ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 11, № 4 (2007) с. 377–389

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 11, No. 4 (2007) p. 377–389

СПІН ТА КУТОВИЙ МОМЕНТ ДВОВИМІРНОГО РЕЛЯТИВІСТСЬКОГО ФЕРМІ-ГАЗУ З МАГНЕТНИМ ВИХОРОМ

Н. Д. Власій[1,2], Ю. О. Ситенко[1,2]
[1] *Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, вул. Метрологічна, 14-б, Київ, МСП 680, 03680*
[2] *Фізичний факультет, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, просп. Акад. Глушкова, 2, 0322, Київ*

(Отримано 19 липня 2007 р.; в остаточному вигляді — 8 листопада 2007 р.)

Вивчено вплив температури на індукування квантових чисел у релятивістських ферміонних системах із топологічними дефектами. Розглянуто ідеальний газ двовимірних діраківських електронів за наявности дефекту у вигляді точкового магнетного вихору з довільним потоком. Використано найзагальніші граничні умови в точці вихору, що забезпечують самоспряженість гамільтоніяна Дірака. Показано, що в системі індукується спін та кутовий момент, і визначено залежність температурних середніх і кореляцій від потоку вихору та граничної умови.

Ключові слова: теорія поля за скінченної температури, ефект Бома–Ааронова, температурні кореляції.

PACS number(s): 03.65.Ca, 11.10.Kk, 11.10.Wx, 11.15.Tk, 14.80.Hv

I. ВСТУП

Квантові релятивістські ферміонні системи за наявности топологічних дефектів (кінків, вихорів, монополів та ін.) мають низку цікавих властивостей і можуть характеризуватися досить незвичними значеннями квантових чисел [1, 2]. Зокрема, двовимірні системи з топологічним дефектом у вигляді точкового магнетного вихору застосовують до опису багатьох явищ у фізиці елементарних частинок і фізиці конденсованого стану речовини [3]. Зацікавлення системами останнім часом підсилюється у зв'язку з нещодавнім синтезуванням строго двовимірних атомних кристалів вуглецю (одношарової графітової плівки — графену) [4], що відкриває перспективи заміни кремнієвих інтеґральних мікросхем на вуглецеві наносхеми і обіцяє прорив у новітніх технологіях [5,6]. Графен характеризується квазірелятивістським діраківським спектром електронних збуджень [7], а дисклинації в ґратковій структурі графену описуються точковими псевдомагнетними вихорами [8]. З іншого боку, двовимірні квантові ферміонні системи з вихоровими дефектами мають певне концептуальне значення, оскільки вони здійснюють теоретико-польову реалізацію знаменитого ефекту Бома–Ааронова [9]: у цих системах містяться квантовані діраківські ферміони, що взаємодіють із векторним потенціялом, зумовленим магнетним потоком через ділянку, яка недосяжна для ферміонів.

Дослідження квантових чисел, індукованих у двовимірній релятивістській ферміонній системі з вихоровим дефектом, розпочалося понад 20 років тому [10, 11]. Було показано для певної граничної умови в місці знаходження вихору, що у вакуумі квантованих масивних ферміонів індукуються заряд [12], магнетний потік [13] та повний кутовий момент [14]. Індукування вакуумних квантових чисел у випадку найзагальнішої граничної умови розглянуто в роботах [15–18]. Вплив температури на індукування квантових чисел вихоровим дефектом вивчено в роботах [19, 20]. У цій праці ми зупинимося на індукуванні спіну та орбітального кутового моменту й дослідимо температурні кореляції між цими спостережуваними і тими, що зберігаються.

II. ТЕМПЕРАТУРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАНТОВОЇ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ФЕРМІОННОЇ СИСТЕМИ

Оператор ферміонного поля, квантованого в зовнішньому статичному полі, можна записати у вигляді [21]

$$\Psi(\mathbf{x},t)=\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_{(E_\lambda>0)} e^{-iE_\lambda t}\langle\mathbf{x}|\lambda\rangle a_\lambda+\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_{(E_\lambda<0)} e^{-iE_\lambda t}\langle\mathbf{x}|\lambda\rangle b_\lambda^\dagger\,, \quad (1)$$

де $a_\lambda^\dagger$ і a_λ ($b_\lambda^\dagger$ і b_λ) — це оператори породження і знищення ферміона (антиферміона), що задовольняють антикомутаційні співвідношення

$$\left[a_\lambda,a_{\lambda'}^\dagger\right]_+=\left[b_\lambda,b_{\lambda'}^\dagger\right]_+=\langle\lambda|\lambda'\rangle\,, \quad (2)$$

а $\langle\mathbf{x}|\lambda\rangle$ — це розв'язок стаціонарного рівняння Дірака

$$H\langle\mathbf{x}|\lambda\rangle=E_\lambda\langle\mathbf{x}|\lambda\rangle\,, \quad (3)$$

H — одночастинковий гамільтоніян Дірака в зовнішньому полі, λ — сукупність параметрів (квантових чисел), що визначають одночастинковий стан, E_λ — енерґія цього стану; символ $\sum\!\!\!\!\!\!\!\int$ позначає сумування за дискретними та інтеґрування (певною мірою) за неперервними значеннями λ. Співвідношенням

$$a_\lambda|\mathrm{vac}\rangle=b_\lambda|\mathrm{vac}\rangle=0$$

визначається основний стан $|\mathrm{vac}\rangle$ квантової системи.

