P_n^{Q-2} (P_n - P_{n+1})^2. \quad (5.72)$$

При заданому номері рівня  $n \gg 1$  отримане співвідношення зводиться до диференційного рівняння:

$$\frac{\partial^2 S(n)}{\partial P_n^2} = Q(n+1) P_n^{-(2-Q)}, \quad (5.73)$$

інтегрування якого дає залежність

$$S(n) = P_0^Q - \frac{Q}{Q-1} P_0^{Q-1} P_n + \frac{n+1}{Q-1} P_n^Q \quad (5.74)$$

при граничних умовах

$$S(n=0) = 0, \quad \left. \frac{\partial S(n)}{\partial P_n} \right|_{n=0} = 0. \quad (5.75)$$

Використовуючи самоподібний розподіл (5.59), приходимо до розподілу складності, показаного на рис. 26.

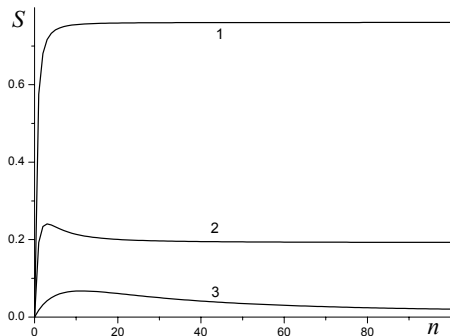


Рис. 26. Залежність складності від номера ієрархічного рівня (криві 1, 2, 3 відповідають параметрам дисперсії  $\Delta = 0.1, 1.0, 10$  при  $Q = 1.5$ ).

Як і варто було очікувати, на верхньому рівні  $n = 0$ , де наявний єдиний статистичний ансамбль, складність  $S = 0$ . Із переходом на глибші рівні значення  $S$  зростає, досягаючи максимуму при  $n_0 = (Q - 1) + \Delta$ , а далі, набуваючи характерної величини,  $S_\infty = P_0^Q$ . Проте варто мати на увазі, що проведене дослідження застосовне тільки на рівнях  $n \gg 1$ . Тому вказаний максимум проявляється лише при умові  $\Delta \gg 1$ , а для помірних дисперсій  $\Delta \sim 1$  складність швидко зростає від нуля до граничного значення:

$$S_\infty = \left[ \frac{2-Q}{(Q-1)+\Delta} \right]^Q, \quad (5.76)$$

величина якого збігається зі зростанням дисперсії  $\Delta$  і показника  $1 \leq Q \leq 2$ .

Відповідно до картини, змалюваної в попередньому розділі, в інтервалі  $t \ll \tau$ ,  $\tau = n^2 \tau_0$  розподіл за ієрархічними рівнями спадає до стаціонарного (5.59) за законом:

$$P_n(t) = P_n \left[ 1 - (t/\tau_n)^{-\frac{1}{Q-1}} \right], \quad (5.77)$$

який дає величину  $P_n(t) = 0$  при  $t = \tau_n$ ,  $\tau_n \equiv (\Delta/QD)n\tau_0$ ,  $n \neq 0$ , якщо в початковий момент реалізується  $\delta$ -подібний розподіл  $P_n(t=0) = \delta_{n0}$ . Нестационарне значення складності визначається рівнем (5.73), де замість (5.75) потрібно використовувати граничні умови

$$S(n, t=0) = 0, \quad S(n, t=\infty) = S(n), \quad n \neq 0. \quad (5.78)$$

У результаті приходимо до узагальнення стаціонарного розподілу (5.74):

$$S(n, t) = \left( \frac{P_0^Q}{P_n} - \frac{Q}{Q-1} P_0^{Q-1} \right) P_n(t) + \frac{n+1}{Q-1} P_n^Q(t). \quad (5.79)$$

Підстановка рівнянь (5.59), (5.77) в (5.79) приводить до часової залежності, що показана на рис. 27.

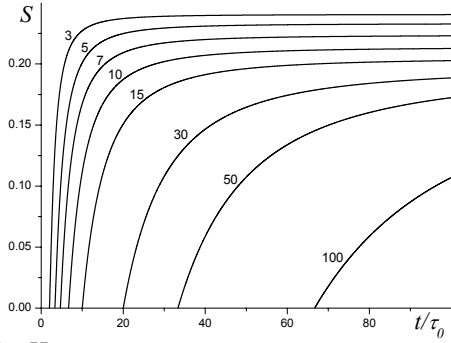


Рис. 27. Часові залежності складності на різних ієрархічних рівнях (їхні номери вказані поруч з кривими) при  $\Delta = 1, Q = 1.5, D = 1$ .

Протягом балістичного інтервалу  $t \leq \tau_n$  складність зберігає початкову величину  $S = 0$ , а зі зростанням часу  $t > \tau_n$  швидко збільшується до стаціонарного значення (5.74), яке обмежене максимумом (5.76).

## VI. ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ І КРИТИЧНІ ЯВИЩА

Стандартні моделі статистичної фізики, які використовуються для опису фазових переходів, проявляють зовсім незвичні властивості, коли вони розглядаються на складних мережах. Сам цей факт є достатньою причиною для дослідження особливостей критичної поведінки на складних мережах. Проте існує ще одна мотивація такої постановки задачі. А саме, для спрощеного опису формування думки в суспільстві часто використовують просту спінову модель (модель Ізинґа) на складних мережах, які в цьому випадку відповідають соціальним мережам. Ці та інші причини зумовили численні дослідження фазових переходів і критичної поведінки на складних мережах. На деяких з цих досліджень ми зупинимося далі, переважно аналізуючи статичну критичну поведінку, задачі динаміки див., наприклад, в [115–117]. Ми почнемо з того, що покажемо, як змінюється теорія Ландау при розгляді фазових переходів на безмасштабних мережах (підрозділ VIA), потім перейдемо до розгляду мікроскопічних спінових моделей на мережах тісного світу (VIB) та безмасштабних мережах (VIC, VID).

### A. Теорія Ландау

Феноменологічну теорію фазових переходів на безмасштабних складних мережах можна сформулювати в дусі теорії Ландау [118], і вона ґрунтується на трьох припущеннях [8, 119], які наводимо нижче.

- (i) Припущення, що вільна енергія  $\Phi(x, H)$  системи поблизу критичної точки залежить як від параметра порядку  $x$  (надалі розглядатимемо скалярний параметр порядку), так і від розподілу ступенів вузлів і є лінійним функціоналом цього розподілу:

$$\Phi(x, H) = -Hx + \sum_{k=0}^{\infty} P(k)\varphi(x, kx), \quad (6.1)$$

де  $H$  — поле, спряжене до параметра порядку. Другий доданок при конкретному значенні  $k$  дорівнює внеску у вільну енергію всіх вершин мережі зі ступенем  $k$ .

- (ii) Припущення, що функція  $\varphi(x, y)$  — аналітична функція своїх аргументів. Тоді для малих  $x$  та  $y$  її можна записати як [119]

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \varphi_{m\ell} x^m y^{\ell}, \quad (6.2)$$

де  $\varphi_{m\ell}$  — функції температури  $T$  та поля  $H$ . Під температурою можна розуміти і якийсь інший параметр, зміна якого може привести до впорядкування системи.

- (iii) Припущення, що вільна енергія є скінченною при скінченних  $x$  та  $H$ .

Справедливість припущень (i) та (ii) були перевірені на прикладі кількох моделей на нескорельованих структурах. Ними можуть бути як спінові моделі, так і, зокрема, розгляд фазового переходу народження гігантської компоненти [8]. Результати показують відповідність припущень реальним характеристикам систем. Залежність функції  $\varphi(x, kx)$  від  $kx$  в (6.1) можна пояснити так. Те, що ступінь вершини дорівнює  $k$ , означає, що вона має  $k$  сусідів. У наближенні середнього поля кожна з таких вершин має “намагнетченість”  $x$ , що створює середнє поле для вибраної вершини  $kx$ . Третє припущення є природно зрозумілим.

Зауважимо, що вільна енергія  $\Phi(x, H)$  повинна бути скінченною при скінченному значенні  $\langle k \rangle$ . Ця умова задовольняється при  $y \gg 1$  і довільному значенні  $x$ , якщо  $\varphi(x, y)$  зростає повільніше, ніж  $y$ :

$$\varphi(x, y) \leq g(x)y. \quad (6.3)$$

Підставляючи розклад (6.2) в (6.1) і звертаючи увагу на те, що  $\sum_k P(k)k^{\ell} \equiv \langle k^{\ell} \rangle$ , отримуємо вільну енергію  $\Phi$  як функцію моментів  $\langle k^{\ell} \rangle$  та параметра порядку  $x$ . Далі аналізуємо, дотримуючись стандартних кроків Ландау. Вільну енергію в нульовому полі поблизу точки фазового переходу  $T_c$  записуємо як функцію параметра порядку

$$\Phi(x, H = 0) = f_2 x^2 + f_3 x^3 + f_4 x^4 + \dots \quad (6.4)$$

З умови рівності нулеві в  $T_c$  коефіцієнта при другому степені параметра порядку отримуємо, що критична температура визначається співвідношенням перших двох моментів ступенів вузлів:

$$T_c = T_c \left( \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \right). \quad (6.5)$$

А розв'язуючи рівняння стану

$$\frac{d\Phi(x, H)}{dx} = 0, \quad (6.6)$$

знаходимо термодинамічні характеристики системи. Для нескорельованих безмасштабних мереж зі степеневим розподілом ступенів вузлів (2.9) остаточно

поведінка суттєво залежить від показника степеня  $\gamma$  [119]. Температурна залежність деяких термодинамічних характеристик для різних співвідношень між величинами  $f_3, f_4$  (6.4) наведена в таблиці III. Випадок  $\gamma \leq 2$  не розглядається, оскільки в цьому діапазоні середній ступінь вершини не є скінченним.

		$x$	$\delta C(T < T_c)$	$\chi$
$f_3 = 0, f_4 > 0$	$\gamma > 5$	$\tau^{1/2}$	стрибок при $T_c$	$\tau^{-1}$
$f_3 = 0, f_4 > 0$	$\gamma = 5$	$\tau^{1/2}/(\ln \tau^{-1})^{1/2}$	$1/\ln \tau^{-1}$	$\tau^{-1}$
$f_3 = 0, f_4 > 0$	$3 < \gamma < 5$	$\tau^{1/(\gamma-3)}$	$\tau^{(5-\gamma)/(\gamma-3)}$	$\tau^{-1}$
$f_3 > 0$	$\gamma > 4$	$\tau$	$\tau$	$\tau^{-1}$
$f_3 > 0$	$\gamma = 4$	$\tau/(\ln \tau^{-1})$	$\tau/(\ln^2 \tau^{-1})$	$\tau^{-1}$
$f_3 > 0$	$3 < \gamma < 4$	$\tau^{1/(\gamma-3)}$	$\tau^{(5-\gamma)/(\gamma-3)}$	$\tau^{-1}$
довільні	$\gamma = 3$	$\exp(-cT)$	$T^2 \exp(-2cT)$	$t^{-1}$
$f_3$ та $f_4$	$2 < \gamma < 3$	$T^{-1/(3-\gamma)}$	$T^{-(\gamma-1)/(3-\gamma)}$	$t^{-2}$

Таблиця III. Залежність параметра порядку  $x$ , питомої теплоємності  $\delta C$  та сприйнятливості  $\chi$  від температури,  $\tau = |T - T_c|$ , для нескорельованих безмасштабних мереж при різних значеннях показника розподілу ступенів вузлів  $\gamma$ . Результати подано для різних значень  $f_3$  та  $f_4$ . Константа  $c$  визначається з вигляду  $P(k)$ . При  $f_3 < 0$  або при  $f_4 < 0$  і  $f_3 = 0$  система зазнає фазового переходу першого роду [119].

Зауважимо, що якщо моменти розподілу ступенів  $\langle k^\ell \rangle$  при  $\ell < p$  є скінченними, а при  $\ell \geq p$  розбігаються, то при  $\ell < p$  всі похідні  $\Phi^{(n)}(0) \equiv \frac{d^n \Phi(x, H)}{dx^n} |_{x=0}$  також скінченні, а при  $\ell \geq p$  вони розбігаються. Така поведінка приводить до відхилення від поведінки середнього поля.

