

## ВПЛИВ СЛАБКОЇ ВЗАЄМОДІЇ НА ВЛАСТИВОСТІ БОЗЕ-ГАЗУ \*

І. М. Ільків<sup>1,2</sup>, А. А. Ровенчак<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Кафедра теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка,  
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна*

<sup>2</sup>*Відділ фізики високих енергій, Інститут ядерних досліджень ім. А. Солтана,  
вул. Гोजа, Варшава, 00-681, Польща*

(Отримано 9 січня 2007 р.; в остаточному вигляді — 2 лютого 2007 р.)

Запропоновано спосіб дослідження слабковзаємодіючого бозе-газу, що ґрунтується на використанні теорії ідеального бозе-газу, а також спектра Боголюбова для енергетичних збуджень слабконеідеального газу. Отримано результати для густини станів, кількості частинок, критичної температури та хемічного потенціалу слабковзаємодіючого бозе-газу. Розглянуто вплив зовнішнього поля на поведінку газу.

**Ключові слова:** Бозе-конденсація в пастках, спектр Боголюбова, слабковзаємодіючий бозе-газ.

PACS number(s): 05.30.Jp, 03.75.Nh

### ВСТУП

У 1924 р. Бозе запропонував виведення закону Планка, трактуючи випромінювання як газ фотонів [1]. Цей метод Айнштайн узагальнив на частинки з ненульовою масою спокою, опублікувавши дві статті [2, 3], де розвинув ідеї, які ми називаємо Бозе–Айнштайнівською статистикою. У праці [3] й було передбачено “конденсацію” в імпульсному просторі, відому тепер як явище конденсації Бозе–Айнштайна.

У 1938 році Лондон [4] використав ідею бозе-конденсації для опису особливої поведінки теплоємності рідкого  $^4\text{He}$ , яку відкрили Кеєзом і співробітники [5–7] у 1932 р. Услід за ідеєю Лондона про зв'язок фазового переходу в  $^4\text{He}$  зі статистикою Бозе–Айнштайна в 1947 році Боголюбов [8] запропонував мікроскопічну теорію надплинності [9, 10], яка ґрунтувалася на оригінальному методі наближеного вторинного квантування для системи слабковзаємодіючих бозе-частинок.

Вивчення бозе-систем довго обмежувалося дуже вузьким колом: гелій-4, куперівські пари в надпровідниках, фотонний газ, екситонний газ у напівпровідниках та деякі інші [11]. Лише в середині 90-х років ХХ століття Стівен Чу, Клод Коен-Тануджі та Уїльям Д. Філіпс незалежно один від одного розвинули методи, які дають змогу за допомогою лазерного світла охолоджувати гази до температур близько мікрокельвіна й утримувати холодні атоми, захоплені в різноманітних “атомних пастках” [12]. Лазерне світло діє як в'язка рідина, так звана оптична меляса, у якій атоми сповільнюються. Методи охолодження базуються на ефекті Доплера та сповільненні атомів фотонами, а для утримання використовують магнетооптичні пастки. Після подолання межі віддачі вдалося охолодити гази до температур близько нанокельвінів. Нові методи відкрили шлях до глибшого розуміння квантовомеханічної поведінки газів при низьких тем-

пературах. У 1997 році була присуджена Нобелівська премія з фізики за розвиток методів охолодження та утримання в пастках атомів із використанням лазерного світла.

Ультрахолодні гази можна спостерігати протягом тривалого часу, і це важливо для спектроскопії високої роздільної здатності та для створення еталонів частоти. Порівняння експериментальних і теоретичних спектрів атомів рубідію в одновимірному оптичному потенціалі [12–14] є одним із найкращих підтверджень того, як поведінку атомів, охолоджених лазером, можна передбачати теоретично.

У 1995 році групам Еріка Корнела, Карла Вімена [15] та Вольфганга Кеттерле [16, 17] вдалося за допомогою використання технологій лазерного охолодження та утримання холодних атомів у пастках досягнути бозе-конденсації в розрідженому газі. Перші експериментальні підтвердження макроскопічного заселення основного стану знайдено в парах атомів натрію, які утримувалися в оптичних та магнетних пастках. Важливість цього експериментального досягнення відзначена в 2001 році Нобелівською премією з фізики.

Експериментальне досягнення Бозе–Айнштайнівської конденсації (БАК) [18, 19] дало шанс досліджувати багато цікавих, недоступних до того чи ще не вивчених явищ, пов'язаних із принципом тотожності частинок, прикладами яких були надплинність і надпровідність. Зріс також інтерес до створення теоретичних моделей для бозе-систем [20].

Для вивчення слабковзаємодіючих бозе-систем застосовують методи квантової теорії поля, які пов'язані з використанням формалізму операторів породження–знищення [8, 21, 22], а також — набагато ширше — з нелінійним рівнянням Шредингера (відомим як рівняння Гросса–Пітаєвського), пор. [23–26]. Активно застосовують і числові методи [27, 28].

\*Присвячуємо цю працю до 60-річчя професора І. О. Вакарчука

Складність і відповідно висока вартість експериментальних установок для дослідження БАК спричинили зацікавлення бозе-системами в нижчих розмірностях — дво- й одновимірних [28–32].

Термодинамічна поведінка газів у пастці стала об'єктом багатьох теоретичних праць [33–38]. Важливу роль відіграють теоретичні дослідження зсуву критичної температури слабковзаємодіючого бозе-газу в пастці стосовно критичної температури ідеального газу [13, 39].

Вивчення впливу міжчастинкової взаємодії на основні властивості системи зосереджені переважно на близькій взаємодії [40]. Але для того, щоб зрозуміти поведінку реальних систем, необхідно також урахувати ефекти далекосяжної взаємодії. Це стало особливо актуальним після досягнення БАК за допомогою використання нових методів створення ультрахолодних молекул [41]. Оскільки молекули в основному стані можуть мати великий дипольний момент, БАК із диполь-дипольною взаємодією привертає теоретичну увагу останні декілька років [38].