Якщо деякий оператор J комутує з гамільтоніяном первинно квантованої теорії, $[J,H]_-=0$, то існує спільна система власних функцій цих двох операторів, і отже, маємо співвідношення

$$J\langle\mathbf{x}|\lambda\rangle = j_\lambda\langle\mathbf{x}|\lambda\rangle \tag{4}$$

поряд зі співвідношенням (3). Власні функції $\langle\mathbf{x}|\lambda\rangle$ задовольняють умови повноти та ортонормовности (з нормуванням на δ-функцію у випадку неперервного спектра). Таким чином, у вторинно квантованій теорії оператори динамічних змінних (фізичних спостережуваних), що відповідають операторам H і J, можуть бути діягоналізованими:

$$\hat U \equiv \frac{1}{2}\int d^dx\left[\Psi^\dagger(\mathbf{x},t),\,H\Psi(\mathbf{x},t)\right]_- = \sum\!\!\!\!\!\!\int E_\lambda\left[a_\lambda^\dagger a_\lambda - b_\lambda^\dagger b_\lambda - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(E_\lambda)\right] \tag{5}$$

і

$$\hat M \equiv \frac{1}{2}\int d^dx\left[\Psi^\dagger(\mathbf{x},t),\,J\Psi(\mathbf{x},t)\right]_- = \sum\!\!\!\!\!\!\int j_\lambda\left[a_\lambda^\dagger a_\lambda - b_\lambda^\dagger b_\lambda - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(E_\lambda)\right], \tag{6}$$

де d — розмірність простору і

$$\mathrm{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u>0 \\ -1, & u<0 \end{cases}.$$

Температурне середнє спостережуваної, що відповідає операторові (6), означується так (див., наприклад, [22]):

$$M(T) = \langle\hat M\rangle_\beta \equiv \frac{\mathrm{Sp}\,\hat M e^{-\beta\hat U}}{\mathrm{Sp}\,e^{-\beta\hat U}}, \quad \beta = (k_\mathrm{B}T)^{-1}, \tag{7}$$

де T — рівноважна температура, k_B — стала Больцмана і Sp позначає слід або суму з очікуваних значень у базисі фоківських станів. Також можна означити температурну квадратичну флюктуацію спостережуваної

$$\Delta(T;\hat M,\hat M) = \langle\hat M^2\rangle_\beta - (\langle\hat M\rangle_\beta)^2. \tag{8}$$

Величини (7) і (8) можна виразити через похідні термодинамічного потенціялу:

$$M(T) = -\left.\frac{\partial\Omega(\beta,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}, \qquad \Delta(T;\hat M,\hat M) = -\frac{1}{\beta}\left.\frac{\partial^2\Omega(\beta,\mu)}{\partial\mu^2}\right|_{\mu=0}, \tag{9}$$

де μ — це відповідний хемічний потенціял, а термодинамічний потенціял,

$$\Omega(\beta,\mu) = -\frac{1}{\beta}\ln\mathrm{Sp}\exp[-\beta(\hat U-\mu\hat M)], \tag{10}$$

можна звести до вигляду

$$\Omega(\beta,\mu) = -\frac{1}{\beta}\mathrm{Tr}\ln\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}\beta(H-\mu J)\right], \tag{11}$$

де Tr позначає слід інтеґродиференційного оператора: $\mathrm{Tr}\ldots = \int d^dx\,\mathrm{tr}\langle\mathbf{x}|\ldots|\mathbf{x}\rangle$; tr позначає слід тільки за спінорними індексами. Тоді, використовуючи (9), можна виразити середнє (7) і флюктуацію (8) через функціональні сліди операторів первинно квантованої теорії:

$$M(T) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}J\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta H\right) \tag{12}$$

і

$$\Delta(T;\hat M,\hat M) = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}J^2\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta H\right). \tag{13}$$

Зазначимо, що у випадку $J=I$, де I — це одинична матриця у просторі матриць Дірака, відповідним оператором вторинно квантованої теорії є оператор ферміонного числа, а μ і Ω є звичайними хемічним та термодинамічним потенціялами. Якщо $d=1$, то ферміонне число є єдиною спостережуваною, що зберігається поряд з енерґією. У просторах більшої розмірности існує більше спостережуваних, що зберігаються. Зокрема, якщо $d=2$, то поряд із енерґією та ферміонним числом також зберігається повний кутовий момент у випадку ротаційної симетрії в системі.