## В. Мережі тісного світу

### 1. Модель Ізинґа на мережах тісного світу

Розгляд спінових задач на складних мережах із мікроскопічної точки зору розпочався з досліджень моделі Ізинґа на мережах тісного світу. Нагадаємо, що модель Ізинґа на одновимірній ґратці, за відсутності зовнішнього поля, описуємо гамільтоніаном:

$$H = - \sum_{\langle i, j \rangle} S_i S_j, \quad (6.7)$$

де підсумовуємо за найближчими сусідами  $i, j$ , а спіни  $S_i = \pm 1$ . Як виходить із класичного розв'язку цієї моделі [120], спонтанна намагнетченість відсутня для будь-якої температури  $T \neq 0$ . Інакшою є ситуація, якщо гамільтоніан (6.7) розглядати не на одновимірній ґратці із взаємодією найближчих сусідів, а на мережі тісного світу Ваттса–Строґаца, що отримується з одновимірної ґратки із взаємодією  $k_{\text{reg}}$  найближчих сусідів процедурою Perez'єднання з концентрацією Perez'єднаних зв'язків  $m$  (див. рис. 12). Така спінова система залежно від температури  $T$  може мати два різні характери поведінки. Перехід (crossover) від поведінки, характерної для одновимірної регулярної ґратки, до поведінки теорії середнього поля здійснюється за доволно малої концентрації Perez'єднаних зв'язків  $m$  при достатньо низьких температурах  $T < T_{\text{co}}(m)$  [121]:

снюється за доволно малої концентрації Perez'єднаних зв'язків  $m$  при достатньо низьких температурах  $T < T_{\text{co}}(m)$  [121]:

$$T_{\text{co}} \sim - \frac{k_{\text{reg}}(k_{\text{reg}} + 2)}{4 \ln(m)}, \quad m \ll 1, \quad (6.8)$$

де  $k_{\text{reg}}$  — ступінь вузла при  $m = 0$ . У низькотемпературному режимі  $T \ll T_{\text{co}}(m)$  відбувається фазовий перехід до феромагнетного стану. Поєднуючи комп'ютерні та аналітичні розрахунки, у роботі [121] оцінено температуру переходу у феромагнетний стан  $T_c$ . Зокрема, для малих значень  $m$ :

$$T_c \sim - \frac{k_{\text{reg}}}{\ln(m)}. \quad (6.9)$$

Зауважимо, що мережа тісного світу, побудована за алгоритмом Ваттса–Строґаца, навіть при ймовірності Perez'єднування  $m = 1$ , локально зберігає певну інформацію про вихідну одновимірну ґратку. Є й інші способи отримання мереж тісного світу, що дають подібні фізичні наслідки. Одним із них є алгоритм, що полягає в додаванні до одновимірної ґратки далекосяжних зв'язків між випадково вибраними парами вузлів, залишаючи без змін регулярні зв'язки [122, 123]. Такий алгоритм полегшує аналітичні розрахунки, і більшість описаних нижче результатів була отримана на мережах, побудованих за його допомогою. У праці [124] модель Ізинґа розглянуто на мережах тісного світу Ваттса–Строґаца, отриманих двома процедурами Perez'єднання, які відповідали різним фізичним інтерпретаціям. Далекосяжні зв'язки вибрано або розподілені рівноважно, або зафіксованими в якійсь конфігурації. Для фізичної

системи перший випадок може відповідати, наприклад, далекосяжним міжспіновим взаємодіям, пов'язаним з вільними електронами. Такі взаємодії, подібно до самих спінів, можуть досягнути термодинамічної рівноваги. Остаточний розподіл називається відпаленим (annealed). З іншого боку, якщо причиною додаткових взаємодій є домішки, то може реалізуватися другий, нерівноважний, чи так званий заморожений (quenched), випадок [125–127]. Для обох розподілів показано [124], що поява фазового переходу в феромагнетний стан вимагає певної мінімальної кількості далекосяжних зв'язків  $p_{\min}$ . Якщо через  $p$  позначити середню кількість далекосяжних зв'язків на одну вершину (так, що при  $p = 0$ , мережа перетворюється на одновимірний регулярний ланцюжок, а при  $p = 1$  кожна вершина має в середньому ступінь  $\langle k \rangle = k_{\text{reg}} + 1$ ), то  $p_{\min} \leq 1$  для відпаленого випадку і  $p_{\min} \approx 1$  для замороженого. Наявність фазового переходу була підтверджена чисельними симуляціями [128, 129]. Отримані значення критичних показників відповідають теорії середнього поля [129]. Точний розв'язок моделі Ізинґа на мережі тісного світу [134] підтвердив висловлені раніше положення про те, що перехід є таким, як у теорії середнього поля. Зокрема, для  $k_{\text{reg}} = 2$  та замороженого перез'єднання отримано асимптотичну оцінку температури фазового переходу:

$$T_c = \frac{2J}{\ln(1/2m)}, \quad m \ll 1, \quad I > \frac{J}{\ln(1/2m)}, \quad (6.10)$$

де  $J, I$  — константи короткосяжної взаємодії найближчих сусідів та далекосяжної взаємодії перез'єднаних зв'язків відповідно.

Поведінку типу середнього поля спостерігаємо і для моделі Ізинґа на мережах тісного світу, побудованих перез'єднуванням дво- та тривимірних ґраток [133]. Такі мережі будуються заміною випадково вибраної частки  $m$  регулярних зв'язків на зв'язки між випадково вибраними парами вершин. На відміну від одновимірної регулярної ґратки, модель Ізинґа на регулярних дво- та тривимірних структурах зазнає фазового переходу другого роду у феромагнетний стан при скінченній температурі [30, 31]. Перез'єднування приводить до зміни температури фазового переходу. Різниця між температурою переходу на регулярній та перез'єднаній ґратках змінюється як  $\Delta T_c \sim p^s$  (принаймні в межах  $p$  від  $10^{-3}$  до  $10^{-2}$ ) з показником [133]:

$$s \approx \begin{cases} 0.52, & \text{при } D = 2, \\ 0.96, & \text{при } D = 3. \end{cases} \quad (6.11)$$

Числові симуляції, проведені в роботі [133], показали, що при довільному  $m > 0$  критична поведінка починає описуватися показниками середнього поля. Зокрема, для вимірності ґратки  $D = 2$  показник намагнетченості  $\beta$  різко змінюється від 0.125 (для  $m = 0$ ) до 0.5 (для  $m > 0$ ). Аналогічно, показник кореляційної довжини  $\nu$  в межах похибки дорівнює 0.5.

Модель Ізинґа, побудовану на видозміненій мережі тісного світу Ватса–Строґаца із взаємодією, що

залежить від відстані між вузлами, досліджено в роботі [130]. Взаємодію між далекими сусідами  $i$  та  $j$ , евклідова відстань між якими становить  $r_{ij}$ , описано енергією  $J_{ij} \sim r_{ij}^{-\alpha}$ . Числові симуляції, проведені при різних значеннях  $\alpha$ , показали, що фазовий перехід у такій системі відсутній при будь-якому значенні  $\alpha > 0$ . Фазову діаграму та релаксаційну поведінку моделі Ізинґа на ґратці тісного світу при різних співвідношеннях інтенсивностей далекосяжних і короткосяжних взаємодій досліджено в праці [131]. Спеціальний випадок мережі, яка будувалась додаванням до одновимірної ланцюжка далекосяжних зв'язків з імовірністю з'єднання, що степенево залежала від евклідової відстані  $\ell$ ,  $P(\ell) \sim \ell^{-\delta}$ , розглянуто у праці [132]. Модель Ізинґа на такій мережі при значенні  $0 \leq \delta < 1$  зазнає фазового переходу типу середнього поля, що пов'язано з наявністю ефекту тісного світу в цьому діапазоні. При значенні  $\delta > 2$  поведінка аналогічна до поведінки одновимірної регулярної ґратки. При значеннях  $1 < \delta < 2$  поведінку системи можна описувати поведінкою регулярної ґратки з ефективною вимірністю, що зменшується від 4 (при  $\delta = 1$ ) до 1 (при  $\delta = 2$ ) [132].

## 2. XY-модель на мережах тісного світу

Якщо спіни в гамільтоніані моделі Ізинґа (6.7) вважати двокомпонентними векторами, то отримуємо так звану XY-модель. Вона є одним із узагальнень моделі Ізинґа на випадок неперервної симетрії. Зафіксувавши довжину спіну, гамільтоніан XY-моделі на одновимірній ґратці можна записати як:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\phi_i - \phi_j), \quad (6.12)$$

де кут  $\phi_i$  показує напрямок спіну на вузлі  $i$ . Подібно до одновимірної моделі Ізинґа (6.7), за ймовірності перез'єднування  $p = 0$ , така спінова система не проявляє далекосяжного впорядкування при жодній скінченній температурі. Однак, якщо наявні далекосяжні зв'язки ( $p > 0$ ), у системі відбувається фазовий перехід у феромагнетний стан із критичними показниками середнього поля, незалежно від імовірності перез'єднання  $p$  [135–137]. Отримані комп'ютерними симуляціями в роботі [135] значення статичних критичних показників параметра порядку, сприйнятливості та кореляційного об'єму [138] XY-моделі на мережі тісного світу:

$$\beta = 1/2, \quad \alpha = 0, \quad \bar{\nu} = 2 \quad (6.13)$$

були підтверджені у працях [136, 137] ( $\beta \simeq 0.51$ ,  $\bar{\nu} \simeq 2.040$  [136]). Динамічна критична поведінка також виявилась такою, як передбачає теорія середнього поля. Динамічний критичний показник, визначений методом короткочасової релаксації, дорівнює  $z = 0.54(3)$  [137].

Цікаво, що тоді як критична температура моделі Ізинґа на мережі тісного світу має обернену логарифмічну залежність від імовірності перез'єднування  $m$  (6.9), аргументи, наведені в роботі [135], свідчать

про те, що критична температура  $XU$ -моделі мережі тісного світу лінійно підвищується з  $m$ ,  $T_c \sim m$  для малих  $m$ . Дослідження нижньої межі ймовірності перез'єднування, нижче від якої фазовий перехід не відбувається при жодній температурі, в комп'ютерних симуляціях показали досить низькі значення ( $p \approx 0.001$  [135]), які підтверджують думку про те, що цей фазовий перехід може відбуватися при довільно малій концентрації  $p$ .

### С. Модель Ізинґа на безмасштабних мережах

У цьому розділі ми зробимо огляд основних статей про моделі Ізинґа на безмасштабних мережах. Підрозділ VI C 1 стосуватиметься нескорельованих випадкових мереж зі степеневим розподілом ступенів вузлів  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , підрозділ VI C 2 — зростаючої мережі Барабаші–Альберта — безмасштабної мережі, для якої показник  $\gamma = 3$ .

#### 1. Загальний випадковий безмасштабний граф

Точні результати для критичної поведінки моделі Ізинґа на безмасштабних мережах отримані у працях [139, 140] шляхом розв'язування рекурентних співвідношень із застосуванням спеціального анзацу [139], а також за допомогою методу реплік [140]. Поведінка моделі Ізинґа на безмасштабних мережах суттєво залежить від значення показника розподілу ступенів вершин  $\gamma$ . Так, за поведінкою критичної температури можна виокремити два проміжки значень  $\gamma$ . Аналітичні розрахунки показали, що при  $\gamma > 3$  фазовий перехід парамагнетик–феромагнетик відбувається при температурі [139, 140]:

$$\frac{J}{T_c} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k^2 \rangle - 2\langle k \rangle} \right), \quad (6.14)$$

де  $J$  — константа міжспінової взаємодії. Монте-Карло-симуляції показують для великих значень мінімального ступеня  $k_0$  залежність  $T_c = ak_0 + b$ , при  $k_0 = 1$  мережа розбита на багато компонент [141]. У наближенні середнього поля ця температура дорівнює  $T_c = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}$  [140].

При  $\gamma \leq 3$  ситуація суттєво відрізняється. Критична температура в цьому випадку залежить від розміру мережі і прямує до безмежності у границі без-

межної мережі. Зокрема, для  $\gamma = 3$  розбіжність є логарифмічною. Аналітичні результати показують залежність [139]:

$$T_c \approx \frac{1}{4} J \langle k \rangle \ln N, \quad (6.15)$$

тоді як у наближенні середнього поля [140]:

$$T_c \approx \frac{1}{2} J k_0 \ln N. \quad (6.16)$$

Таку ж поведінку виявляють і комп'ютерні симуляції [141]:

$$T_c \approx A \ln N + B. \quad (6.17)$$

При значеннях  $2 < \gamma < 3$  розбіжність має інший характер [139]:

$$T_c \sim J \langle k \rangle N^z, \quad (6.18)$$

де  $z$  залежить від значення  $\gamma$ :  $z = (3 - \gamma) / (\gamma - 1)$  [139]. Поведінку аналогічного характеру отримано і в комп'ютерних симуляціях [141].