У розділі I подано докладне виведення термодинамічних функцій невзаємодіючого бозе-газу для простору довільної вимірності, у наступному розділі проаналізовано вплив зовнішнього поля пастки й наведено критерії існування БАК. Розділ III містить аналітичні розрахунки для слабковзаємодіючого газу з використанням енергетичного спектра Боголюбова для слабконеідеального газу та числові результати для термодинамічних функцій газу в зовнішньому потенціалі.

## I. ІДЕАЛЬНИЙ $D$ -ВИМІРНИЙ БОЗЕ-ГАЗ

Хоча й більшість із відомих бозе-систем є взаємодіючими, модель ідеального бозе-газу часто можна використати як базову для побудови теорії, особливо, коли взаємодію можна вважати слабкою. У цьому розділі ми коротко підсумуємо основні відомості про термодинамічні функції ідеального бозе-газу.

Енергія частинки зводиться до кінетичної енергії її поступального руху:  $\varepsilon_p = p^2/2m$ . Функція розподілу ідеального бозе-газу

$$n_p = \frac{1}{e^{(\varepsilon_p - \mu)/T} - 1}, \quad (1.1)$$

де  $\mu$  — хемічний потенціал газу.

Будемо розглядати  $D$ -вимірний бозе-газ [36, 42, 43]. Елемент фазового об'єму  $d\Gamma$  запишемо через густину станів  $\rho(\varepsilon)$  у формі  $d\Gamma = \rho(\varepsilon) d\varepsilon$ .

Кількість частинок в елементі фазового простору отримаємо, помноживши функцію розподілу ідеального бозе-газу (1.1) на елемент фазового об'єму

$$d\Gamma = g \frac{dp_1 \dots dp_D dV}{(2\pi\hbar)^D}, \quad (1.2)$$

де  $g = 2s + 1$  — мультиплетність,  $s$  — спин частинки.

Інтегруючи за  $dV$ , отримаємо розподіл за компонентами імпульсу частинки, а перейшовши до сферичних координат у просторі імпульсів та інтегруючи за

кутами, знайдемо розподіл за абсолютною величиною імпульсу або за енергією:

$$\rho(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{V}{(2\pi\hbar)^D} \Omega_D p^{D-1} dp,$$

де  $\Omega_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})}$  — повний тілесний гіперкут у  $D$ -вимірному просторі.

Остаточно густина станів  $D$ -вимірною ідеального бозе-газу:

$$\rho(\varepsilon) = \frac{Vm^{\frac{D}{2}} \varepsilon^{\frac{D}{2}-1}}{(2\pi\hbar^2)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})}. \quad (1.3)$$

Кількість частинок

$$N = N_0 + \int_0^\infty \frac{\rho(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1}, \quad (1.4)$$

де  $N_0$  — кількість частинок в основному стані з нульовою енергією;  $\mu$  є функцією  $T$  та  $N$  і не може бути більшим, ніж енергія найнижчого енергетичного рівня  $\varepsilon_0 = 0$ . Коли  $\mu$  досягає  $\varepsilon_0$ , функція  $N_0$  стає дуже великою й відповідно прямує до  $N$ . Фізично це означає, що найнижчий одночастинковий стан стає макроскопічно заселеним, і це явище називається Бозе-Айнштайнівською конденсацією.

Варто зауважити, що для ідеального двовимірною бозе-газу переходу в БАК не відбувається [36, 44, 45]. Інтегрування дає розбіжний внесок у вигляді  $\zeta(1) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ . Тому рівняння (1.4) в цьому випадку

описує загальну кількість частинок неконденсованих бозонів.

У неявному вигляді хемічний потенціал бозе-газу  $\mu$  як функцію від температури  $T$  і густини  $\rho = \frac{N}{V}$  визначає формула:

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{(mT)^{\frac{D}{2}}}{(2\pi\hbar^2)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{D}{2}-1} dz}{e^{z-\mu/T} - 1}. \quad (1.5)$$

Обчисливши  $\mu(T)$  з (1.5), енергію  $E$  і теплоємність  $C_V$  системи розрахуємо за співвідношенням:

$$E = \int_0^\infty \frac{\varepsilon \rho(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1}, \quad C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V. \quad (1.6)$$

Якщо при заданій густині  $\rho = N/V$  зменшувати температуру газу, то хемічний потенціал  $\mu$ , що встановлюється з рівності (1.5), зменшуватиметься за модулем і досягне значення  $\mu = 0$  при температурі, що визначається виразом

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left[ \zeta\left(\frac{D}{2}\right) \right]^{\frac{2}{D}} \left( \frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{D}}.$$

При  $T < T_c$  рівняння для обчислення  $N$  не має від'ємних розв'язків, але в статистиці Бозе хемічний потенціал повинен бути від'ємним при всіх температурах. Тому при  $T \leq T_c$  все відбуватиметься так. Повна кількість частинок із додатною енергією буде

$$N_{\varepsilon>0} = \frac{V}{(2\pi\hbar^2)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})} m^{\frac{D}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1} \varepsilon^{\frac{D}{2}-1} d\varepsilon$$

$$= N \left( \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{D}{2}},$$

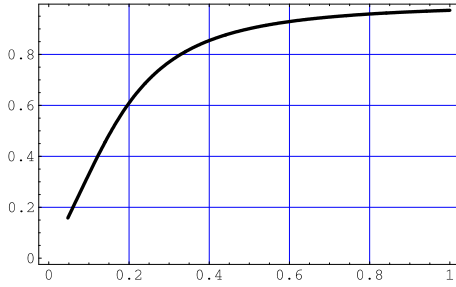
решта відповідно

$$N_0 = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{D}{2}} \right].$$

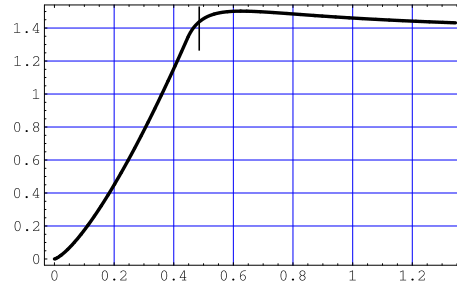
Залежність  $C_V$  від  $T \leq T_c$  можна записати так:

$$C_V = \frac{D+2}{2} \frac{D}{2} N \frac{\zeta\left(\frac{D}{2}+1\right)}{\zeta\left(\frac{D}{2}\right)} \left( \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{D}{2}}.$$