Якщо спостережувана не зберігається, тоді її оператор у первинно квантованій теорії не комутує з гамільтоніяном, $[\Upsilon,\,H]\neq 0$, і її оператор у вторинно квантованній теорії,

$$\hat O = \frac{1}{2}\int d^dx\left[\Psi^\dagger(\mathbf{x},\,t),\,\Upsilon\Psi(\mathbf{x},\,t)\right]_-, \tag{14}$$

не діягоналізується. Аналогічно до (7) можна ввести температурне середнє спостережуваної, що не зберігається, і записати його у вигляді, подібному до (12):

$$O(T) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\Upsilon\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta H\right). \tag{15}$$

Також означимо температурну кореляцію між спостережуваними, що зберігаються і не зберігаються,

$$\Delta(T;\,\hat O,\,\hat M) = \langle\hat O\,\hat M\rangle_\beta - \langle\hat O\rangle_\beta\langle\hat M\rangle_\beta, \tag{16}$$

яку можна звести до вигляду, подібного до (13),

$$\Delta(T;\,\hat O,\,\hat M) = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\Upsilon J\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta E\right). \tag{17}$$

Слід відзначити, що співвідношення (12), (13), (15) і (17) є дещо формальними, оскільки необхідно належно впорядкувати добуток операторів у вторинно квантованій теорії. За відсутности взаємодії оператори спостережуваних повинні бути нормально впорядкованими (див., наприклад, [21]), тобто c-числові частини у співвідношеннях (5) і (6) треба відкинути. Отже, при наявності взаємодії з зовнішніми полями c-числові частини у співвідношеннях (5) і (6) повинні бути перенормовані шляхом віднімання цих відкинутих частин. Відповідно, термодинамічний потенціял (11) записуємо так:

$$\Omega(\beta,\mu)=\Omega^{(0)}(\beta,\mu)+\Omega^{(1)}(\beta,\mu), \tag{18}$$

де

$$\Omega^{(0)}(\beta,\mu)=-\frac{1}{\beta} \times \mathrm{Tr}\ln\Big\{1+\exp\left[-\beta\left(|H_0|-\mu J_0\,\mathrm{sgn}(H_0)\right)\right]\Big\} \tag{19}$$

— термодинамічний потенціял за відсутности взаємодії і

$$\Omega^{(1)}(\beta,\mu)=-\frac{1}{\beta}\left\{\mathrm{Tr}\ln\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}\beta(H-\mu J)\right] - \mathrm{Tr}\ln\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}\beta(H_0-\mu J_0)\right]\right\} \tag{20}$$

— доданок, зумовлений взаємодією із зовнішніми полями; тут індекс 0 відзначає оператори в первинно квантованій теорії без взаємодії. Зазначимо, що доданок $-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[|H_0|-\mu J_0\mathrm{sgn}(H_0)\right]$ відкинуто, і це відповідає нормальному впорядкуванню за нульової температури при відсутності взаємодії.

Як наслідок співвідношень (18)–(20) отримуємо

$$M(T)=M^{(0)}(T)+M^{(1)}(T), \tag{21}$$

де

$$M^{(0)}(T)=\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\tau_J^{(0)}(E)\,\frac{\mathrm{sgn}(E)}{e^{\beta|E|}+1}, \tag{22}$$

$$M^{(1)}(T)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\tau_J^{(1)}(E)\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta E\right), \tag{23}$$

і відповідні спектральні густини означені так:

$$\tau_J^{(0)}(E)=\mathrm{Tr}\,J_0\,\delta(H_0-E), \tag{24}$$

$$\tau_J^{(1)}(E)=\mathrm{Tr}\,J\,\delta(H-E)-\mathrm{Tr}\,J_0\,\delta(H_0-E). \tag{25}$$

Співвідношення для температурного середнього спостережуваної, що не зберігається, отримаємо, якщо в (22)–(25) замінити відповідно J на Υ. Аналогічно, одержуємо співвідношення для температурної кореляції між спостережуваними, що зберігаються і не зберігаються,

$$\Delta(T;\hat{O},\hat{M})=\Delta^{(0)}(T;\hat{O},\hat{M})+\Delta^{(1)}(T;\hat{O},\hat{M}), \tag{26}$$

де

$$\Delta^{(0)}(T;\hat{O},\hat{M})=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\tau_{\Upsilon J}^{(0)}(E)\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta E\right), \tag{27}$$

$$\Delta^{(1)}(T;\hat{O},\hat{M})=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\tau_{\Upsilon J}^{(1)}(E)\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta E\right), \tag{28}$$

$$\tau_{\Upsilon J}^{(0)}(E)=\mathrm{Tr}\,\Upsilon_0 J_0\,\delta(H_0-E), \tag{29}$$

$$\tau_{\Upsilon J}^{(1)}(E)=\mathrm{Tr}\,\Upsilon\,J\,\delta(H-E)-\mathrm{Tr}\,\Upsilon_0 J_0\,\delta(H_0-E). \tag{30}$$

Співвідношення для температурної квадратичної флюктуації спостережуваної, що зберігається, отримуємо, якщо в (27)–(30) замінити відповідно Υ на J.

У цій роботі розглянуто температурні характеристики двовимірного релятивістського фермі-газу з топологічним дефектом у вигляді магнетного вихору.