Одержані у працях [139, 140] точні результати для критичних показників, що характеризують степеневі особливості термодинамічних величин в околі точки фазового переходу, наведені в таблиці IV. Як бачимо з таблиці, поведінка моделі Ізинґа на нескорельованих безмасштабних мережах суттєво залежить від значення показника розподілу ступенів вузлів. При  $\gamma \geq 5$  поведінка системи нагадує поведінку в теорії середнього поля. При  $3 < \gamma < 5$  критичні показники залежать від значення  $\gamma$ , а при  $\gamma \leq 3$  критична температура стає безмежною і система завжди перебуває у феромагнетному стані. Оскільки при  $\gamma < 3$  критичної температури не існує, в таблиці наведено залежність термодинамічних величин від абсолютного значення температури.

Порівнюючи точні результати, таблиця IV, із результатами феноменологічної теорії, таблиця III, отриманими при відповідних значеннях коефіцієнтів розкладу вільної енергії Ландау ( $f_3 = 0$ ,  $f_4 > 0$ ), пересвідчуємося в тому, що теорія Ландау дає точну критичну поведінку моделі Ізинґа на безмасштабних мережах. Причина полягає в тому, що ці мережі мають локальну деревовидну (tree-like) структуру і їхні вершини є статистично еквівалентними [119, 164].

	$M$	$\delta C(T < T_c)$	$\chi$	$T_c$
$\gamma > 5$	$\tau^{1/2}$	стрибок при $T_c$	$\tau^{-1}$	
$\gamma = 5$	$\tau^{1/2} / (\ln \tau^{-1})^{1/2}$	$1 / \ln \tau^{-1}$	$\tau^{-1}$	$2 / \ln \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k^2 \rangle - 2\langle k \rangle}$
$3 < \gamma < 5$	$\tau^{1/(\gamma-3)}$	$\tau^{(5-\gamma)/(\gamma-3)}$	$\tau^{-1}$	
$\gamma = 3$	$\exp(-2T/\langle k \rangle)$	$T^2 \exp(-4T/\langle k \rangle)$	$T^{-1}$	$\langle k \rangle \ln N$
$2 < \gamma < 3$	$T^{-1/(3-\gamma)}$	$T^{-(\gamma-1)/(3-\gamma)}$	$T^{-1}$	$\langle k \rangle N^{(3-\gamma)/(\gamma-1)}$

Таблиця IV. Залежність намагненості  $M$ , питомої теплоємності  $\delta C$  та сприйнятливості  $\chi$  від температури в околі  $T_c$ ,  $\tau = |T - T_c|$ , а також критична температура  $T_c$  для випадкових безмасштабних мереж при різних значеннях показника розподілу ступенів вузлів  $\gamma$  [139, 140].

Предметом досліджень були також різні модифікації моделі Ізинґа на безмасштабних мережах. Так, у праці [142] проаналізовано модель Ізинґа на безмасштабних мережах із взаємодією  $J_{ij}$  між вузлами (спінами), що залежала від ступенів цих вузлів:

$$J_{ij} = J \langle k \rangle^{2\mu} / (k_i k_j)^\mu, \quad (6.19)$$

де  $J > 0$ . Вивчення такої системи показало, що в наближенні середнього поля критична температура є скінченною при умові, що  $\gamma > 3 - 2\mu$ . Крім того, у цьому наближенні при  $\mu < 1$  модель поводить ся як аналогічна модель з  $\mu' = 0$  і показником розподілу ступенів

$$\gamma' = \frac{\gamma - \mu}{1 - \mu}. \quad (6.20)$$

Дуальне за ребрами (edge-dual) [160] відображення безмасштабної мережі розглянуто у праці [144]. Поставимо у відповідність кожному зв'язку мережі вузол, а зв'язок між цими новими вершинами існує, якщо відповідні вузли мають спільну вершину. Таке дуальне за ребрами відображення нескорельованих мереж має деякі принципово відмінні характеристики від основоположної мережі: високий коефіцієнт

кластерности та завжди додатну асортативність, що свідчить про те, що вузли з багатьма зв'язками часто зв'язані з подібними собі. Якщо розподіл ступенів первинної мережі підлягає степеневій залежності  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , то розподіл ступенів її відображення характеризуватиметься також степеневою залежністю  $\tilde{P}(k) \sim k^{-\tilde{\gamma}}$  для великих ступенів, де  $\tilde{\gamma} = \gamma - 1$  [145].

Відомо, що критична температура моделі Ізинґа на такому відображенні до ґратки Бете характеризується вищою критичною температурою, аніж відповідна ґратка Бете, а фазовим переходом керують критичні показники теорії середнього поля [160].

Модель Ізинґа на дуальному за ребрами відображенні до випадкової безмасштабної мережі характеризується критичною температурою  $\frac{\tilde{J}}{T_c} \sim \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}$ , подібно як і для відповідних нескорельованих мереж. Поведінка такої системи при  $\tilde{\gamma} > 4$  описується критичними показниками середнього поля, аналогічно як і для регулярної ґратки з  $d > 4$ , а також нескорельованих безмасштабних мереж з показником  $\gamma > 5$ . У випадку  $\tilde{\gamma} = 4$  виникають логарифмічні поправки критичних залежностей. При  $2 < \tilde{\gamma} < 4$  аналогічно, як і у вихідній мережі, виникають залежності критичних показників від  $\tilde{\gamma}$ . Усі ці залежності наведені в таблиці V.

	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\delta\tilde{C}$	$\tilde{\chi}$
$\gamma > 5$ ( $\tilde{\gamma} > 4$ )	$\tilde{\tau}^{1/2}$	$\tilde{H}^{1/3}$	стрибок при $T_c$	$\tilde{\tau}^{-1}$
$\gamma = 5$ ( $\tilde{\gamma} = 4$ )	$\tilde{\tau}^{1/2}$	$\tilde{H} / \ln(\tilde{H})^{1/3}$	$\ln(\tilde{\tau})$	$1/\tilde{\tau} \ln \tilde{\tau}$
$3 < \gamma < 5$ ( $2 < \tilde{\gamma} < 4$ )	$\tilde{\tau}^{1/2}$	$\tilde{H}^{(8-\gamma)/9}$	$\tilde{\tau}^{(\gamma-5)/2}$	$\tilde{\tau}^{(3-\gamma)/2}$

Таблиця V. Залежність спонтанної намагненості  $\tilde{M}$  від температури (друга колонка) та зовнішнього магнетного поля при  $\tilde{T}_c$  (третя колонка), а також температурні залежності питомої теплоємності  $\delta\tilde{C}$  та сприйнятливості  $\tilde{\chi}$  для дуального за ребрами відображення випадкових безмасштабних мереж при різних значеннях показника розподілу ступенів вузлів  $\gamma$  ( $\tilde{\gamma}$ ) [144]. Величини без знака тильди стосуються початкової мережі, зі знаком — її дуального за ребрами відображення.

Випадок спінової мережі з антиферомагнетними взаємодіями значно відрізняється через ефект фрустрації вздовж зв'язаних циклів на графі. Модель Ізинґа з антиферомагнетними взаємодіями на безмасштабних мережах проаналізовано у статтях [146,147]. Парну кореляційну функцію моделі Ізинґа на нескорельованих складних мережах розглянуто у праці [148].

## 2. Мережі Барабаші–Альберта

Окремим випадком безмасштабних мереж є зростаюча мережа Барабаші–Альберта, яку ми описали в підрозділі III C. Нагадаємо, що це безмасштабна мережа з розподілом ступенів вузлів  $P(k) \sim k^{-3}$ . Уже в перших комп'ютерних симуляціях моделі Ізинґа на такій мережі виявлено фазовий перехід у впорядкований стан, причому ефективна критична температура цього переходу зростає як логарифм кількос-

ти вузлів [149]. Цей результат підтверджено аналітичними розрахунками в наближенні середнього поля [149,150]. Цікаво, що мотивацією проведених досліджень було моделювання виникнення суспільної думки (opinion formation). У такій постановці задачі ізинґівські спіни  $S_i = \pm 1$  відповідають двом можливим точкам зору членів певної соціальної групи, а величина  $\exp(-\text{const}/T)$  відповідає ймовірності того, що члени групи не мають спільного погляду. Відповідно, мережа Барабаші–Альберта служить моделлю соціальної мережі. Точка Кюрі відповідає переходові зі стану, у якому переважає погляд “більшості” (majority opinion) до стану із двома однаково поширеними точками зору.

Зовсім недавно модель Ізинґа досліджували на двох поєднаних мережах Барабаші–Альберта [151]. Зв'язки між вузлами різних мереж приєднувалися згідно зі сценарієм переважного приєднання. Критична температура такої системи виявилась залежною від критичних температур обох мереж  $T_{cA}$  та  $T_{cB}$  (які своєю



чергою залежать від розміру відповідних мереж) та кількості зв'язків між мережами [151]:

$$T_{c\pm} = \frac{T_{cA} + T_{cB}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{T_{cA} - T_{cB}}{2}\right)^2 + p_{APB}T_{cA}T_{cB}}, \quad (6.21)$$

де  $p_A$  та  $p_B$  дорівнюють половині кількості зв'язків між мережами в розрахунку на один зв'язок у відповідній мережі. Знак “-” відповідає мережам, які впорядковані з антипаралельними зваженими спінами, знак “+” — мережам, які впорядковані з паралельними зваженими спінами. Такою системою також можна описувати просту модель формування суспільної думки у двох соціальних мережах, де існують знайомства між індивідами з різних мереж.

Описані вище результати стосувались моделі Ізинґа на неспрямованій мережі Барабаші–Альберта. Недавні комп'ютерні симуляції, проведені для спрямованої мережі, свідчать про відсутність спонтанної намагненості [152, 153].

#### D. Урахування структурного безладу

Дослідження впливу структурного безладу на критичну поведінку спінових моделей на регулярних ґратках [126, 127] також знайшло своє продовження в розгляді аналогічних задач на мережах. Поряд із запровадженням відпаленого та замороженого безладу в мережах тісного світу Ваттса–Строґаца [124], про що ми вже згадували в підрозділі VIB1, розглядаються задачі про фазовий перехід у структурнонепорядкованій моделі Ізинґа на безмасштабних мережах. Так, фазовий перехід при нульовій температурі в моделі Ізинґа з випадковим замороженим магнетним полем на безмасштабних мережах розглянуто в роботі [156]. Локальні зовнішні магнетні поля  $h_i$  вважались випадковими величинами, розподіленими із симетричною функцією розподілу  $p(h) = p(-h)$  [156]

$$p(h) = \frac{1}{\Delta} p_0\left(\frac{h}{\Delta}\right), \quad (6.22)$$

де нормована функція  $p_0(x)$  визначає характер розподілу, а  $\Delta$  є мірою безладу і керуючим параметром, при зміні якого в системі виникає фазовий перехід у впорядкований стан.

Отримані аналітичні та чисельні результати свідчать про таку фазову поведінку. При  $\gamma > 5$  поведінка системи залежить від характеру функції розподілу зовнішнього магнетного поля і при  $p_0''(0) > 0$  вона знає фазового переходу першого роду, при  $p_0''(0) < 0$  — неперервного фазового переходу з критичним показником параметра порядку  $\beta = 1/2$ , що є характерно в теорії середнього поля, а також знайдено для моделі Ізинґа на безмасштабних мережах при  $\gamma > 5$ . При  $3 < \gamma < 5$  рід фазового переходу також визначається формою розподілу (6.22). Якщо фазовий перехід є другого роду, тоді критичний показник  $\beta = \frac{1}{\gamma-3}$

(порівн. зі значеннями  $\beta$ , отриманими в цьому ж діапазоні для безмасштабних мереж, таблиця IV). При  $2 < \gamma < 3$  система завжди перебуває в упорядкованому стані, незалежно від характеру розподілу випадкових полів.

Перехід у стан спінового скла розглянуто у працях [154, 155]: в одній із них досліджено модель спінового скла на так званих реальних мережах [154], у другій — ізинґівські моделі спінового скла на безмасштабних мережах [155].

## VII. ПЕРКОЛЯЦІЯ І СКЛАДНІ МЕРЕЖІ

Із перколяцією пов'язані різноманітні явища, що відбуваються з мережами і на них. Як можна побудувати мережу, що містить гігантський кластер, та якими є властивості мережі, коли з'являється цей кластер? Які стратегії знищення гігантського кластера і наскільки стійкою є мережа до застосування різних сценаріїв атак? Як мережею поширюється інфекція і яка оптимальна стратегія імунізації, щоб зупинити це поширення? Ці та інші схожі запитання дали початок застосуванню ідей теорії перколяції [157, 158] при описі мереж, а пошук відповідей на них пролив світло на багато спільних рис між явищами, що відбуваються зі складними мережами й перколяцією.