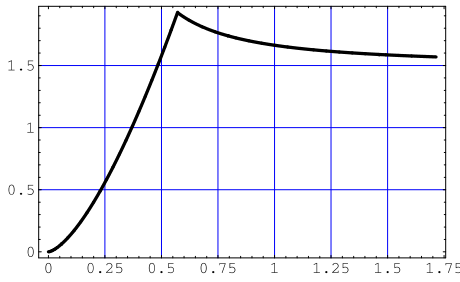
Результати розрахунків теплоємності для різних вимірностей простору наведено на рис. 1. Дробова вимірність  $D = \ln 20 / \ln 3 \simeq 2.73$  відповідає фрактальній вимірності т. зв. губки Серпінського, якою можна моделювати, наприклад, пористе середовище.



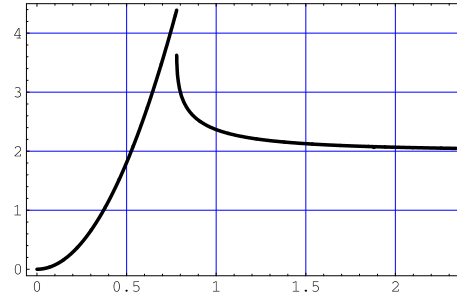
$D = 2 : T_c = 0$



$D = 2.73 : T_c = 0.45$



$D = 3 : T_c = 0.57$



$D = 4 : T_c = 0.78$

Рис. 1. Теплоємність ідеального бозе-газу для різних значень вимірності  $D$ . Множник перед інтегралом у (1.5) узято рівним 1.

У наступному розділі розглянемо поведінку бозе-системи в зовнішньому потенціалі.

## II. ІДЕАЛЬНИЙ ГАЗ У ЗОВНІШНЬОМУ ПОТЕНЦІАЛІ

Зовнішній потенціал створює сприятливі умови для контролю за атомними газами та кількісних досліджень. Для бозе-газів у різних вимірностях простору та з різними кінематичними характеристиками частинок існують різні властивості [35]. Саме тому важливо виявити основні характеристики та знайти деякі загальні результати для бозе-газу довільної вимірності в пастці.

Енергію частинки можна подати у вигляді

$$\varepsilon = \alpha p^\beta + \sum_{i=1}^d \varepsilon_i \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^{\eta_i}. \quad (2.7)$$

Для характеристики БАК доцільно ввести параметр  $\lambda$  [46]:

$$\lambda = \frac{d}{\beta} + \sum_{i=1}^d \frac{1}{\eta_i} > 1. \quad (2.8)$$

Тільки за умови (2.8) БАК відбувається. Ця рівність показує, що умови для БАК залежать не тільки від вимірності простору  $d$  та кінематичних характеристик частинок  $\beta$  (для ідеального газу  $\beta = 2$ ), а також від форми зовнішнього потенціалу, яка визначає  $\eta_i$ . Для бозе-газу з  $d/\beta \leq 1$  зовнішній потенціал відіграє важливу роль для можливості існування БАК. Наприклад, у нерелятивістському двовимірному бозе-газі  $d = 2$ ,  $\beta = 2$ , коли система вільна  $\eta_i \rightarrow \infty$  [36] і БАК не може існувати згідно з (2.8). Але якщо система поміщена в зовнішній гармонічний потенціал,

тоді  $\eta_i = 2$  і БАК відбувається. Цей критерій показує, що вибором потрібного потенціалу можна забезпечити існування БАК у просторі довільної вимірності. Коли зовнішній потенціал симетричний, тобто  $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_d$ , то умова спрощується:

$$\frac{d}{\beta} + \frac{d}{\eta} > 1.$$

Розрахунки показують, що для сталого зовнішнього потенціалу теплоємність системи при температурі  $T < T_c$  залежить від  $\lambda$  так [35]:

$$C_{T < T_c} = Nk\lambda(\lambda + 1) \frac{\zeta(\lambda + 1)}{\zeta(\lambda)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^\lambda,$$

а при  $T > T_c$

$$C_{T > T_c} = Nk\lambda(\lambda + 1) \frac{\zeta(\lambda + 1)}{\zeta(\lambda)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^\lambda - \lambda^2 \frac{\zeta(\lambda)}{\zeta(\lambda - 1)}.$$

Якщо задовольняється критерій (2.8), то теплоємність у  $T_c$  розривається і відбувається фазовий перехід. Якщо  $\lambda$  задовольняє умову

$$1 < \lambda \leq 2, \quad (2.9)$$

то теплоємність в  $T_c$  буде неперервною. Легко бачити, що коли  $d/\beta \leq 2$ , саме зовнішній потенціал системи визначає поведінку теплоємності системи.

Виявляється, що система в зовнішньому полі ефективно поводить себе так, як такий самий ідеальний газ вищих вимірностей [45].

Наявність зовнішнього потенціалу не дає змоги просто замінити координатну частину об'єму фазового простору  $dV$  в (1.2) на об'єм системи  $V$ . У квазікласичному трактуванні рух відбувається між класичними точками повороту [45], тобто межі  $R$  просторового інтегрування визначаються з умови  $U(x) = \varepsilon$ , (див. схематичний рис. 2).

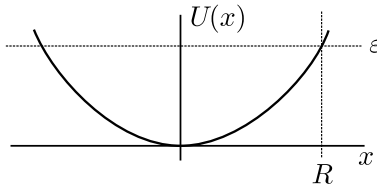


Рис. 2. Зовнішній потенціал і класичні точки повороту.