III. СПОСТЕРЕЖУВАНІ ДВОВИМІРНОГО РЕЛЯТИВІСТСЬКОГО ФЕРМІ-ГАЗУ З МАГНЕТНИМ ВИХОРОМ

Розгляньмо квантування спінорного поля на площині ($d=2$), ортогональній зовнішньому статичному магнетному полю. Одночастинковий гамільтоніян Дірака має вигляд

$$H=-i\boldsymbol{\alpha}\cdot[\boldsymbol{\partial}-ie\mathbf{A}(\mathbf{x})]+\gamma^0 m, \tag{31}$$

де $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ — це векторний потенціял магнетного поля з напруженістю $B(\mathbf{x})=\boldsymbol{\partial}\wedge\mathbf{A}(\mathbf{x})$; тут використано позначення $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a^1b^1+a^2b^2$ і $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=a^1b^2-a^2b^1$. Алґебра Кліфорда у $2+1$-вимірному просторі-часі має два нееквівалентні незвідні представлення, що розрізняються так:

$$\alpha^1\alpha^2\gamma^0=is,\quad s=\pm 1. \tag{32}$$

Вибираючи матрицю γ_0 в діягональному вигляді

$$\gamma^0=\sigma_3, \tag{33}$$

отримуємо

$$\alpha^1=-e^{\frac{i}{2}\sigma_3\chi_s}\sigma_2 e^{-\frac{i}{2}\sigma_3\chi_s},\ \alpha^2=se^{\frac{i}{2}\sigma_3\chi_s}\sigma_1 e^{-\frac{i}{2}\sigma_3\chi_s}, \tag{34}$$

де σ_1, σ_2 і σ_3 — матриці Паулі, а χ_1 і χ_{-1} — параметри, зміною яких у ділянці $0<\chi_s<2\pi$ здійснюється перехід до еквівалентних представлень. Зазначимо, що в непарновимірному просторі-часі параметр m в (31) може приймати як позитивні, так і неґативні значення; заміна знака m відповідає переходові до нееквівалентного представлення.

Якщо магнетне поле інваріянтне щодо обертань навколо початку координат у двовимірному просторі, то маємо співвідношення

$$(\mathbf{x}\wedge\boldsymbol{\partial})\,(\boldsymbol{\partial}\wedge\mathbf{A})=0, \tag{35}$$

і ґенератор обертань набирає вигляду

$$J = -i\mathbf{x} \wedge [\boldsymbol{\partial} - ie\mathbf{A}(\mathbf{x})] + \frac{1}{2}s\gamma^0 + e\int_0^r dr\, r\, [\boldsymbol{\partial} \wedge \mathbf{A}(\mathbf{x})]\,, \tag{36}$$

де r, φ — полярні координати. Легко переконатися, що оператор J (36) комутує з оператором H (31).

Перші два доданки в правій частині (36) відповідають орбітальній та спіновій частинам кутового моменту поля зарядженої спінорної матерії, а останній доданок — кутовому моменту зовнішнього поля. У несинґулярній далекосяжній калібровці

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0 \tag{37}$$

маємо

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_0^r dr\, r\, [\boldsymbol{\partial} \wedge \mathbf{A}(\mathbf{x})]\,, \tag{38}$$

і співвідношення (36) приймає вигляд

$$J = -i\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\partial} + \frac{1}{2}s\gamma^0. \tag{39}$$

Сказане стосується випадку розподіленої конфіґурації зовнішнього магнетного поля (див., наприклад, [23]). Розгляньмо інший випадок, коли зовнішнє магнетне поле зосереджено в достатньо малій ділянці (скажімо, це диск радіуса δ з центром на початку координат), яка недоступна для поля зарядженої спінорної матерії; таку конфіґурацію зовнішнього поля будемо називати далі топологічним дефектом у вигляді магнетного вихору. Тоді оператор кутового моменту ззовні ділянки дефекту складається лише з двох частин — орбітальної та спінової

$$J = -i\mathbf{x} \wedge [\boldsymbol{\partial} - ie\mathbf{A}(\mathbf{x})] + \frac{1}{2}s\gamma^0. \tag{40}$$

Як добре відомо (див., наприклад, [9]), внаслідок відмінности від нуля потоку магнетного поля через внутрішню ділянку,

$$\Phi = \int_0^\delta dr\, r\, [\boldsymbol{\partial} \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r})]\,, \tag{41}$$

векторний потенціял не зникає всюди в зовнішній ділянці. Зокрема, в калібровці (37) маємо при $r > \delta$:

$$A^1(\mathbf{x}) = -\Phi r^{-1}\sin\varphi, \quad A^2(\mathbf{x}) = \Phi r^{-1}\cos\varphi, \tag{42}$$

і співвідношення (40) набирає вигляду

$$J = -i\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\partial} - e\Phi + \frac{1}{2}s\gamma^0. \tag{43}$$

Таким чином, на відміну від розподіленої конфіґурації магнетного поля, коли кутовий момент має такі власні значення:

$$j = n + \frac{1}{2} \tag{44}$$

(це очевидно в калібровці (37), див. (39)), у випадку вихорового дефекту кутовий момент має інші власні значення:

$$j = n + \frac{1}{2} - e\Phi. \tag{45}$$

Щодо спостережуваних, що не зберігаються, то як Υ можна розглядати спінову частину

$$\Sigma = \frac{1}{2}s\gamma^0 \tag{46}$$

та орбітальну частину

$$\Lambda = -\mathbf{x} \wedge [\boldsymbol{\partial} - ie\mathbf{A}(\mathbf{x})] \tag{47}$$

повного кутового моменту.