У цьому розділі, увівши основні поняття теорії перколяції (підрозділ VIIA), ми обговоримо перколяцію на складних мережах, узявши за приклади класичний випадковий граф Ердоша–Рені, ґратку Бете й мережу тісного світу Ваттса–Строґаца (підрозділ VIIB). У підрозділі VIIС ми продовжимо наш огляд, переходячи до особливостей безмасштабних мереж, зокрема обговорюючи їх вразливість (vulnerability) до усунення складових частин (зворотна задача перколяції). У підрозділі VII D розглянемо задачу про поширення епідемії на безмасштабних мережах і пов'язані з нею проблеми.

#### A. Перколяція як критичне явище

Означимо спостережувані величини, що використовуються при кількісному описі явища перколяції [157, 158]. Розглянемо  $d$ -вимірну ґратку, що має лінійний розмір  $L$  і містить  $N = L^d$  вузлів. Нехай кожен вузол зайнятий з імовірністю  $p$  (відповідно, він вільний з імовірністю  $q = 1 - p$ ). Присвоюючи змінну  $p$  зайнятості вузла, говорять про *перколяцію вузлів* (site percolation). Відповідно, змінну  $p$  можна пов'язати із зайнятістю зв'язку між вузлами, що приведе до задачі про *перколяцію зв'язків* (bond percolation). Зі зростанням  $p$  від нуля кількість зайнятих вузлів (зв'язків) збільшується, і на ґратці з'являються зайняті кластери середнього розміру  $S(p)$ . Нарешті, при певному значенні  $p_c$  виникає перколяційний або проникаючий (spanning) кластер, що досягає протилежних країв ґратки і, таким чином, має безмежний розмір при  $L \rightarrow \infty$ . Значення  $p_c$  неуніверсальне для за-

даної вимірності простору, воно різне для перколяції вузлів і перколяції зв'язків, а також залежить від типу ґратки. Однак в околі  $p_c$  деякі характеристичні величини описуються степеневими законами. А саме: ймовірність того, що випадково обраний вузол (зв'язок) належить до перколяційного кластера, змінюється як:

$$P(p) = \begin{cases} 0, & p < p_c, \\ \sim (p - p_c)^\beta, & p \rightarrow p_c^+. \end{cases} \quad (7.1)$$

Середній розмір кластера й кореляційна довжина розбігаються:

$$S(p) \sim |p - p_c|^{-\gamma_p}, \quad p \rightarrow p_c, \quad (7.2)$$

$$\xi(p) \sim |p - p_c|^{-\nu}, \quad p \rightarrow p_c. \quad (7.3)$$

Індекс  $p$  в показникові  $\gamma_p$  написаний для того, щоб відрізнити цей показник від показника розподілу ступенів вузлів  $\gamma$  (2.9). Показники  $\beta, \gamma, \nu$  збігаються для перколяції вузлів та перколяції зв'язків і залежать лише від  $d$ , — кажуть, що вони універсальні. Вимірність простору  $d = 1$  — це нижня критична вимірність перколяції: при  $d \leq 1$  це явище не відбувається. А вимірність  $d = 6$  вважається верхньою критичною вимірністю: для  $d \geq 6$  показники залишаються незмінними і приймають значення теорії середнього поля:

$$\beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \nu = 1/2. \quad (7.4)$$

Чисельна густина кластерів, що містять  $s$  зайнятих вузлів (зв'язків), змінює поведінку від

$$\ell_s(p) \sim s^{-\tau} \exp(-cs), \quad p < p_c \quad (7.5)$$

до

$$\ell_s \sim s^{-\tau}, \quad p = p_c. \quad (7.6)$$

А коефіцієнт  $c$  в (7.5) зникає при наближенні до  $p_c$  як

$$c \sim (p_c - p)^{1/\sigma}, \quad p \rightarrow p_c^-. \quad (7.7)$$

Критичні показники перколяції пов'язані співвідношеннями скейлінгу. Зокрема показники (7.1)–(7.3) можна виразити через  $\tau$  і  $\sigma$ :

$$\beta = \frac{\tau - 2}{\sigma}, \quad \gamma_p = \frac{3 - \tau}{\sigma}, \quad \nu = \frac{\tau - 1}{d\sigma}. \quad (7.8)$$

У наближенні середнього поля показники  $\tau$  і  $\sigma$  дорівнюють:

$$\tau = 5/2, \quad \sigma = 1/2. \quad (7.9)$$

Описані вище властивості пов'язують перколяцію з критичними явищами [30, 31], зокрема з термодинамічними фазовими переходами другого роду, де подібну степеневу залежність спостерігаємо при наближенні до температури Кюрі  $T_c$  для параметра порядку — спонтанної намагнетченості (пор. р-ня (7.1)) і для функції, що описує реакцію системи на зовнішню дію — ізотермічної сприйнятливості (пор. р-ня (7.2)).

Зазначимо, що сингулярності (7.2), (7.3) виникають лише в безмежних системах. Для систем скінченного розміру  $L$  перехід не має чіткого порога й система демонструє тенденцію до критичної поведінки в ділянці, що характеризується шириною [159]

$$\Delta p_c \sim L^{-1/\nu}, \quad (7.10)$$

де  $\nu$  — критичний показник кореляційної довжини (7.3).

### В. Перколяція на випадковому графі Ердоша–Рені, ґратці Бете і мережі тісного світу Ваттса–Строґаца. Критерій Моллоя–Ріда

Величина, що “заміняє” перколяційний кластер, коли розглядається перколяція на мережі — це гігантська зв'язана компонента, ГЗК (giant connected component). ГЗК мережі — це множина взаємно досяжних вузлів, що містить скінченну частку вузлів навіть у границі, коли розмір мережі  $N \rightarrow \infty$ .

Показники середнього поля (7.4), (7.9) справедливі для будь-якого  $d > 6$ . Зокрема вони характеризують перколяцію на ґратці безмежної вимірності. Своєю чергою, така ґратка має спільні властивості з декількома мережами, які ми розглянемо нижче. Для випадкового графа Ердоша–Рені з  $N$  вузлів, кожна з пар яких пов'язана з імовірністю  $p$ , доведено, що ГЗК з'являється при [21, 22]

$$p_c \simeq 1/N, \quad (7.11)$$

або, інакше кажучи, перколяція відбувається при середньому ступені вузла

$$\langle k \rangle \geq 1. \quad (7.12)$$

Критичні показники, які керують скейлінгом різних величин для випадкового графа Ердоша–Рені, в межі  $N \rightarrow \infty$  в околі точки  $p_c$  збігаються з показниками для перколяції в теорії середнього поля, (7.4), (7.9) [3, 21, 22].

Ті ж значення показників керують перколяцією на іншому типі мереж з ефективною безмежною вимірністю. Це ґратка Бете (див. рис. 28), для якої існує точний розв'язок [157, 158]. За означенням, ґратка Бете є безмежним об'єктом, якому відповідає скінченний об'єкт, дерево Кейлі, яке має центральний вузол, а його межа складається з вузлів, ступені яких дорівнюють одиниці [8, 160]. Кількість вузлів на його межі (тобто поверхні) пропорційна загальній кількості вузлів (об'єму): для регулярного  $d$ -вимірного об'єкта така властивість існує лише в границі  $d \rightarrow \infty$ . Для ґратки Бете з координатним числом  $z$ , поріг для перколяції зв'язків з імовірністю зайнятості зв'язка  $p$  задається співвідношенням:

$$p_c = \frac{1}{z - 1}, \quad (7.13)$$

тоді як інші величини, означені в (7.1), (7.2), (7.5), дорівнюють:

$$P(p) = \frac{2p-1}{p^2}, \quad p > p_c, \quad (7.14)$$

$$S(p) = \frac{3}{2(1-2p)}, \quad (7.15)$$

$$\ell_s(p) \sim s^{-5/2} p^{s-1} (1-p)^{s+1}. \quad (7.16)$$

Легко помітити, що в околі  $p_c$  вирази (7.14)–(7.16) прямують до степеневі залежності з безмежновимірними перколяційними показниками (7.4), (7.9).

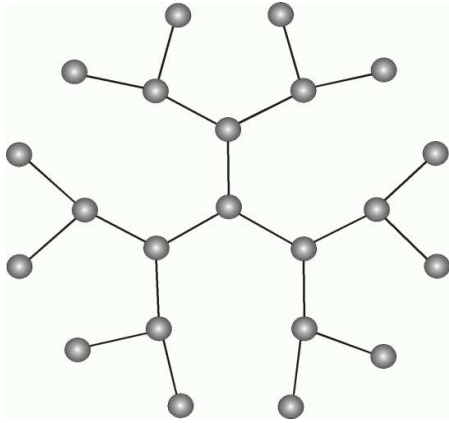


Рис. 28. Приклад ґратки Бете (дерево Кейлі) з координаційним числом  $z = 3$ . Межа складається з вузлів із  $z = 1$ .

Іншою мережею, якій притаманні критичні показники середнього поля, є мережа тісного світу Ваттса–Строгаца [161]. Незважаючи на те, що вона походить від одновимірної ґратки, її ефективна вимірність у границі великого розміру системи є нескінченною [162]. Точні розв'язки для перколяції вузлів та зв'язків на мережі тісного світу, отримані в праці [163] при використанні методу генеруючих функцій [164], підтвердили раніше одержаний на основі методу трансфер-матриці вираз для  $p_c$  [165]. Для перколяційного порога  $p_c$  перколяції вузлів задача описується ймовірністю  $m$  існування короткого зв'язку між випадково вибраною парою вузлів у моделі Ваттса–Строгаца [161] і ступенем вузла  $k$  через [163, 165]:

$$m = \frac{(1-p_c)^k}{2kp_c[2-(1-p_c)^k]}. \quad (7.17)$$

Для задачі про перколяцію зв'язків вираз є громіздким і може бути визначений для різних  $k$ :

$$m = \frac{1-p_c}{2p_c(1+p_c)}, \quad k = 1, \quad (7.18)$$

$$m = \frac{(1-p_c)^3(1-p_c+p_c^2)}{4p_c(1+3p_c^2-3p_c^3-2p_c^4+5p_c^5-2p_c^6)}, \quad k = 2. \quad (7.19)$$

Важливим критерієм для визначення перколяційного порога на мережі є умова, що середня кількість

других найближчих сусідів випадково вибраного вузла  $z_2$  є більшою за середню кількість її найближчих сусідів  $z_1$ :

$$z_2 > z_1. \quad (7.20)$$

Беручи до уваги, що  $z_1, z_2$  пов'язані зі середніми значеннями ступеня та квадрата ступеня  $\langle k \rangle, \langle k^2 \rangle$  через (див. наприклад [8]):

$$z_1 = \langle k \rangle \quad (7.21)$$

$$z_2 = \langle k^2 \rangle - 2\langle k \rangle, \quad (7.22)$$

отримуємо такі оцінки для визначення перколяційного порога:

$$\sum_k k(k-2)P(k) = 0. \quad (7.23)$$

Умова (7.23) відома як критерій Моллоя–Ріда (Molloy–Reed criterion) [8, 166]. За допомогою іншого підходу цей критерій отриманий також у працях [27, 167]. Нещодавно він був узагальнений для неоднорідної об'єднаної перколяції вузлів і зв'язків [168]. Зокрема в роботі [27] відзначено, що для випадково зв'язаної мережі без зв'язних петель перколяційний перехід існує, коли кожен вузол, який зв'язаний із проникаючим кластером, є зв'язаним принаймні з одним новим вузлом (в іншому випадку проникаючий кластер є фрагментованим). Умова (7.23), записана в іншій формі, має вигляд:

$$\kappa \equiv \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = 2 \text{ при } p_c. \quad (7.24)$$

Зокрема для випадкового графа Ердоша–Рені, підставляючи  $\langle k^2 \rangle = \langle k \rangle^2 + \langle k \rangle$  в (7.24), знову повертаємося до умови (7.12).

Тепер, маючи певну інформацію про особливості перколяції на деяких складних мережах, дослідимо, як відбувається перколяція на безмасштабних мережах.

### С. Вразливість безмасштабних мереж до атак

Перші докази того, що перколяція на безмасштабних мережах сильно відрізняється від перколяції при безмежній вимірності  $d$ , отримано при аналізі кількох реальних безмасштабних мереж: www та інтернету [169, 170], метаболізму [19], мережі харчування [171], протеїнів [172]. Явищем, яке викликало особливе зацікавлення, стала стійкість цих мереж до вилучення їхніх вузлів. З одного боку, виявляється, що ці мережі виявляють несподіваний ступінь стійкості при випадкових ураженнях, з іншого — якщо змінити сценарій нанесення шкоди до “запланована атака”, мережа стає надзвичайно вразливою. Для прикладу, середня продуктивність інтернету зменшується вдвічі, якщо вивести з ладу лише 1% найбільш зв'язаних вузлів. Щобільше, інтернет стає розділеним на малі

незв'язані домени, якщо вивести з ладу 4% цих найбільш зв'язаних вузлів [169]. Проте гігантська компонента все ще існує, якщо викинути всі вузли зі ступенями, більшими за  $k_{\max}$ , для надзвичайно малого значення  $k_{\max}$  (для www отримано  $k_{\max} = 5$  [173]).