Розгляньмо двовимірний ідеальний бозе-газ у пастці  $U(x, y) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2)$ . Енергія частинки відповідно дорівнюватиме  $\varepsilon(p) = p^2/2m + U(x, y)$ .

Кількість частинок

$$N = \int \frac{dx dy dp_x dp_y}{(2\pi\hbar)^2} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1}. \quad (2.10)$$

Імпульс системи

$$p = \sqrt{2m(\varepsilon - U(x, y))}, \quad dp_x dp_y = 2\pi p dp, \quad (2.11)$$

Інтеграл

$$\int dx dy = S$$

обчислюємо з умови  $p = 0$  (між класичними точками повороту).

$$\varepsilon = U(x, y) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2).$$

Легко бачити, що це рівняння еліпса, тому

$$S = \frac{2\pi\varepsilon}{m\omega_x\omega_y},$$

тобто площу замінено на ефективну площу.

Отже, кількість частинок

$$N = \frac{1}{(\hbar\omega_x)(\hbar\omega_y)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} - 1}. \quad (2.12)$$

Зауважимо принагідно, що зі співвідношення (1.4) густина станів

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(\hbar\omega_x)(\hbar\omega_y)} \propto \varepsilon.$$

У загальному випадку (1.3)  $\rho \propto \varepsilon^{\frac{D}{2}-1}$ , тобто тут маємо ефективну вимірність  $D = 4$ .

Відзначимо, що температура переходу  $T_c$ , встановлена з умови  $\mu = \varepsilon_0$  при  $T = T_c$ , для невзаємодіючого бозе-газу у сферичному гармонічному потенціалі вигляду

$$U = m\omega^2 r^2/2 \quad (2.13)$$

для тривимірного газу може бути записана [40, 47]:

$$T_c = T_0 \left(1 - \frac{\zeta(2)}{2\zeta(3)^{2/3}} \frac{1}{N^{1/3}}\right),$$

де другий доданок ураховує розмірний ефект, а температура переходу ідеального газу

$$T_0 = \hbar\omega \left(\frac{N}{\zeta(3)}\right)^{1/3}.$$

Також обчислено температуру БАК для двовимірного ідеального газу у сферичному гармонічному потенціалі (2.13), [48]:

$$T_c^{2D} = \frac{\hbar\sqrt{6}}{\pi} \omega_{\text{ho}} N^{1/2},$$

де  $\omega_{\text{ho}}$  — середнє гармонічне частот гармонічного осцилятора. Як бачимо, температура бозе-конденсації тут є скінченною (ненульовою).

Результати для ідеального газу зібрано в простій таблиці [33]:

Властивості ідеального газу	Однорідний газ	Газ у зовнішньому потенціалі
густина станів	$\rho_{2D} \propto \text{const}$	$\rho_{2D} \propto \varepsilon$
температура переходу	$T_c^{2D} = 0$	$T_c^{2D} \propto \omega N^{1/2}$
термодинамічна межа	$\lim_{N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty} \frac{N}{V} = \text{const}$	$\lim_{\omega \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \omega N^{1/2} = \text{const}$

Таблиця 1. Деякі властивості ідеального двовимірного бозе-газу.

Критична температура двовимірного ідеального бозе-газу в потенціалі вигляду  $U(r) = U_0(r/a)^\eta$  буде [45]

$$T_c^{2D} = \left[ \frac{Nh^2U_0^{2/\eta}}{2\pi^2ma^2\Gamma(2/\eta+1)\zeta(2/\eta+1)} \right]^{\eta/(2+\eta)}.$$

Нижче від критичної температури кількість частинок у конденсаті  $N_0 \neq 0$  і температурна залежність для конденсатної фракції має вигляд [48]:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{2(\eta+2)/2\eta}.$$

Для гармонічного потенціалу  $\eta = 2$ , результати для скриньки обчислюють, приймаючи  $\eta \rightarrow 0$ . Отже, тут БАК не відбувається, оскільки  $T_c \rightarrow 0$ .

### III. СЛАБКОВЗАЄМОДІЮЧИЙ ГАЗ

Для дослідження БАК у розріджених газах можна використати спрощену теорію слабковзаємодіючого бозе-газу, яка була вперше розвинена зі сподіванням пояснити властивості рідкого гелію [8].

Урахування взаємодії змінює природу БАК, тож можуть змінитися й подані вище загальні критерії (2.8). Виявляється, однак, що ефект слабкої взаємодії в цих умовах лише змінює межі  $\lambda$  [49].

Ми будемо розглядати тільки двочастинкову взаємодію, ефект від якої в розрідженому газі є суттєвим тільки за наявності конденсату, коли густина системи стає великою щодо заселеності в центральній частині пастки.

Незважаючи на багато зусиль, проблема визначення залежності температури бозе-конденсації слабковзаємодіючого бозе-газу від взаємодії все ще не знайшла остаточної відповіді [33], пор. [50].

Досліджено, що температура  $T_c$ , при якій відбувається БАК, не суттєво відрізняється від температури, передбаченої для ідеального газу. Це вказує на те, що взаємодії не сильно змінюють протікання цього явища. Вплив взаємодії між частинками на температуру переходу становить декілька процентів, тому таку систему дуже часто можна трактувати як ідеальну.

Без взаємодії всі  $N$  частинок системи заселяють стан з нульовою енергією та з нульовим імпульсом (для вимірності більше двох). У цьому випадку кількість конденсованих частинок дорівнює загальній кількості частинок. Коли вмикається взаємодія, частинки можуть покинути конденсат і заселити один з

багатьох станів із сумарним нульовим імпульсом, та  $N_0$  природно зменщується [33].

На жаль, експериментальні результати не є досить точними, щоб перевірити теоретичні прогнози числовим шляхом. Ми можемо тільки порівняти результати, обчислені різними теоретичними методами.