IV. СПЕКТРАЛЬНІ ГУСТИНИ ТА СЛІДИ ДОБУТКІВ ОПЕРАТОРІВ

Щоб обчислити температурні характеристики, пов'язані зі спіном, орбітальним та повним кутовими моментами, треба знайти спектральні густини $\tau_\Sigma(E)$, $\tau_\Lambda(E)$, $\tau_{\Sigma J}(E)$ і $\tau_{\Lambda J}(E)$, які є уявними частинами відповідних слідів операторів у функціональному просторі:

$$\tau_{\ldots}(E) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}\ldots(H - E - i0)^{-1}.$$

Ядро резольвенти (функція Ґріна) гамільтоніяна Дірака в координатному представленні визначаємо так:

$$G^\omega(r, \varphi; r', \varphi') = \langle r, \varphi|(H - \omega)^{-1}|r', \varphi'\rangle, \tag{48}$$

де ω — комплексний параметр розмірности енерґії. Враховуючи (33) і (34), запишемо (48) у вигляді

$$G^\omega(r, \varphi; r', \varphi') = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in(\varphi-\varphi')} \times \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)}(r; r') & a_{21}^{(n)}(r; r')e^{-i(s\varphi'-\chi_s)} \\ a_{12}^{(n)}(r; r')e^{i(s\varphi-\chi_s)} & a_{22}^{(n)}(r; r')e^{is(\varphi-\varphi')} \end{pmatrix}, \tag{49}$$

де $\mathbb{Z}$ — сукупність цілих чисел. У випадку вихорової конфіґурації магнетного поля (42) гамільтоніян (31) набирає вигляду

$$H = -i\alpha^r\partial_r - ir^{-1}\alpha^\varphi(\partial_\varphi - ie\Phi) + \gamma^0 m, \tag{50}$$

де

$$\begin{aligned} \alpha^r &= \alpha^1\cos\varphi + \alpha^2\sin\varphi, \\ \alpha^\varphi &= -\alpha^1\sin\varphi + \alpha^2\cos\varphi. \end{aligned} \tag{51}$$

Якщо знехтувати розмірами дефекту ($\delta \to 0$), то параметр граничної умови в місці дефекту (при $r = 0$)

проявляє себе як параметр самоспряженого розширення оператора гамільтоніяна, див. [15, 16]. Парціяльні гамільтоніяни для всіх $n \neq n_c$, де

$$n_c = [\![e\Phi]\!] + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s, \tag{52}$$

$[\![u]\!]$ — це ціла частина величини u (тобто найбільше ціле, що не перевищує u), є суттєво самоспряженими. Парціяльний гамільтоніян для $n = n_c$ вимагає самоспряженого розширення згідно з теорією Вейля–Неймана самоспряжених операторів (див., наприклад, [24]). Відповідно, радіяльні компоненти $a_{11}^{(n)}$, $a_{12}^{(n)}$, $a_{21}^{(n)}$ і $a_{22}^{(n)}$ в (49), коли $n \neq n_c$, є реґулярними при $r \to 0$ і $r' \to 0$, тоді як у випадку $n = n_c$ вони задовольняють умови (докладніше див. [19])

$$\left.\begin{aligned}\cos\left(s\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\lim_{r\to 0}(|m|r)^F a_{11}^{(n_c)}(r;r') = -\mathrm{sgn}(m)\sin\left(s\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\lim_{r\to 0}(|m|r)^{1-F} a_{12}^{(n_c)}(r;r')\\ \cos\left(s\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\lim_{r\to 0}(|m|r)^F a_{21}^{(n_c)}(r;r') = -\mathrm{sgn}(m)\sin\left(s\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\lim_{r\to 0}(|m|r)^{1-F} a_{22}^{(n_c)}(r;r')\end{aligned}\right\}, \tag{53}$$

та

$$\left.\begin{aligned}\cos\left(s\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\lim_{r'\to 0}(|m|r')^F a_{11}^{(n_c)}(r;r') = -\mathrm{sgn}(m)\sin\left(s\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\lim_{r'\to 0}(|m|r')^{1-F} a_{21}^{(n_c)}(r;r')\\ \cos\left(s\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\lim_{r'\to 0}(|m|r')^F a_{12}^{(n_c)}(r;r') = -\mathrm{sgn}(m)\sin\left(s\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\lim_{r'\to 0}(|m|r')^{1-F} a_{22}^{(n_c)}(r;r')\end{aligned}\right\}, \tag{54}$$

де Θ — параметр самоспряженого розширення і

$$F = s(e\Phi - [\![e\Phi]\!]) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s\,; \tag{55}$$

зауважимо, що в (53) і (54) можливі значення F належать ділянці $0 < F < 1$, оскільки у випадку $F = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s$ всі радіяльні компоненти задовольняють умову реґулярности при $r \to 0$ і $r' \to 0$. Зазначимо, що співвідношення (53) і (54) періодичні по Θ з періодом 2π.