Досліджено й інші сценарії умисних атак: в одному зі сценаріїв наперед готувався список вузлів із найбільшими ступенями, і тоді вони по черзі вилучалися з мережі, аж доки не досягався перколяційний поріг [173]; за іншим сценарієм, розподіл ступенів перераховувався після вилучення кожного вузла [169]. Спочатку думали, що на практиці виникає невелика різниця між цими двома сценаріями [167], проте подальший аналіз навів на думку [174], що вилучення з перерахуванням даних часто є небезпечнішою стратегією атаки. Ще один сценарій розглядає викидання за порядком спаду посередництва [174]. Для світової мережі аеропортів нещодавно показано [67,68], що вузли з великим посередництвом відіграють важливішу роль у зберіганні зв'язаності мережі, ніж вузли з великими ступенями. Іноді дослідження вразливості мереж мають несподівані інтерпретації. Так, різну реакцію безмасштабних мереж на цілеспрямовані й випадкові ураження використовували для пояснення стратегії середньовічної інквізиції в придушенні ересі [175].

Аналітичні результати, які супроводжуються емпіричними та Монте-Карло (МС)-дослідженнями, привели до картини перколяційного сценарію на безмасштабних мережах, яку описуємо нижче. З урахуванням того, що розподіл ступенів підкоряється степеневому закону (2.9) для проміжку ступенів вузлів  $k_0 \leq k \leq K$ , отримано таку оцінку для значення параметра  $\kappa$  (7.24) [27]:

$$\kappa \sim \frac{2-\gamma}{3-\gamma} \times \begin{cases} k_0, & \text{якщо } \gamma > 3, \\ k_0^{\gamma-2} K^{3-\gamma}, & \text{якщо } 2 < \gamma < 3, \\ K, & \text{якщо } 1 < \gamma < 2. \end{cases} \quad (7.25)$$

Із рівняння (7.25) виходить, що значення  $\gamma = 3$  розділяє два різні режими для перколяції на безмасштабній мережі. Справді,  $\kappa$  залишається сталою для  $\gamma > 3$ , тому існує перколяційний перехід при скінченному відсотку викинутих вузлів  $q_c$ . Щоб отримати оцінку цієї частки, спочатку зауважимо, що для  $q_c$  критерій (7.24) можна виразити як [27]:

$$p_c = 1 - q_c = \frac{1}{\kappa - 1}, \quad (7.26)$$

де  $\kappa$  обчислюється з оригінального розподілу (2.9) перед атаками. Підставляючи в (7.26) оцінку для  $\kappa$  при  $\gamma > 3$ , рівняння (7.25) набирає вигляду:

$$q_c = 1 - \frac{1}{\frac{\gamma-2}{\gamma-3} k_0 - 1}. \quad (7.27)$$

Зауважимо, що при  $t = 1$  з рівняння (7.27) отримуємо  $q_c = 4 - \gamma$ . Якщо частка викинутих вузлів перевищує  $q_c$  (7.27), гігантського кластера більше не існує, а

мережа є зруйнованою. Проте для  $\gamma < 3$  притаманний інший режим. Справді, при  $\gamma < 3$  значення  $\kappa$  розбігається як додатний степінь  $K$  при  $K \rightarrow \infty$ , і тому отримуємо оцінку  $q_c \rightarrow 1$ , коли  $N \rightarrow \infty$ . Це означає, що для безмежної безмасштабної мережі з  $\gamma < 3$  гігантський кластер існує при довільній частці викинутих вузлів  $q < 1$ : мережа має надзвичайну стійкість до випадкових вилучень вузлів. Переходи, які спостерігалися для реальних систем, є лише ефектом скінченного розміру і зникають у (формальній) границі до безмежних систем. Проте для систем великого розміру перколяція відбувається при дуже великих значеннях  $q_c$ . Щоб навести приклад,  $q_c \simeq 0.99$  для інтернету з  $\gamma \simeq 2.5$  і розміром  $N > 10^6$  [27].

Вразливість безмасштабних мереж до спрямованих атак (коли викидаються вузли з найбільшими ступенями) вивчали у статті [176]. Показано, що викидання  $qN$  вузлів із найбільшими ступенями руйнує  $q^{(\gamma-2)/(\gamma-1)}$  так, що навіть мережа з  $\gamma < 3$  є вразливою до спрямованих атак. Щобільше, поблизу  $p_c$  середня відстань між вузлами в гігантському кластері змінюється з розміром як  $\sqrt{N}$ , а не як  $\log_k N$ , що характерно для випадкової мережі за межами критичності.

Перколяційні критичні показники для безмасштабної мережі з розподілом ступенів (2.9) досягають значень середнього поля лише для  $\gamma > 4$ . Для  $\gamma < 4$  як показники, так і порядок фазового переходу залежать від конкретного значення  $\gamma$ . Перколяційний перехід виявився  $n$ -го порядку для [177]

$$3 + \frac{1}{n-1} < \gamma < 3 + \frac{1}{(n-2)} \quad (7.28)$$

з критичним показником параметра порядку  $\beta$  (порівн. р-ня (7.1)), який задається

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \gamma > 4, \\ \frac{1}{\gamma-3}, & \text{якщо } 3 < \gamma < 4, \\ \frac{1}{3-\gamma}, & \text{якщо } 2 < \gamma < 3. \end{cases} \quad (7.29)$$

Зокрема при  $\gamma = 3$  перехід є безмежного порядку [178, 179]. Повернемося до головної відмінності між перколяційним порогом нижче та вище від  $\gamma = 3$ . Хоча перколяційного порога не існує для  $\gamma < 3$ , формула (7.29) каже, що перколяційні показники залишаються добре визначеними в околі  $p_c = 0$ . Для  $\gamma > 3$  показник (7.29) також був знайдений у [176, 180, 181]. Відповідні результати для перколяційного показника  $\gamma_p$ , означеного в (7.8), отримані в [177]:

$$\gamma_p = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \gamma > 3, \\ -1, & \text{якщо } 2 < \gamma < 3. \end{cases} \quad (7.30)$$

Зауважимо, що  $\gamma_p$  досягає значення середнього поля для всіх  $\gamma > 3$ . Використовуючи співвідношення скейлінгу (7.8), можна отримати всі інші перколяційні показники.

У праці [182] показано, що перколяційні властивості залишаються незмінними при розгляді безмасштабних мереж з однаковим розподілом ступенів, проте з різними кореляційними властивостями.

Подібно до регулярної ґратки скінченного розміру, де перколяційна поведінка спостерігається в ділянці ненульової ширини  $\Delta p_c$  (порівн. р-ня (7.10)), перколяція на безмасштабній мережі скінченного розміру також не характеризується крутим порогом. Для мереж із розподілом ступенів (2.9) відповідну ділянку  $\Delta p_c$  оцінено як [183]:

$$\Delta p_c \sim p_c / \ell, \quad (7.31)$$

де  $\ell \sim N^{\nu_{\text{opt}}}$  — середня довжина перколяційного кластера,  $N$  — загальна кількість вузлів у мережі, а  $\nu_{\text{opt}} = (\gamma - 3)/(\gamma - 1)$  для  $3 < \gamma < 4$ . Тоді як  $\nu_{\text{opt}} = 1/3$  для випадкового графа Ердоша–Рені.

Дещо специфічно відбувається перколяція на так званій  $k$ -кор ( $k$ -core) мережі.  $k$ -кор мережею є найбільший підграф, усі вершини якого мають ступінь, не менший за  $k$ .  $k$ -кор-перколяція передбачає розвал гігантського  $k$ -кор-кластера при пороговій концентрації  $p_c$ . Загальний розв'язок задачі про  $k$ -кор поданий у недавній роботі [184], де також отримано рівняння для критичної концентрації  $p_c(k)$  як функції  $k$ . Окремою властивістю  $k$ -кор перколяції при  $k \geq 3$  є те, що їй притаманні риси фазового переходу як першого, так і другого роду: коли  $p \rightarrow p_c^-$ , відносний розмір  $M_k$  гігантського  $k$ -кору приймає скінченне значення  $M_k(p_c)$ , подібно до параметра порядку в точці фазового переходу першого роду. Проте поведінка  $M_k(p) - M_k(p_c) \sim (p - p_c)^{1/2}$  при  $p \rightarrow p_c^+$  [185] нагадує фазовий перехід другого роду.

#### Д. Поширення епідемій та імунізація

Задачі про поширення хвороби мережею та про вразливість мережі є тісно пов'язаними, оскільки обидві поєднані з явищем перколяції. До прикладу, надзвичайно низький перколяційний поріг для інтернету, який розглядався вище, зумовлює його стійкість до випадкових уражень і водночас він сприяє поширенню комп'ютерних вірусів [28]. Соціальні мережі мають безмасштабні властивості, тому багато хвороб потребують 80–100% імунізації (наприклад, щоб зупинити епідемію кору, необхідно імунізувати 95% населення).

Зазвичай у моделях поширення епідемії кожен вузол мережі відповідає індивіду, а кожен зв'язок — контакт, яким може передатися хвороба іншому індивіду. Точка, при якій появляється епідемія, відповідає перколяційній імовірності, при якій починає формуватися гігантська компонента зв'язаних вузлів. Крім вивчення статичної поведінки системи в околі цієї точки (яка відповідає перколяції), також аналізують динаміку поширення хвороби і нерівноважний фазовий перехід, який є типовим для моделей поширення захворювання. У межах так званої SIS-моделі (susceptible–infected–susceptible, вразливий–

інфікований–вразливий) (див., наприклад, [180]) кожен індивід може існувати у двох дискретних станах: здоровий (вразливий) або інфікований (хворий). Щоб урахувати можливість позбутися індивіда через смерть або імунізацію, розроблено модель SIR (susceptible–infected–removed, вразливий–інфікований–вилучений чи susceptible–infected–recovered, вразливий–інфікований–одужаний), яку вперше сформулювали Л. Рід та В. Г. Фрост (L. Reed, W. H. Frost) у 1920-их, див., наприклад, поклик [187]. Фактично, епідеміологічний поріг еквівалентний до критичної точки в нерівноважному фазовому переході. У цьому випадку критична точка розділяє активну фазу зі стаціонарною інтенсивністю інфікованих вузлів від фази, де є лише здорові вузли й ніякої активності.

У перших спробах описати поширення епідемії використовували моделі, які базувались на випадкових графах, а останні зі зрозумілих причин не відповідають реальним соціальним мережам та мережам комунікацій. Крок до створення більш реалістичної моделі був зроблений при розгляді поширення епідемії на мережі тісного світу типу Ватса–Строгаца. У праці [162] запропоновано й розв'язано для випадку  $1d$  диференціальне рівняння для поширення хвороби на безмежній мережі тісного світу, в якій перенесення хвороби відбувається з 100% ефективністю. Доведено, що модель зазнає неперервного фазового переходу, коли густина випадкових зв'язків прямує до нуля. Пізніше цей розв'язок узагальнено на ґратку скінченного розміру [186] і для вищих вимірностей [188]. Інший крок до реалістичнішого опису полягав у розгляді випадків, коли (i) лише частка  $p$  населення тісного світу є чутливою до захворювання або (ii) не кожен контакт між інфікованим індивідом і здоровим веде до поширення захворювання. Це трактувалося мовою перколяції вузлів (випадок i) та зв'язків (випадок ii) у праці [165].