У розрідженій системі враховуємо тільки двочастинкову взаємодію, оскільки ймовірність багаточастинкових зіткнень мізерна. Розглянемо слабковзаємодіючий газ у наближенні твердих сфер, потенціал яких найбільш пристосований до вивчення газів із низькими густинами через його формальну простоту [37].

Пояснити поведінку газу твердих сфер можна, використавши енергетичний спектр Боголюбова для слабонеідеального газу [8]

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m} \sqrt{1 + \frac{2\rho\Phi(p)}{p^2/2m}}, \quad (3.14)$$

де  $\varepsilon$  — енергія,  $p = |p|$  — абсолютне значення імпульсу частинки;  $\rho = N/V$  — густина системи,  $\Phi(p)$  — фур'є-зображення потенціалу міжатомної взаємодії,  $\Phi(p) = \text{const}$  для моделі твердих сфер.

Із дисперсійного співвідношення (3.14) виходить, що в довгохвильовій межі Боголюбівські квазічастинки поведуться як “фонони” зі швидкістю звуку  $c = \sqrt{\frac{\rho\Phi}{m}}$  та при низькій температурі термодинаміка бозе-конденсованої системи визначається її фононним спектром.

На противагу цьому в короткохвильовій межі квазічастинки поведуться як вільні частинки з енергією  $p^2/2m$ .

Розглядаючи слабковзаємодіючий газ твердих сфер, ми розвинемо за степенями  $\Phi$  густину станів, що може бути корисним для дослідження розріджених багатобозонних систем.

#### A. Розклад за параметром взаємодії

Для опису слабковзаємодіючої системи бозонів у зовнішньому потенціалі застосуємо метод, який ґрунтується на теорії ідеального бозе-газу, описаній у розділі I. Зв'язок між енергією та імпульсом частинки масою  $m$  можна записати, використовуючи результат Боголюбова для спектра елементарних збуджень слабковзаємодіючого бозе-газу (3.14).

Для конкретизації задачі розглянуто двовимірну систему.

У випадку твердих сфер потенціал взаємодії можна записати

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi\delta(\mathbf{r}).$$

Вигляд потенціалу взаємодії визначає мінімальне значення енергії (3.14), тобто енергії основного стану. При  $p = 0$

$$\varepsilon \simeq \frac{p^2}{2m} \left( \frac{4m\rho\Phi}{p^2} \right) = p\sqrt{\frac{\rho\Phi}{m}},$$

$$\varepsilon|_{p \rightarrow 0} = 0.$$

Отже,  $\varepsilon_0 = 0$ .

Для порівняння, у випадку (3-вимірної) кулонівської взаємодії  $\Phi(p) = \Phi/p^2$ ,  $\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{\rho\Phi}{m}}$ .

Обчислимо основні термодинамічні функції. Густина станів (1.3)

$$\rho(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{(dp)dV}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{\Omega_2 V}{(2\pi\hbar)^2} p dp,$$

$$p(\varepsilon) = \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{m^2\varepsilon^2 + m^2\rho^2\Phi^2} - m\rho\Phi},$$

$$p(\varepsilon) dp = m^2\varepsilon(m^2\varepsilon^2 + m^2\rho^2\Phi^2)^{-1/2} d\varepsilon.$$

Функцію  $\rho(\varepsilon)$  запишімо, використовуючи розклад за параметром взаємодії  $\Phi$ :

$$\rho(\varepsilon) = \rho_0(\varepsilon) + \Phi\rho_1(\varepsilon) + \Phi^2\rho_2(\varepsilon) + \dots$$

Зважаючи на різні ділянки збіжності функції  $p(\varepsilon)$ , розглянемо два випадки:

1)  $\varepsilon < \rho\Phi$

Ми можемо записати

$$p dp = \frac{m\varepsilon}{\rho\Phi} \left( \frac{\varepsilon^2}{\rho^2\Phi^2} + 1 \right)^{-1/2} d\varepsilon = m \left[ \frac{\varepsilon}{\rho\Phi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{n! 2^n} \left( \frac{\varepsilon}{\rho\Phi} \right)^{2n+1} \right] d\varepsilon. \quad (3.15)$$

2)  $\varepsilon > \rho\Phi$

$$p dp = m \left( 1 + \frac{\rho^2\Phi^2}{\varepsilon^2} \right)^{-1/2} d\varepsilon = m \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{n! 2^n} \left( \frac{\rho\Phi}{\varepsilon} \right)^{2n} \right) d\varepsilon. \quad (3.16)$$

Кількість частинок визначаємо з (1.4):

$$N = N_0 + \int_0^{\infty} \frac{\rho(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} = N_0 + \int_0^{\rho\Phi} \frac{\rho_{\varepsilon < \rho\Phi}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} + \int_{\rho\Phi}^{\infty} \frac{\rho_{\varepsilon > \rho\Phi}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1}.$$

Зміст індексів біля  $\rho$  очевидний.

Перепишімо інтеграл для першого випадку так:

$$\int_0^{\rho\Phi} \frac{\rho_{\varepsilon < \rho\Phi}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} = \frac{V}{2\pi\hbar^2} \left( \frac{m}{\rho\Phi} \int_0^{\rho\Phi} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} - \frac{m}{2\rho^3\Phi^3} \int_0^{\rho\Phi} \frac{\varepsilon^3 d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} + \frac{3m}{8\rho^5\Phi^5} \int_0^{\rho\Phi} \frac{\varepsilon^5 d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} - \dots \right).$$

Розглянемо окремо інтеграл

$$\int_0^{\rho\Phi} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} - 1} = -\frac{1}{2}\rho^2\Phi^2 + T\rho\Phi \ln \left( 1 - e^{\frac{\rho\Phi-\mu}{T}} \right) + T^2 \left[ \text{Li}_2 e^{\frac{\rho\Phi-\mu}{T}} - \text{Li}_2 e^{\frac{-\mu}{T}} \right],$$