Радіяльні компоненти ядра резольвенти за наявности та відсутности магнетного вихору наведені в Додатку А.

Розгляньмо величини

$$\mathrm{tr}\,\Sigma\, G^{\omega}(r,\varphi;r',\varphi) = \frac{s}{4\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[a_{11}^{(n)}(r;r') - a_{22}^{(n)}(r;r')\right], \tag{56}$$

$$\mathrm{tr}\,\Lambda\, G^{\omega}(r,\varphi;r',\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[(n - e\Phi)a_{11}^{(n)}(r;r') + (n + s - e\Phi)a_{22}^{(n)}(r;r')\right], \tag{57}$$

$$\mathrm{tr}\,\Sigma\, J\, G^{\omega}(r,\varphi;r',\varphi) = \frac{s}{4\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n - e\Phi + \frac{s}{2})\left[a_{11}^{(n)}(r;r') - a_{22}^{(n)}(r;r')\right], \tag{58}$$

$$\mathrm{tr}\,\Lambda\, JG^{\omega}(r,\varphi;r',\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n - e\Phi + \frac{s}{2})\left[(n-e\Phi)a_{11}^{(n)}(r;r') + (n+s-e\Phi)a_{22}^{(n)}(r;r')\right]. \tag{59}$$

За відсутности вихору, використовуючи співвідношення (1.14)–(1.17) з Додатка А і виконуючи сумування за n, отримуємо, якщо $\mathrm{Im}\,k > |\mathrm{Re}\,k|$:

$$\mathrm{tr}\,\Sigma\, G_0^{\omega}(r,\varphi;\, r',\varphi) = \frac{sm}{2\pi}K_0(-ik|r - r'|), \tag{60}$$

$$\mathrm{tr}\,\Lambda_0\, G_0^{\omega}(r,\varphi;\, r',\varphi) = 0, \tag{61}$$

$$\mathrm{tr}\,\Sigma\, J_0\, G_0^{\omega}(r,\varphi;\, r',\varphi) = \frac{\omega}{4\pi}K_0(-ik|r - r'|), \tag{62}$$

$$\mathrm{tr}\,\Lambda_0\, J_0\, G_0^{\omega}(r,\varphi;\, r',\varphi) = \frac{\omega(-ik)rr'}{\pi|r - r'|} \times K_1(-ik|r - r'|), \tag{63}$$

де $K_\mu(u)$ — це функція Макдональда порядку μ, $k = \sqrt{\omega^2 - m^2}$ і враховано, що $\Sigma_0 = \Sigma$. За наявности вихору величини (56)–(59) складаються з двох частин: одна є скінченною в границі $r' = r$, а інша, що є розбіжною в цій границі, збігається з величинами (60)–(63) відповідно. Щобільше, різниця між відповідними величинами за наявности й відсутности вихору при $r' = r$ спадає експоненційно в границі $r \to \infty$, що дозволяє проінтеґрувати по нескінченному двовимірному просторовому об'єму, $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} dr\, r$, і означити за допомогою віднімальної процедури (порівняйте з (25) і (30)) перенормований слід добутку резольвенти на оператор, наприклад:

$$\left[\mathrm{Tr}\,\Upsilon(H-\omega)^{-1}\right]_{\mathrm{ren}} = \mathrm{Tr}\,\Upsilon(H-\omega)^{-1} - \mathrm{Tr}\,\Upsilon_0(H_0-\omega)^{-1}. \tag{64}$$

Отже, можна отримати перенормовані сліди, див. [20]:

$$\left[\mathrm{Tr}\,\Sigma\,(H-\omega)^{-1}\right]_{\mathrm{ren}} = -\frac{1}{2}\frac{s}{\omega^2 - m^2}\left[\frac{F(\omega+m)\,\mathrm{tg}\,\nu_\omega - (1-F)(\omega-m)e^{iF\pi}}{\mathrm{tg}\,\nu_\omega + e^{iF\pi}} - F(1-F)m\right], \tag{65}$$

$$\left[Tr\,\Lambda\,(H-\omega)^{-1}\right]_{\mathrm{ren}} = \frac{s}{\omega^2 - m^2}\left[\frac{F^2(\omega+m)\,\mathrm{tg}\,\nu_\omega - (1-F)^2(\omega-m)e^{iF\pi}}{\mathrm{tg}\,\nu_\omega + e^{iF\pi}} - \frac{2}{3}\left(F - \frac{1}{2}\right)F(1-F)\omega\right], \tag{66}$$

$$\left[Tr\,\Sigma\,J(H-\omega)^{-1}\right]_{\mathrm{ren}} = -s\left(F - \frac{1}{2}\right)\left[Tr\,\Sigma\,(H-\omega)^{-1}\right]_{\mathrm{ren}} + \frac{1}{4}\frac{F(1-F)}{\omega^2 - m^2}\left[\omega + \frac{2}{3}\left(F - \frac{1}{2}\right)m\right], \tag{67}$$

$$\left[Tr\,\Lambda\,J(H-\omega)^{-1}\right]_{\mathrm{ren}} = -s\left(F-\frac{1}{2}\right)\left[Tr\,\Lambda\,(H-\omega)^{-1}\right]_{\mathrm{ren}} - \frac{1}{3}\frac{F(1-F)}{\omega^2 - m^2}\left\{\frac{1}{2}\left[1 - F(1-F)\right]\omega + \left(F - \frac{1}{2}\right)m\right\}, \tag{68}$$

де $\mathrm{tg}\,\nu_\omega$ визначається співвідношенням (1.13) з Додатка А, і зроблено аналітичне продовження з ділянки $\mathrm{Im}\,k > |\mathrm{Re}\,k|$ на ділянку $\mathrm{Im}\,k > 0$, тобто на всю комплексну ω-площину; очевидно також, що в лівій частині (66) від'ємник дорівнює нулеві, див. (61).