Динамічну модель поширення епідемії для безмасштабних мереж запропоновано у статті [28]. Розглянуто SIS-сценарій з ефективним коефіцієнтом поширення  $\delta$ . Остання величина визначається відношенням швидкості, з якою здорові (вразливі) вузли інфікуються, до швидкості, з якою вони виліковуються. Динамічні рівняння для швидкості реакції для часової еволюції відносної густини  $\rho_k(t)$  інфікованих вузлів із цим ступенем вузла  $k$ , записані в наближенні середнього поля з нехтуванням кореляції густини між різними вузлами, мають вигляд:

$$\partial_t \rho_k(t) = -\rho_k(t) + \delta k [1 - \rho_k(t)] \Theta(\delta). \quad (7.32)$$

Перший член у правій частині рівняння (7.32) розглядає інфіковані вузли, які стають здоровими з однією швидкістю, другий розглядає ймовірність того, що вузол із  $k$  зв'язками є здоровим, тобто  $[1 - \rho_k(t)]$ , і отримує інфекцію через зв'язаний вузол. Останнє є пропорційним до швидкості інфікованості  $\delta$ , кількості зв'язків  $k$  і  $\Theta(\delta)$  — ймовірності, що будь-який зв'язок приєднаний до інфікованого вузла. Стаціонарні густини

$$\partial_t \rho_k = 0 \quad (7.33)$$

були знайдені самоузгодженим шляхом і, нарешті, був оцінений параметр порядку, середня густина інфікованих вузлів

$$\rho = \sum_k P(k) \rho_k. \quad (7.34)$$

Для безмасштабної мережі Барабаші–Альберта [29, 189], яка має розподіл ступенів вузлів  $P(k) = 2k_0^2/k^3$  (з  $k_0 = \langle k \rangle/2$ ), отримуємо таку оцінку для  $\Theta(\delta)$  [28, 180]:

$$\Theta(\delta) = \frac{e^{-1/k_0\delta}}{\delta k_0} (1 - e^{-1/k_0\delta})^{-1}. \quad (7.35)$$

Підставивши її в (7.32), з урахуванням (7.33) отримуємо такі результати для усередненої густини інфікованих вузлів (7.34):

$$\rho \simeq 2e^{-1/k_0\delta}, \quad (7.36)$$

що підтверджує відсутність порога епідемії (чи критичної точки) для моделі:  $\rho = 0$  при  $\delta_c = 0$ .

Подібний аналіз SIS-моделі здійснений для мережі тісного світу Ваттса–Строгаца [180]. Рівняння середнього поля для густини інфікованих вузлів

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(t) = & -\rho(t) + \delta \langle k \rangle \rho(t) [1 - \rho(t)] \\ & + \text{члени вищих порядків} \end{aligned} \quad (7.37)$$

містить середній ступінь вузла  $\langle k \rangle$ . Відповідне рівняння для густини інфікованих вузлів у стаціонарному стані (7.32) має вигляд:

$$\rho [-1 + \delta \langle k \rangle (1 - \rho)] = 0 \quad (7.38)$$

і визначає поріг епідемії  $\delta_c = \langle k \rangle^{-1}$  з такої поведінки  $\rho$ :

$$\rho = \begin{cases} 0, & \delta < \delta_c, \\ \sim (\delta - \delta_c), & \delta > \delta_c. \end{cases} \quad (7.39)$$

Із (7.39) випливає, що при поширенні епідемії на мережі тісного світу Ваттса–Строгаца критичний показник параметра порядку досягає свого значення, притаманного для середнього поля  $\beta = 1$  (порівн. р-ня (7.1), (7.4) і обговорення перколяції на цій мережі в розділі VII B).

Як зазначено вище, результати (7.35), (7.36), отримані для безмасштабних мереж із розподілом ступенів вузлів (2.9), із показником  $\gamma = 3$ , є властивими і для моделі Барабаші–Альберта [29, 189]. Відповідні результати для безмасштабних мереж з нормованим розподілом ступенів вузлів (2.9)

$$P(k) = (\gamma - 1) k_0^{\gamma-1} k^{-\gamma}, \quad k_0 = \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} \langle k \rangle \quad (7.40)$$

отримано у статті [180] для довільних значень  $\gamma > 2$ . Функція  $\Theta(\delta)$  (7.32) була оцінена так:

$$\Theta(\delta) \simeq \begin{cases} \frac{\gamma-4}{\gamma-3} \frac{1}{\delta^2 k_0} \left( \delta - \frac{\gamma-3}{k_0(\gamma-2)} \right), & \text{для } \gamma > 4, \\ \left[ \frac{-\sin((\gamma-2)\pi)}{\pi(\gamma-3)} \frac{k_0}{(k_0\delta)^{\gamma-2}} \left( \delta - \frac{\gamma-3}{k_0(\gamma-2)} \right) \right]^{1/(\gamma-3)}, & \text{для } 3 < \gamma < 4, \\ \left[ \frac{(\gamma-2)\pi}{\sin((\gamma-2)\pi)} \right]^{1/(3-\gamma)} (k_0\delta)^{(\gamma-2)/(3-\gamma)}, & \text{для } 2 < \gamma < 3. \end{cases} \quad (7.41)$$

Зазначимо, що вирази (7.41) справедливі для  $\gamma \neq 2, 3, 4, \dots$ . Цілі значення  $\gamma$  повинні розглядатися окремо. Зокрема випадок  $\gamma = 3$  веде до виразу (7.35) [28, 180]. З оцінок (7.41) можна отримати таку поведінку густини  $\rho$ :

$$\rho \sim \begin{cases} \left( \delta - \frac{\gamma-3}{k_0(\gamma-2)} \right), & \text{для } \gamma > 4, \\ \left( \delta - \frac{\gamma-3}{k_0(\gamma-2)} \right)^{1/(\gamma-3)}, & \text{для } 3 < \gamma < 4, \\ \delta^{1/(3-\gamma)}, & \text{для } 2 < \gamma < 3. \end{cases} \quad (7.42)$$

Рівняння (7.42) передбачають відсутність порога епідемії ( $\delta_c = 0$ ) для безмасштабних мереж з  $2 < \gamma < 3$ , і його наявність для  $\gamma > 3$ :  $\delta_c = \frac{\gamma-3}{k_0(\gamma-2)}$ . Однак, на відміну від випадку  $\gamma = 3$ , де знайдено експоненційне спадання (7.36) для  $\rho$  [28], для  $2 < \gamma < 3$  при-

таманна степенева залежність. Зазначимо, що показник, який керує степеневою поведінкою усередненої густини інфікованих вузлів у (7.42), є критичним показником параметра порядку  $\beta$ , рівняння (7.29), отриманого для перколяції на безмасштабних мережах у праці [177]. Значення середнього поля  $\beta = 1$  (7.4) відтворюється для  $\gamma = 4$ .

Як зазначено вище, іншою моделлю, що описує поширення епідемії, є SIR-модель, яка враховує, що деякі вузли повертаються в імунний, а не у вразливий до інфекції стан. Ця модель є придатнішою як для опису поширення комп'ютерних вірусів (де імунізація досягається або антивірусним програмним забезпеченням, або простим розпізнаванням, яке дозволяє уникати деяких вірусів після певного досвіду, як наприклад, попередження, що було дане в повідомленні

“I love you” [190]), так і для розповсюдження захворювань між людьми. Можна зазначити, що для безмасштабних мереж із  $\gamma = 3$  SIR модель передбачає кінцевий розмір епідемії  $I$  (частку вузлів, що коли-небудь були інфікованими), який має форму, подібну до (7.36) [191, 192]:

$$I \simeq 2c e^{-2/\rho_0} \quad (7.43)$$

із  $c \simeq 1.527$  і так званим базовим репродуктивним числом  $\rho_0$ . Це число є однією з найважливіших величин в епідеміології і дорівнює середній кількості вторинних інфекцій, спричинених уведенням одного інфікованого індивіда в цілком вразливе й однорідне населення. Якщо його виразити через інфіковану частку  $\delta$  і середній ступінь вузла  $\langle k \rangle$ , отримаємо:  $\rho_0 = \delta \langle k \rangle$ . Знову, подібно як і у SIS-випадку, для безмасштабних мереж із  $2 < \gamma < 3$  істотна особливість  $I \sim e^{-2/\rho_0}$ , що спостерігається для  $\gamma = 3$ , (7.43), замінюється степеневим законом:  $I \sim \rho_0^{1/(3-\gamma)}$  [191]. Для дальшого аналізу SIR-моделі на складних мережах див., наприклад, [181, 187].

Маючи інформацію про топологію мереж і поширення епідемії, можна пропонувати стратегію імунізації, яка здатна зупинити поширення епідемії. Найпростіша процедура імунізації полягає у випадковому введенні імунізованих індивідів у населення, тоді як пропорційна імунізація полягає у використанні різної частки імунізованих індивідів, залежно від їхнього ступеня зв'язності [193, 194]. Параметром контролю при цьому є імунізованість  $g$ , яка означається як частка імунізованих вузлів, що наявні в мережі. Для випадкової (однорідної) стратегії імунізації в межах SIS-моделі критичне значення імунізованості, вище якого густина інфікованих індивідів у стаціонарному стані дорівнює нулеві, залежить від ефективної швидкості поширення інфекції  $\delta$  як [194]

$$g_c = \frac{\delta - \delta_c}{\delta} \quad (7.44)$$

Із цього співвідношення, зокрема, випливає, що для мереж з  $\delta_c = 0$  (наприклад, для безмасштабних мереж з  $\gamma \leq 3$ ) однорідна стратегія вкрай неефективна. Пропорційна імунізація є ефективнішою і для мережі Барабаші–Альберта дає:

$$g_c = \frac{1}{3}(k_{\max} \delta)^2 \quad (7.45)$$

з максимальним ступенем вузла  $k_{\max}$ . Тоді як цільова імунізація, при якій імунізація робиться поступово найбільш зв'язаним вузлам, веде для SIS на мережі Барабаші–Альберта до [194]:

$$g_c \simeq \exp(-2/k_{\max} \delta). \quad (7.46)$$

Це приводить до висновку, що цілеспрямована імунізація є надзвичайно дієвою для безмасштабних мереж: критична імунізованість  $g_c$  є експоненційно малою в широкому діапазоні швидкості поширення  $\gamma$ .

Проте дві останні стратегії ґрунтуються на факті, що інформація про ступінь кожного вузла є доступною. За її відсутності можна використати стратегію “імунізації знайомих” (acquaintance immunization). Вона базована на факті, що випадково вибраний сусід має більше зв'язків, аніж випадково вибраний вузол. У цьому наближенні випадково вибирається частка вузлів, а імунізуються їх випадково вибрані сусіди.

## VIII. ВИСНОВКИ: ПОГЛЯД У МАЙБУТНЄ

Традиційно в останньому розділі робляться підсумки викладеного в статті матеріалу з його коротким оглядом й акцентуванням на найважливішому. Ми ж хотіли б, повертаючись до розглянутих питань, звернути увагу читача на ще один аспект феномену складних мереж. Поняття мережі стало одним із центральних понять нашого часу. Марно перелічувати структури, що мають форму мережі. І не тільки тому, що вже тепер їх відомо дуже багато, але й тому, що відкриття їх триває. У результаті свого розвитку мережі перетворюються в самоорганізовані складні системи, які часто є безмасштабними. Поряд із високим рівнем кореляції (що уподібнює їх до регулярних структур) у них виникають нові явища, такі, як ефект тісного світу, не притаманний регулярним структурам. Спостереження нових явищ і створення нових концепцій для їх аналізу спричинює тепер виникнення нової науки, яку часом називають натуральною філософією тісного світу [8]. У ній, застосовуючись до реальних мереж, ідеї математики, статистичної фізики, біології, соціології, комп'ютерних наук набувають нового звучання. І хто знає, може, якраз на цьому шляху відбудеться синтез уже давно і, здавалось би, назавжди розподілених по “полицях” різних наук знань?

Хочемо подякувати Юрієві Козицькому, Ігореві Мриглоду, Олександрові Сабану та Райнгардові Фольку за обговорення питань теорії й застосування мереж. Ми також вдячні Ж. П. Чічері, Американському математичному товариству та Дженіфер Дан за дозволу відтворити ілюстрації рис. 6, 7 та рис. 11. Крістіан фон Фербер вдячний Здіславові Бурді за плідні дискусії і фондові Марії Кюрі МТКД–СТ–2004–517186 за надання підтримки для перебування в Ягелонському університеті, м. Краків.

## ДОДАТОК

Зважаючи на те, що оглядова стаття про складні мережі з'являється в україномовній літературі чи не вперше, вважаємо за доцільне подати список деяких уживаних там термінів.