де так званий полілогарифм

$$\text{Li}_\alpha \beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n^\alpha},$$

відповідно

$$\text{Li}_2 e^{\frac{\rho\Phi-\mu}{T}} - \text{Li}_2 e^{\frac{-\mu}{T}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{-n\mu}{T}}}{n^2} \left( e^{\frac{n\rho\Phi}{T}} - 1 \right).$$

Використавши розклад у ряд Тейлора, запишемо

$$\begin{aligned} \text{Li}_2 e^{\frac{\rho\Phi - \mu}{T}} - \text{Li}_2 e^{\frac{-\mu}{T}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\mu}{T}}}{n^2} \left( n \frac{\rho\Phi}{T} + \frac{1}{2} n^2 \frac{\rho^2 \Phi^2}{T^2} + \dots \right) \\ &= \frac{\rho\Phi}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\mu}{T}}}{n} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2 \Phi^2}{T^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\mu}{T}} + \mathcal{O}(\rho^3 \Phi^3) \\ &= -\frac{\rho\Phi}{T} \ln \left( 1 - e^{-\frac{\mu}{T}} \right) + \frac{\rho^2 \Phi^2}{2T^2} \frac{e^{-\frac{\mu}{T}}}{1 - e^{-\frac{\mu}{T}}} + \mathcal{O}(\rho^3 \Phi^3). \end{aligned}$$

Тут ураховано

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\mu}{T}}}{n} = -\ln \left( 1 - e^{-\frac{\mu}{T}} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\mu}{T}} = \frac{e^{-\frac{\mu}{T}}}{1 - e^{-\frac{\mu}{T}}}.$$

Остаточо отримаємо значення інтеграла

$$\int_0^{\rho\Phi} \frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} = \frac{1}{2} \frac{\rho^2 \Phi^2}{e^{-\mu/T} - 1} + \mathcal{O}(\rho^3 \Phi^3)$$

Аналогічно обчислюємо наступні інтеграли.

$$\int_0^{\rho\Phi} \frac{\rho_{\varepsilon < \rho\Phi}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} = \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\rho\Phi}{e^{-\mu/T} - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \frac{\rho\Phi}{e^{-\mu/T} - 1} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} \frac{\rho\Phi}{e^{-\mu/T} - 1} + \mathcal{O}(\rho^2 \Phi^2) \right\}. \quad (3.17)$$

Після перетворень можна записати (з точністю до лінійних доданків):

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho\Phi} \frac{\rho_{\varepsilon < \rho\Phi}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} &= \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \rho\Phi \frac{1}{e^{-\mu/T} - 1} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{n! 2^n (2n+2)} \right] = \\ &= \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \rho\Phi \frac{1}{e^{-\mu/T} - 1} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n+1/2)}{2n+2} \right] = \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \rho\Phi \frac{1}{e^{-\mu/T} - 1} (\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Для  $\varepsilon > \rho\Phi$ , використовуючи вище зазначений спосіб, можемо записати:

$$\begin{aligned} \int_{\rho\Phi}^{\infty} \frac{\rho_{\varepsilon > \rho\Phi}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} &= \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ T \frac{1}{n} e^{n(\mu - \rho\Phi)/T} - \frac{1}{2} e^{n\mu/T} \rho\Phi + \right. \\ &\left. + \frac{3}{8} \frac{1}{5} e^{n\mu/T} \rho\Phi - \frac{5}{16} \frac{1}{5} e^{n\mu/T} \rho\Phi + \frac{35}{128} \frac{1}{7} e^{n\mu/T} \rho\Phi + \dots + \rho^2 \Phi^2 \ln \frac{n\rho\Phi}{T} \frac{e^{n\mu/T} n}{T} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

Після перетворень, аналогічних виконаним для першого інтеграла,

$$\int_{\rho\Phi}^{\infty} \frac{\rho_{\varepsilon > \rho\Phi}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} = -\frac{mV}{2\pi\hbar^2} T \ln \left( 1 - e^{-\frac{\mu - \rho\Phi}{T}} \right) + \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \rho\Phi \frac{1}{e^{-\mu/T} - 1} (1 - \sqrt{2}). \quad (3.18)$$

## В. Критична температура та хемічний потенціал

Повна кількість частинок

$$\begin{aligned} N &= N_0 + \int_0^{\rho\Phi} \frac{\rho_{\varepsilon < \rho\Phi}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} + \int_{\rho\Phi}^{\infty} \frac{\rho_{\varepsilon > \rho\Phi}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} \\ &= N_0 + \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \left\{ -T \ln \left( 1 - e^{-\frac{\mu - \rho\Phi}{T}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \rho\Phi \frac{1}{e^{-\frac{\mu}{T}} - 1} \left( 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Останній доданок дорівнює нулеві, отже, треба врахувати доданки з  $\ln \Phi$  в другому інтегралі. Запишемо

$$\begin{aligned} \int_{\rho\Phi}^{\infty} \frac{\rho_{\varepsilon > \rho\Phi}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} &= \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^2 \Phi^2 \frac{e^{n\mu/T}}{T} n \ln \frac{n\rho\Phi}{T} \\ &= \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \frac{1}{T} \frac{1}{(e^{\mu/T} - 1)^2} \left\{ \rho^2 \Phi^2 e^{\mu/T} \ln \frac{\rho\Phi}{T} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Після перетворень маємо

$$N = N_0 + \frac{mV}{2\pi\hbar^2} \left\{ -T \ln \left( 1 - e^{\frac{\mu - \rho\Phi}{T}} \right) + \frac{1}{4T \operatorname{sh}^2 \frac{\mu}{2T}} \rho^2 \Phi^2 \ln \frac{\rho\Phi}{T} \right\}. \quad (3.19)$$

Це — рівняння для визначення хемічного потенціалу, яке зручніше переписати у вигляді:

$$-T \ln \left( 1 - e^{\frac{\mu - \rho\Phi}{T}} \right) + \frac{1}{4T \operatorname{sh}^2 \frac{\mu}{2T}} \rho^2 \Phi^2 \ln \frac{\rho\Phi}{T} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \rho,$$

де враховано, що при наближенні до точки бозеконденсації справа  $N_0 = 0$ . Бачимо, що при  $\mu \rightarrow 0$  другий доданок стає розбіжним, що, зокрема, вказує на існування фазового переходу.