Щодо розбіжних при $r' \to r$ частин, то достатньо ввести регуляризацію для ядра резольвенти за відсутности вихору

$$G_0^{\omega,t}(r,\varphi;\,r',\varphi') = \left\langle r,\varphi\left|(H_0-\omega)^{-1}\exp(-tH_0^2)\right|r',\varphi'\right\rangle, \tag{69}$$

де $t > 0$ — це параметр реґуляризації. У Додатку Б виведено такі співвідношення, якщо $\mathrm{Im}\,k > |\mathrm{Re}\,\mathrm{k}|$:

$$\mathrm{tr}\,\Sigma\,G_0^{\omega,t}(r,\varphi;\,r,\varphi) = \frac{sm}{4\pi}e^{-t(m^2+k^2)}E_1(-tk^2), \tag{70}$$

$$\mathrm{tr}\,\Sigma\,J_0\,G_0^{\omega,t}(r,\varphi;\,r,\varphi) = \frac{\omega}{8\pi}e^{-t(m^2+k^2)}E_1(-tk^2), \tag{71}$$

$$\mathrm{tr}\,\Lambda_0\,J_0\,G_0^{\omega,t}(r,\varphi;\,r,\varphi) = \frac{\omega r^2}{4\pi}e^{-tm^2}\left[\frac{1}{t} + k^2e^{-tk^2}E_1(-tk^2)\right], \tag{72}$$

де $E_1(u) = \int\limits_u^\infty \frac{du}{u}e^{-u}$ — це інтеґральна показникова функція (див., наприклад, [25]), і можна зробити аналітичне продовження на ділянку $\mathrm{Im}\,k > 0$, тобто на всю комплексну ω-площину. Інтеґруючи по двовимірному просторовому об'єму, $\int\limits_0^{2\pi} d\,\varphi \int\limits_0^{R} dr\,r$, де R — це радіус об'єму, отримуємо

$$\mathrm{Tr}\,\Sigma(H_0-\omega)^{-1}e^{-tH_0^2} = \frac{1}{4}R^2 sm\,e^{-t\omega^2}E_1[t(m^2-\omega^2)], \tag{73}$$

$$\mathrm{Tr}\,\Sigma J_0\,(H_0-\omega)^{-1}e^{-tH_0^2} = \frac{1}{8}R^2\omega\,e^{-t\omega^2}E_1[t(m^2-\omega^2)], \tag{74}$$

$$\mathrm{Tr}\,\Lambda_0 J_0\,(H_0-\omega)^{-1}e^{-tH_0^2} = \frac{1}{8}R^4\omega\left\{\frac{e^{-tm^2}}{t} + (\omega^2-m^2)e^{-t\omega^2}E_1[t(m^2-\omega^2)]\right\}. \tag{75}$$

Хоча останні величини розбігаються в границі $t \to +0$, їх розбіжності не дають внеску у фізичні величини, тобто температурні середні й кореляції. Це пов'язано з характерним виглядом стрибка інтеґральної показникової функції при від'ємних дійсних значеннях арґументу: $\mathrm{Im}\, E_1(-u \mp i0) = \pm i\pi$ $(u > 0)$. Тому ми отримуємо скінченні спектральні густини:

$$\tau_{\Sigma}^{(0)}(E) = \pm \lim_{t\to 0_+} \frac{1}{\pi} \mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}\,\Sigma(H_0 - E \mp i0)^{-1} e^{-tH_0^2} = \frac{1}{4} R^2 sm\,\mathrm{sgn}(E)\,\theta(E^2 - m^2), \tag{76}$$

$$\tau_{\Sigma J}^{(0)}(E) = \pm \lim_{t\to 0_+} \frac{1}{\pi} \mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}\,\Sigma J_0(H_0 - E \mp i0)^{-1} e^{-tH_0^2} = \frac{1}{8} R^2 |E|\,\theta(E^2 - m^2), \tag{77}$$

$$\tau_{\Lambda J}^{(0)}(E) = \pm \lim_{t\to 0_+} \frac{1}{\pi} \mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}\,\Lambda_0 J_0(H_0 - E \mp i0)^{-1} e^{-tH_0^2} = \frac{1}{8} R^4 |E| (E^2 - m^2)\,\theta(E^2 - m^2), \tag{78}$$

де $\theta(u) = \frac{1}{2}[1 + \mathrm{sgn}(u)]$.