- *adjacency matrix* — матриця суміжності
- *assortativity* — асортативність
- *betweenness* (betweenness centrality, load) — посередництво, центральність посередництва

- *bipartite graph* — двосортний граф
- *clique* — кліка, група взаємно пов'язаних вузлів
- *clustering coefficient* — коефіцієнт кластерності
- *complete graph* — повністю з'єднана мережа
- *complex network* — складна мережа
- *degree of a node* — ступінь вузла
- *edge-dual* — дуальний за ребрами
- *fat-tail distribution* — розподіл із товстим хвостом
- *giant component* — компонента сильної зв'язності, гігантська компонента
- *hub* — габ, вершина з дуже великим ступенем
- *link* — зв'язок (мережі)
- *node* — вузол (мережі)
- *preferential attachment* — переважне приєднання
- *rewiring* — перез'єднування
- *scale-free network* — безмасштабна мережа
- *shortest path* — найкоротший шлях
- *small-world networks* — мережі тісного світу
- *small worlds* — тісний світ
- *tree-like structure* — деревовидна структура

- 
- [1] R. Diestel, *Graph Theory*, (Springer-Verlag, Heidelberg, Graduate Texts in Mathematics, Volume 173, 2005); Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина, *Дискретна математика* (Магнолія плюс, Львів, 2006).
- [2] S. Bornholdt, H. Schuster (Eds.), *Handbook of Graphs and Networks* (Wiley-VCH, Weinheim, 2003).
- [3] R. Albert, A.-L. Barabási, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47 (2002).
- [4] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, *Adv. Phys.* **51**, 1079 (2002).
- [5] M. E. J. Newman, *SIAM Review* **45**, 167 (2003).
- [6] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, D.-U. Hwang, *Phys. Rep.* **424**, 175 (2006).
- [7] A. Lesne, *Lett. Math. Phys.* **78**, 235 (2006).
- [8] S. N. Dorogovtsev, S. N. Mendes, *Evolution of Networks* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [9] M. E. J. Newman, A.-L. Barabási, D. J. Watts, *The Structure and Dynamics of Networks* (Princeton University Press, Princeton, 2006).
- [10] D. J. Watts, *Small Worlds* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999).
- [11] M. Buchanan, *Nexus: Small Worlds and the Ground-breaking Science of Networks* (Norton, New York, 2002).
- [12] A.-L. Barabási, *Linked: The New Science of Networks* (Perseus Press, New York, 2002).
- [13] D. J. Watts, *Six Degrees: The Science of a Connected Age* (Norton, New York, 2003).
- [14] D. J. Amit, *Modeling Brain Function: the World of Attractor Neural Networks* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [15] A. P. Gast, *Langmuir* **12**, 4060 (1996); G. S., L. J. Fetters, J. S. Huang, D. Richter, *Adv. Chem. Phys.* **94**, 67 (1996); C. N. Likos, *Phys. Rep.*, **348**, 267 (2001); C. von Ferber, Yu. Holovatch (Eds.) *Star Polymers* (*Condens. Matter Phys.* **5**, 1–305 (2002)).
- [16] L. Schäfer, C. von Ferber, U. Lehr, B. Duplantier, *Nucl. Phys.*, **374**, 473 (1992); C. von Ferber, Yu. Holovatch, *Phys. Rev. E* **56**, 6370 (1997); C. von Ferber, Yu. Holovatch, *Europhys. Lett.* **39**, 31 (1997); C. von Ferber, Yu. Holovatch, *Phys. Rev. E* **59**, 6914 (1999); C. von Ferber, Yu. Holovatch, *Phys. Rev. E* **65**, 042801 (2002); V. Schulte-Frohlinde, Yu. Holovatch, C. von Ferber, A. Blumen, *Phys. Lett. A* **328**, 335 (2004); V. Blavatska, C. von Ferber, Yu. Holovatch, *Phys. Rev. E* **74**, 031801 (2006).
- [17] M. Faloutsos, P. Faloutsos, C. Faloutsos, *Computer Communications Rev.* **29**, 251 (1999).
- [18] R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabási, *Nature (London)* **401**, 130 (1999).
- [19] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltvai, A.-L. Barabási, *Nature (London)* **407**, 651 (2000).
- [20] F. Liljeros, C. R. Edling, L. A. N. Amaral, H. E. Stanley, Y. Aberg, *Nature* **411**, 907 (2001).
- [21] P. Erdős, A. Rényi, *Publ. Math. (Debrecen)* **6**, 290 (1959); *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5**, 17 (1960); *Bull. Inst. Int. Stat.* **38**, 343 (1961).
- [22] B. Bollobás, *Random Graphs* (Academic, London, 1985).
- [23] S. Milgram, *Psychol. Today* **2**, 60 (1967).
- [24] M. S. Granovetter, *Am. J. Sociol.* **78**, 1360 (1973).
- [25] Фото Пауля Ердоша з документального фільму Дж. П. Чічері (G. P. Csicsery) "N is a number: a portret of Paul Erdős" (1993) ©1993 Дж. П. Чічері, всі права застережені.
- [26] Фото Альфреда Рені з книжки: P. R. Halmos, *I Have a Photographic Memory* (Americal Mathematical Society, Providence, RI, 1987).
- [27] R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, S. Havlin, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4626 (2000).
- [28] R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3200 (2001).
- [29] A.-L. Barabási, R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
- [30] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1971).
- [31] C. Domb, *The Critical Point* (Taylor & Francis, London Bristol, 1996).
- [32] M. E. J. Newman, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **98**, 404 (2001).
- [33] 3rd Annual Meeting COST Action P10 'Physics of Risk' & Workshop on Complex System Science MC, Abstracts, (Vilnius, Lithuania, 13–16 May 2006).
- [34] M. E. J. Newman, S. Forrest, J. Balthrop, *Phys. Rev. E* **66**, 035101 (2002).



- [35] R. Guimer, L. Danon, A. Díaz-Guilera, F. Giralt, A. Arenas, preprint cond-mat/0211498 (2002).
- [36] <http://www.cs.uiowa.edu/~asignori/web-size/>
- [37] R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajalopagan, A. Tomkins, Proceedings of the 9th ACM Symposium on Principles of Database Systems, 1 (1999).
- [38] J. M. Kleinberg, R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan, A. Tomkins, Proceedings of the Int. Conf. on Combinatorics and Computing, Lect. Notes in Comput. Sci. 1627, Springer-Verlag, Berlin, 1 (1999).
- [39] A.-L. Barabási, R. Albert, H. Jeong, Physica A **281**, 69 (2000).
- [40] L. A. Adamic, B. A. Huberman, Science **287**, 2115 (2000).
- [41] A. Broder, R. Kumar, F. Maghoul, P. Raghavan, S. Rajagopalan, R. Stata, A. Tomkins, J. Wiener, Computer Networks **33**, 309 (2000).
- [42] L. A. Adamic, Proceedings of the 3rd Europ. Conf. ECDL'99 (Springer-Verlag), Berlin 443 (1999).
- [43] Зображення отримано за допомогою програми FoodWeb3D, яку написав Р. Д. Вільямс (Williams), і надано Pacific Ecoinformatics and Computational Ecology Lab ([www.foodwebs.org](http://www.foodwebs.org)).
- [44] D. A. Fell, A. Wagner, Nat. Biotechnol. **18**, 1121 (2000).
- [45] J. A. Dunne, R. J. Williams, N. D. Martinez, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **99**, 12917 (2002).
- [46] J. N. Thompson, Science **312**, 372 (2006).
- [47] J. M. Montoya, R. V. Solé, J. Ther. Biology **214**, 405 (2002).
- [48] J. Camacho, R. Guimerá, L. A. N. Amaral, Phys. Rev. E **65**, 030901R (2002); Phys. Rev. Lett. **88**, 228102 (2002).
- [49] J. Dall, M. Christensen, Phys. Rev. E, **66**, 016121 (2002).
- [50] D. J. Watts, S. H. Strogatz, Nature (London) **393**, 440 (1998).
- [51] D. J. de S. Price, J. Amer. Soc. Inform. Sci. **27**, 292 (1976)
- [52] H. A. Simon, Biometrika **42**, 425 (1955).
- [53] P. L. Krapivsky, S. Redner, F. Leyvraz, Phys. Rev. Lett. **85**, 4629 (2000).
- [54] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, A. N. Samukhin, Phys. Rev. Lett. **85** 4633 (2000).
- [55] G. Palla, I. Derényi, I. Farkas, T. Vicsek, Phys. Rev. E, **69**, 046117 (2004).
- [56] A. L. Barabási, H. Jeong, Z. Néda, E. Ravasz, A. Schubert, T. Vicsek, Physica A, **311**, 590 (2002).
- [57] W. Glänzel, R. Rousseau, ISSI, **2**, 4 (2005).
- [58] Paul Hoffmann, *The Man Who Loved Only Numbers* (Fourth Estate, London, 1999).
- [59] S. Lehmann, *Spires on the Building of Science: Complex Networks and Scientific Excellence*, (Cand. Scient. Thesis, The Niels Bohr Institute, 2003).
- [60] M. E. J. Newman, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **101**, 5200 (2004).
- [61] В. А. Евстегнеев, В. Н. Касьянов, *Толковый словарь по теории графов* (<http://pco.iis.nsk.su/grapp>).
- [62] В. В. Киселева, Т. Е. Кузнецова, Б. В. Кузнецов, *Анализ научного потенциала: межстрановой аспект* (Наука, Москва, 1985); Н. Стефанов, Н. Яхил, Я. Фаркаш, Г. Кребер, И. Малецкий, С. Микулинский, Р. Рихта, *Основы науковедения* (Наука, Москва, 1985).
- [63] C. von Ferber, Yu. Holovatch, V. Palchykov, Condens. Matter Phys. **8**, 225 (2005).
- [64] J. Sienkiewicz, J. A. Holyst, Phys. Rev. E **72**, 046127 (2005); Acta Phys. Polonica B **36**, 1771 (2005).
- [65] C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, V. Palchykov, preprint physics/0608125 (2006), Physica A (2007), DOI: 10.1016/j.physa.2007.02.101.
- [66] L. A. N. Amaral, A. Scala, M. Barthélémy, H. E. Stanley, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **97**, 11149 (2000).
- [67] R. Guimera, L. A. N. Amaral, Eur. Phys. J. B **38**, 381 (2004)
- [68] R. Guimera, S. Mossa, A. Turtschi, L. A. N. Amaral, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **102**, 7794 (2005).
- [69] A. Barrat, M. Barthélemy, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **101**, 3747 (2004).
- [70] W. Li, X. Cai, Phys. Rev. E **69**, 046106 (2004)
- [71] W. Li, Q. A. Wang, L. Nivanen, A. Le Méhauté, preprint cond-mat/0601091 (2006).
- [72] M. Guida, F. Maria, Chaos Solitons & Fractals, **31**, 527 (2007).
- [73] P. Sen, S. Dasgupta, A. Chatterjee, P. A. Sreeram, G. Mukherjee, S. S. Manna, Phys. Rev. E **67**, 036106 (2003)
- [74] P. Crucitti, V. Latora, M. Marchiori, Physica A **338**, 92 (2004)
- [75] R. Albert, I. Albert, G. L. Nakarado, Phys. Rev. E **69**, 025103 (2004)
- [76] M. Marchiori, V. Latora, Physica A **285**, 539.
- [77] V. Latora, M. Marchiori, Phys. Rev. Lett. **87**, 198701 (2001).
- [78] V. Latora, M. Marchiori, Physica A **314**, 109 (2002).
- [79] K. A. Seaton, L. M. Hackett, Physica A **339**, 635 (2004).
- [80] X. Xu, J. Hu, F. Liu, L. Liu, Physica A **374**, 441 (2007).
- [81] C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, V. Palchykov, In: [33], and unpublished.
- [82] S. H. Yook, H. Jeong, A.-L. Barabasi, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **99** 13382 (2002).
- [83] R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, *Evolution and Structure of the Internet: A Statistical Physics Approach* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [84] Побудова карти інтернету є завданням багатьох проєктів. Див., напр.:  
<http://moat.nlanr.net/> <http://www.caida.org/home/>  
<http://www.cheswick.com/ches/map/>
- [85] G. Caldarelli, R. Marchetti, L. Pietronero, Europhys. Lett. **52**, 386 (2000).
- [86] R. Pastor-Satorras, A. Vázquez, A. Vespignani, Phys. Rev. Lett. **87** 258701 (2001).
- [87] A. Vázquez, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, Phys. Rev. E **65** 066130 (2002).
- [88] A. Broido, K. C. Claffy, Proc. SPIE **4526**, 188 (2001).
- [89] Q. Chen, H. Chang, R. Govindan, S. Jamin, S. J. Shenker, W. Willinger, Proc. 21st Annual Joint Conf. of the IEEE Computer and Communication Societies, IEEE Computer Society, Los Alamitos CA, 2002.
- [90] S. Maslov, K. Sneppen, A. Zaliznyak, preprint cond-mat/0205379 v2 (2002).
- [91] K. A. Eriksen, I. Simonsen, S. Maslov, K. Sneppen, Phys. Rev. Lett. **90** 148701 (2003).
- [92] S. Zhou, R. J. Mondragón, Phys. Rev. E **70** 066108 (2004).
- [93] K.-I. Goh, B. Kahng, D. Kim, Phys. Rev. Lett. **88**