Для оцінки хемічного потенціалу в лінійному наближенні запишемо його так:

$$\mu = \mu_0 + \Delta\mu.$$

Тут  $\mu_0$  — хемічний потенціал ідеального газу, а  $\Delta\mu$  — доданок, який ураховує взаємодію в системі. Знаходимо його з рівняння

$$-T \ln \left( 1 - e^{\frac{\mu - \rho\Phi}{T}} \right) + o(\rho\Phi) = -T \ln \left( 1 - e^{\frac{\mu_0}{T}} \right).$$

Отже,  $\Delta\mu = \rho\Phi$ :

$$\mu = \mu_0 + \Delta\mu = \mu_0 + \rho\Phi$$

Тепер можна визначити  $T_c$  як точку, в якій потенціал ідеального бозе-газу набуває значення  $-\rho\Phi$ :

$$-T_c \ln \left( 1 - e^{\frac{-\rho\Phi}{T_c}} \right) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \rho. \quad (3.20)$$

Отже, рівняння для  $T_c$  виходить трансцендентне. Для малих  $\Phi$ :

$$T_c \simeq -\frac{2\pi\hbar^2 \rho/m}{\ln \left( \Phi / \frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)} \rightarrow 0, \quad (3.21)$$

що збігається з  $T_c = 0$  для ідеального двовимірного бозе-газу.

У таблиці 2 наведено порівняння чисельних розрахунків критичної температури зі значенням, яке дає вираз (3.21).

$\Phi$	Чисельний результат	Оцінка (3.21)
1.0	0.95	$\infty$
0.5	0.74	1.44
0.25	0.58	0.72
0.125	0.47	0.48
0.0625	0.39	0.36
0.03125	0.32	0.29

Таблиця 2. Залежність критичної температури однорідного слабковзаємодіючого бозе-газу від параметра взаємодії  $\Phi$ . Значення параметрів:  $2\pi\hbar^2/m = 1$ ,  $\rho = 1$ .

### С. Вплив зовнішнього потенціалу

Розглянемо поведінку системи в зовнішньому полі. Як зазначалось вище, показник  $\varepsilon$  збільшується на 1. Для  $\varepsilon < \rho\Phi$  найнижчі степені —  $\rho^2\Phi^2$ , тобто нелінійні за  $\rho\Phi$ .

Згідно з попередніми наближеннями,

$$\int_{\rho\Phi}^{\infty} \frac{\rho_{\varepsilon > \rho\Phi}(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} - 1} = T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu/T}}{n^2} + \mathcal{O}(\rho^2\Phi^2 \ln \rho\Phi) = T^2 \operatorname{Li}_2 e^{\frac{\mu}{T}} + \mathcal{O}(\rho^2\Phi^2 \ln \rho\Phi). \quad (3.22)$$

Тобто, у наближенні, лінійному за  $\Phi$ , хемічний потенціал збігається з результатом для ідеального бозе-газу (у пастці):  $\mu = \mu_0$ . Поправки мають порядок  $\rho^2\Phi^2 \ln \rho\Phi$ .

Числові розрахунки для двовимірного взаємодіючого бозе-газу в зовнішньому квадратичному потенціалі проведено за описаною вище схемою без використання розкладу за параметром взаємодії [51]. На рисунку (3) наведено результати обчислень для газу твердих сфер із різним значенням параметра взаємодії і для порівняння — бозе-газу з “кулонівською” взаємодією. Можна побачити, що температура фазового переходу (у випадку відштовхувальної взаємодії) зростає.

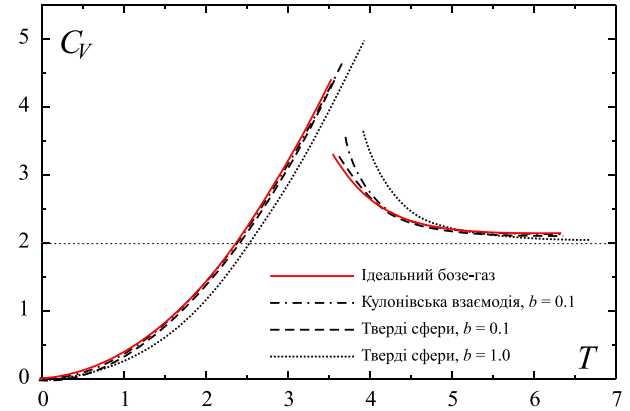


Рис. 3. Залежність теплоємності бозе-газу в зовнішньому потенціалі від температури. Параметр  $b = \rho\Phi$ .

### ВИСНОВКИ

Для слабковзаємодіючого бозе-газу в моделі твердих сфер обчислено густину станів, кількість частинок, критичну температуру та хемічний потенціал із використанням теорії ідеального газу на підставі спектра Боголюбова енергетичних збуджень слабконеідеального газу. За допомогою розкладу для 2-вимірного газу за параметром взаємодії  $\Phi$  отримано результати, які можна узагальнити для довільної вимірності. Показано, що критична температура



$T_c \propto -1/\ln \Phi$  і прямує до нуля, а хемічний потенціал газу в пастці з точністю до лінійних за  $\Phi$  доданків дорівнює хемічному потенціалові ідеального газу й відрізняється від нього доданками типу  $\rho^2 \Phi^2 \ln \rho \Phi$ . Ви-

явлено, що температура бозе-конденсації слабковзаємодіючого двовимірного газу твердих сфер у зовнішньому потенціалі зростає порівняно з ідеальним бозегазом.