- 108701 (2002).
- [94] K. Goh, E. Oh, H. Jeong, B. Kahng, D. Kim, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **99** 12583 (2002).
- [95] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, New York, 1983).
- [96] H. Chang, S. Jamin, W. Willinger. In: Proc. IEEE Infocom, 2006 (to appear).
- [97] M. Gell-Mann, C. Tsallis, *Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications* (Oxford University Press, Oxford, 2004).
- [98] J. Berg, M. Lässig, Phys. Rev. Lett., **89**, 228701 (2002).
- [99] J. Park, M. E. J. Newman, Phys. Rev. E., **70**, 066117 (2004).
- [100] Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей* (Наука, Москва, 1988).
- [101] К. Вильсон, Дж. Когут, *Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение* (Мир, Москва, 1975).
- [102] R. Rammal, G. Toulouse, M. A. Virasoro, Rev. Mod. Phys. **58**, 765, 1986.
- [103] А. И. Олемской, Письма в ЖЭТФ **71**, 412 (2000).
- [104] О. І. Олемской, Д. О. Харченко, Журн. фіз. досл. **6**, 253 (2002).
- [105] А. И. Олемской, Усп. физ. наук **168**, 287 (1998).
- [106] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика* (Наука, Москва, 1979).
- [107] А. И. Олемской, Письма в ЖЭТФ **69**, 391 (1999).
- [108] В. С. Доценко, Усп. физ. наук **163**, No.6, 1 (1993).
- [109] A. I. Olemskoi, *Fractals in Condensed Matter Physics*, in Physics Reviews, v.18. Part 1, pp.1–173, ed. I. M. Khalatnikov, (Gordon and Breach, London, 1996).
- [110] P. Holme, M. Huss, H. Jeong, Bioinformatics **19**, 532 (2003).
- [111] R. N. Mantegna, H. N. Stanley, *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [112] A. I. Olemskoi, preprint cond-mat/0610824 (2006).
- [113] H. Suyari, Physica A **368**, 63 (2006).
- [114] H. Suyari, T. Wada, preprint cond-mat/0608007 (2006).
- [115] F. Jasch, C. von Ferber, A. Blumen, Phys. Rev. E **68** 051106 (2003).
- [116] F. Jasch, C. von Ferber, A. Blumen, Phys. Rev. E **70**, 016112 (2004).
- [117] C. Satmarel, C. von Ferber, A. Blumen, J. Chem. Phys. **124**, 174905 (2006).
- [118] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика* (Наука, Москва, 1976).
- [119] A. V. Goltsev, S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, Phys. Rev. E **67**, 026123 (2003).
- [120] E. Ising, Z. Phys., **31**, 255 (1925).
- [121] A. Barrat, M. Weigt, Eur. Phys. J. B **13**, 547 (2000).
- [122] R. Monasson, Eur. Phys. J. B **12**, 555 (1999).
- [123] M. E. J. Newman, D. J. Watts, Phys. Lett. A **263**, 341 (1999).
- [124] M. Gitterman, J. Phys. A **33**, 8373 (2000).
- [125] R. Brout, Phys. Rev. **115**, 824 (1959).
- [126] R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, Physics–Uspekhi **46**, 169 (2003) [Усп. физ. наук **173**, 175 (2003)].
- [127] Yu. Holovatch (Ed.), *Order, Disorder and Criticality. Advanced Problems of Phase Transition Theory* (World Scientific, Singapore, 2004).
- [128] A. Pękalski, Phys. Rev. E **64**, 057104 (2001).
- [129] H. Hong, B. J. Kim, M. Y. Choi, Phys. Rev. E **66**, 018101 (2002).
- [130] D. Jeong, H. Hong, B. J. Kim, M. Y. Choi, Phys. Rev. E **68**, 027101 (2003).
- [131] D. Jeong, M. Y. Choi, H. Park, Phys. Rev. E **71**, 036103 (2005).
- [132] A. Chatterjee, P. Sen, Phys. Rev. E **74**, 036109 (2006).
- [133] C. P. Herrero, Phys. Rev. E **65**, 066110 (2002).
- [134] J. V. Lopes, Yu. G. Pogorelov, J. M. B. Lopes dos Santos, R. Toral, Phys. Rev. E **70**, 026112 (2004).
- [135] B. J. Kim, H. Hong, P. Holme, G. S. Jeong, P. Minnhagen, M. Y. Choi, Phys. Rev. E **64**, 056135 (2001).
- [136] H. Hong, M. Y. Choi, B. J. Kim, Phys. Rev. E **65**, 047104 (2002).
- [137] K. Medvedeva, P. Holme, P. Minnhagen, B. J. Kim, Phys. Rev. E **67**, 036118 (2003).
- [138] Критичний показник кореляційного об'єму  $\bar{\nu}$  означається як  $\bar{\nu} = \nu d_c$ , де  $\nu$  — критичний показник кореляційної довжини, а  $d_c$  — верхня критична вимірність системи з короткосяжними взаємодіями: R. Botet, R. Jullien, P. Pfeuty, Phys. Rev. Lett. **49**, 478 (1982).
- [139] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes, Phys. Rev. E **66**, 016104 (2002).
- [140] M. Leone, A. Vázquez, A. Vespignani, R. Zecchina, Eur. Phys. J. B **28**, 191 (2002).
- [141] C. P. Herrero, Phys. Rev. E **69**, 067109 (2004).
- [142] C. V. Giuraniuc, J. P. L. Hatchett, J. O. Indekeu, M. Leone, I. P. Castillo, B. Van Schaeybroeck, C. Vanderzande, Phys. Rev. E **74**, 036108 (2006).
- [143] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, London, 1982).
- [144] A. Ramezanpour, Phys. Rev. E **69**, 066114 (2004).
- [145] A. Ramezanpour, V. Karimipour, A. Mashaghi, Phys. Rev. E **67**, 046107 (2003).
- [146] B. Tadić, K. Malarz, K. Kułakowski, Phys. Rev. Lett. **94**, 137204 (2005).
- [147] K. Malarz, W. Antosiewicz, J. Karpińska, K. Kulakovski, B. Tadić, Physica A, **373**, 785 (2007).
- [148] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes, Phys. Rev. E **72**, 066130 (2005).
- [149] A. Aleksiejuk, J. A. Holyst, D. Stauffer, Physica A **310**, 260 (2002).
- [150] G. Bianconi, Phys. Lett. A **303**, 166 (2002).
- [151] K. Suchecki, J. A. Holyst, Phys. Rev. E **74**, 011122 (2006).
- [152] M. A. Sumour, M. M. Shabat, Int. J. Mod. Phys. C **16**, 585 (2005).
- [153] F. W. S. Lima, D. Stauffer, Physica A **359**, 423 (2006)
- [154] J. M. Mooij, H. J. Kappen, preprint cond-mat/0408378 (2004).
- [155] D.-H. Kim, G. J. Rodgers, B. Kahng, D. Kim, Phys. Rev. E **71**, 056115 (2005).
- [156] S. H. Lee, H. Jeong, J. D. Noh, Phys. Rev. E **74**, 031118 (2006).
- [157] J. W. Essam, Rep. Prog. Phys. **43**, 833 (1980).
- [158] D. Stauffer, A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor & Francis, London, 1991).
- [159] A. Coniglio, J. Phys. A **15**, 3829 (1982).
- [160] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, London, 1982).
- [161] D. J. Watts, S. H. Strogatz, Nature (London) **393**, 440 (1998).
- [162] M. E. J. Newman, D. J. Watts, Phys. Rev. E **60**, 7332 (1999).

- [163] C. Moore, M. E. J. Newman, Phys. Rev. E **62**, 7059 (2000).
- [164] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, D. J. Watts, Phys. Rev. E **64**, 026118 (2001).
- [165] C. Moore, M. E. J. Newman, Phys. Rev. E **61**, 5678 (2000).
- [166] M. Molloy, B. A. Reed, Random Struct. Algorithms **6(2/3)**, 161 (1995); M. Molloy, B. Reed, Combinatorics, Probability and Computing **7**, 295 (1998).
- [167] D. S. Callaway, M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, D. J. Watts, Phys. Rev. Lett. **85**, 5468 (2000).
- [168] L. Dall'Asta, J. Stat. Mech.: Theor. Exp., P08011 (2005).
- [169] R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabási, Nature (London) **406**, 378 (2000).
- [170] Y. Tu, Nature (London) **406**, 353 (2000).
- [171] R. V. Solé, J. M. Montoya, Proc. R. Soc. Lond. B **268**, 2039 (2001).
- [172] H. Jeong, S. P. Mason, A.-L. Barabási, Z. N. Oltvai, Nature (London) **411**, 41 (2001).
- [173] A. Broder, R. Kumar, F. Maghoul, P. Raghavan, S. Rajagopalan, R. Stata, A. Tomkins, J. Wiener, Comput. Netw. **33**, 309 (2000).
- [174] P. Holme, B. J. Kim, C. N. Yoon, S. K. Han, Phys. Rev. E **65**, 056109 (2002).
- [175] P. Ormerod, A. P. Roach, Physica A **339**, 645 (2004).
- [176] R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, S. Havlin, Phys. Rev. Lett. **86**, 3682 (2001).
- [177] R. Cohen, D. ben-Avraham, S. Havlin, Phys. Rev. E **66**, 036113 (2002).
- [178] D. S. Callaway, J. E. Hopcroft, J. M. Kleinberg, M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, Phys. Rev. E **64**, 041902 (2001).
- [179] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, A. N. Samukhin, Phys. Rev. E **64**, 066110 (2001).
- [180] R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, Phys. Rev. E **63**, 066117 (2001).
- [181] Y. Moreno, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, Eur. Phys. Journ. B **26**, 521 (2002).
- [182] R. Xulvi-Brunet, W. Pietsch, I. M. Sokolov, Phys. Rev. E **68**, 036119 (2003).
- [183] T. Kalisky, R. Cohen, Phys. Rev. E **73**, 035101(R) (2006).
- [184] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes, Phys. Rev. Lett. **96**, 040601 (2006).
- [185] A. V. Goltsev, S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, Phys. Rev. E **73**, 056101 (2006).
- [186] M. E. J. Newman, C. Moore, D. J. Watts, Phys. Rev. Lett. **84**, 3201 (2000).
- [187] M. E. J. Newman, Phys. Rev. E **66**, 016128 (2002).
- [188] C. F. Moukarzel, Phys. Rev. E **60**, R6263 (1999).
- [189] A.-L. Barabási, R. Albert, H. Jeong, Physica A **272**, 173 (1999).
- [190] Огляд досліджень про комп'ютерні віруси можна знайти в:  
<http://www.research.ibm.com/antivirus/SciPapers.htm>
- [191] R. M. May, A. L. Lloyd, Phys. Rev. E **64**, 066112 (2001).
- [192] A. L. Lloyd, R. M. May, Science **292**, 1316 (2001).
- [193] Z. Dezsö, A.-L. Barabási, Phys. Rev. E **65**, 055103(R) (2002).
- [194] R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, Phys. Rev. E **65**, 036104 (2002).

## COMPLEX NETWORKS

Yu. Holovatch<sup>1,2</sup>, O. Olemskoi<sup>3,4</sup>, C. von Ferber<sup>5,6</sup>, T. Holovatch<sup>7</sup>, O. Mryglod<sup>1,8</sup>, I. Olemskoi<sup>4</sup>, V. Palchykov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Institute for Condensed Matter Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, 79011 Lviv, Ukraine*

<sup>2</sup>*Institut für Theoretische Physik, Johannes Kepler Universität Linz, 4040 Linz, Austria*

<sup>3</sup>*Institute for Applied Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, 79011 Sumy, Ukraine*

<sup>4</sup>*Sumy State University, 40007 Sumy, Ukraine*

<sup>5</sup>*Applied Mathematics Research Centre, Coventry University, Coventry CV1 5FB, United Kingdom*

<sup>6</sup>*Theoretische Polymerphysik, Universität Freiburg, 79104 Freiburg, Germany*

<sup>7</sup>*Ivan Franko National University of Lviv, 79000 Lviv, Ukraine*

<sup>8</sup>*Lviv Polytechnic National University, 79013 Lviv, Ukraine*

We review recent results obtained in empirical numerical and theoretical studies of complex networks that characterize many systems in nature and society. Examples are the Internet, the world wide web, and food webs, as well as networks of neurons, of the metabolism of biological cells, of transportation, of distribution, of citations and many more. The empirical and theoretical analysis of general complex networks has only recently been approached by physicists, seminal papers in this field dating from the late 1990s. In this course the perspective has moved from the analysis of single small graphs and properties of individual vertices and edges to the consideration of statistical properties of ensembles of graphs (networks). This induced the need for the introduction of methods as they are provided by statistical physics.

In this review we sketch the evolution of network science and present some natural and man-made networks in detail, their main features and quantitative characteristics. Starting with three basic network models, the Erdős–Renyi random graph, the Watts–Strogatz small world network, and the Barabási–Albert scale free network, we introduce the statistical mechanics of complex networks. We consider phase transitions and critical phenomena on complex networks and, in particular, we elaborate network phenomena that can be described in terms of percolation theory.