- 
- [1] S. Bose, *Zs. Phys.* **26**, 178 (1924).  
 [2] A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Königl. Akad. Wiss.: phys.-math. Klasse*, 261 (1924); А. Эйнштейн, в кн.: *Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов* (Наука, Москва, 1965–1967), т. 3, с. 481.  
 [3] A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Königl. Akad. Wiss.: phys.-math. Klasse*, 3 (1925); А. Эйнштейн, в кн.: *Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов* (Наука, Москва, 1965–1967), т. 3, с. 489.  
 [4] F. London, *Nature* **141**, 643 (1938).  
 [5] W. H. Keesom, A. P. Keesom, *Commun. Phys. Lab. Leiden* № 221d, 19 (1932).  
 [6] W. H. Keesom, K. Clusius, *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* **35**, 307 (1932).  
 [7] В. Кеезом, *Гелий* (Изд-во иностр. лит., Москва, 1949).  
 [8] Н. Н. Боголюбов, *Изв. АН ССР. Сер. физ.* **11**, 77 (1947).  
 [9] P. Kapitza, *Nature* **141**, 74 (1938).  
 [10] J. F. Allen, A. D. Misener, *Nature* **141**, 75 (1938).  
 [11] *Bose–Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D. W. Snoke, S. Stringari (Cambridge University Press, 1995).  
 [12] Нобелевские лекции по физике — 1997, *Усп. физ. наук* **169**, 271 (1999).  
 [13] F. Gerbier *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 030405 (2004).  
 [14] T. P. Meyrath, F. Schrech, J.-L. Hassen, C.-S. Chuu, M. G. Raizen, *Phys. Rev. A* **92**, 041604 (2005).  
 [15] N. R. Newbury, C. J. Myatt, E. A. Cornell, C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2196 (1995).  
 [16] W. Ketterle, A. Martin A., M. A. Joffe, D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2483 (1992).  
 [17] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. A. Joffe, M. R. Andrews, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 5202 (1995).  
 [18] M. H. Anderson *et al.*, *Science* **269**, 198 (1995).  
 [19] K. B. Davis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).  
 [20] C. J. Pethick, H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge, Cambridge University Press, 2001).  
 [21] W. H. Bassichis, L. L. Foldy, *Phys. Rev.* **133**, A935 (1964).  
 [22] M. Okumura, Y. Yamanaka, *Phys. Rev. A* **68**, 013609 (2003).  
 [23] F. Dalfovo *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).  
 [24] H. Fu, Y. Wang, B. Gao, *Phys. Rev. A* **67**, 053612 (2003).  
 [25] J. O. Andersen, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 599 (2004).  
 [26] R. Ozeri *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 187 (2005).  
 [27] W. Krauth, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3695 (1996).  
 [28] S. Pearson, T. Pang, C. Chen, *Phys. Rev. A* **58**, 1485 (1998).  
 [29] N. J. van Druten, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 549 (1997).  
 [30] E. B. Kolomeisky *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1146 (2000).  
 [31] K. V. Kheruntsyan *et al.*, *Phys. Rev. A* **71**, 053615 (2005).  
 [32] M. T. Batchelor *et al.*, *J. Phys. A* **38** 7787 (2005).  
 [33] A. Posazhennikova, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1111 (2006).  
 [34] N. P. Proukakis, K. Burnett, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **355**, 2235 (1997).  
 [35] Z. Yan, *Phys. Rev. A* **59**, 4657 (1999).  
 [36] V. Bagnato, D. E. Pritchard, D. Kleppner, *Phys. Rev. A* **35**, 4354 (1987).  
 [37] F. Mazzanti, A. Polls, A. Fabrocini, *Phys. Rev. A* **67**, 063615 (2003).  
 [38] Kwangsik Nho, D. P. Landau, *Phys. Rev. A* **72**, 023615 (2005).  
 [39] M. Wilkens, F. Illuminati, M. Krämer, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **33**, L779 (2000).  
 [40] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, S. Stringari, *Phys. Rev. A* **56**, 3840 (1997).  
 [41] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzibabic, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250401 (2003).  
 [42] S.-H. Kim, *J. Korean Phys. Soc.* **29**, 284 (1996).  
 [43] R. Beckmann, F. Karsch, *Phys. Rev. A* **25**, 561 (1982).  
 [44] G.-L. Ingold, A. Lambrecht, *Eur. Phys. J. D* **1**, 29 (1998).  
 [45] V. Bagnato, D. Kleppner, *Phys. Rev. A* **44**, 7439 (1991).  
 [46] M. Li, L. Chen, Ch. Chen, *Phys. Rev. A* **59**, 3109 (1999).  
 [47] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Phys. Rev. A* **54**, R4633 (1996).  
 [48] L. Salasnich, in *Recent Research Developments in Physics*, edited by M. Kawasaki, A. Ashgriz, R. Anthony, vol. 3, part II (Transworld Research Network, India, 2002), p. 683.  
 [49] Z. Yan, *Phys. Rev. A* **61**, 063607 (2000).  
 [50] A. Leggett, *J. Stat. Phys.*, **110**, 903 (2003).  
 [51] A. Rovenchak, *Statistical Physics 2005: Modern Problems and Applications*, 28–30 August, Lviv, Ukraine: Book of Abstracts, p. 161.

**THE INFLUENCE OF WEAK INTERACTION ON THE BOSE-GAS PROPERTIES**

I. M. Ilkiv<sup>1,2</sup>, A. A. Rovenchak<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,  
12 Drahomanov St., Lviv, UA-79005, Ukraine*

<sup>2</sup>*High Energy Physics Department, A. Soltan's Institute for Nuclear Studies,  
69 Hoża St., Warsaw PL 00-681, Poland*

A way to study a weakly-interacting Bose-gas is presented. It is based on the ideal Bose-gas theory and on Bogoliubov's excitations spectrum for a weakly-nonideal Bose-system. Results for the density of states, the number of particles, the critical temperature and the chemical potential of a weakly-interacting Bose-gas are obtained. The external field influence on the gas behaviour is considered.