Повертаючись до перенормованих слідів (65)–(68), зауважимо, що, як було показано, з них можна отримати вирази для відповідних перенормованих спектральних густин (позначених індексом $^{(1)}$). Але можна зробити інакше — виразити температурні характеристики з індексом $^{(1)}$ безпосередньо через перенормовані сліди. Для цього скористаємося співвідношенням

$$\delta(H - E) = \frac{1}{2\pi i} \left[(H - E - i0)^{-1} - (H - E + i0)^{-1} \right]$$

і перетворимо інтеґрал $\int_{-\infty}^{\infty} dE$ на інтеґрал по певному контуру на комплексній площині енерґій. У результаті отримуємо, наприклад,

$$O^{(1)}(T) = -\frac{1}{2} \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \left[\mathrm{Tr}\Upsilon (H - \omega)^{-1} \right]_{\mathrm{ren}} \times \mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta\omega \right) \tag{79}$$

і

$$\Delta^{(1)}(T; \hat{O}, \hat{M}) = \frac{1}{4} \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \left[\mathrm{Tr}\Upsilon J (H - \omega)^{-1} \right]_{\mathrm{ren}} \times \mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta\omega \right), \tag{80}$$

де C — контур, що складається з двох колінеарних прямих, $(-\infty + i0, +\infty + i0)$ і $(+\infty - i0, -\infty - i0)$, на комплексній ω-площині.

V. ТЕМПЕРАТУРНІ СЕРЕДНІ, КОРЕЛЯЦІЇ І КВАДРАТИЧНА ФЛЮКТУАЦІЯ

Як було вже відзначено, температурні характеристики квантової ферміонної системи з топологічним дефектом у вигляді магнетного вихору складаються з двох частин, див. (21) і (26): одна, що позначена індексом $^{(0)}$ і відповідає відсутності взаємодії (внесок ідеального газу), залежить суттєво від розміру системи, див. (76)–(78), і друга, що позначена індексом $^{(1)}$ і відповідає взаємодії з вихором, є скінченною при зростанні розмірів системи до нескінченности, див. (65)–(68). Однак внесок ідеального газу для певних характеристик може щезати, і тоді ці характеристики виявляються скінченними в границі $R \to \infty$.

Зокрема, внесок ідеального газу в орбітальний кутовий момент щезає як наслідок співвідношення (61). Тому, враховуючи (66), отримуємо [20]

$$\begin{aligned} L(T) = {} & s\frac{\sin(F\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{du}{u\sqrt{u+1}}\, \mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta m\sqrt{u+1} \right) \\ & \times \frac{F^2 u^F A + (1-F)^2 u^{1-F} A^{-1} + u\left\{ \left[\frac{1}{2} - F(1-F) \right] (u^F A + u^{1-F} A^{-1}) - (2F-1)\cos(F\pi) \right\}}{[u^F A - u^{1-F} A^{-1} + 2\cos(F\pi)]^2 + 4(u+1)\sin^2(F\pi)} \\ & + \frac{s}{2}\,\theta(-\cos\Theta) \frac{[1 - 2F(1-F)]E_{\mathrm{BS}} + (2F-1)m}{(2F-1)E_{\mathrm{BS}} + m}\, \mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta E_{\mathrm{BS}} \right), \end{aligned} \tag{81}$$

де

$$A = 2^{1-2F}\frac{\Gamma(1-F)}{\Gamma(F)}\,\mathrm{tg}\left(s\frac{\Theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right), \qquad (82)$$

$\Gamma(u)$ — гамма-функція Ойлера, E_{BS} — енерґія зв'язаного стану в одночастинковому спектрі, що визначається як дійсний корінь алґебраїчного рівняння (докладніше див. [16])

$$\frac{(1-m^{-1}E_{\mathrm{BS}})^F}{(1+m^{-1}E_{\mathrm{BS}})^{1-F}}\,A=-1\,; \qquad (83)$$

зазначимо, що зв'язаний стан існує при $\cos\Theta < 0$ $(A<0)$ і його енерґія обертається в нуль при $A=-1$, а в інших випадках маємо $0<|E_{\mathrm{BS}}|<|m|$ і

$$\mathrm{sgn}(E_{\mathrm{BS}}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(m)[\,\mathrm{sgn}(1+A^{-1})-\mathrm{sgn}(1+A)]\,. \qquad (84)$$

Що стосується спінової частини кутового моменту, то вона складається з двох частин: ураховуючи (76), отримуємо

$$S^{(0)}(T) = \frac{R^2 sm}{\beta}\ln(1+e^{-\beta|m|}), \qquad (85)$$

і враховуючи (65), одержуємо [20]

$$\begin{aligned} S^{(1)}(T) = &-s\frac{\sin(F\pi)}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{du}{u\sqrt{u+1}}\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta m\sqrt{u+1}\right) \\ &\times \frac{Fu^F A+(1-F)u^{1-F}A^{-1}+u\left[\frac{1}{2}\left(u^F A+u^{1-F}A^{-1}\right)-(2F-1)\cos(F\pi)\right]}{[u^F A-u^{1-F}A^{-1}+2\cos(F\pi)]^2+4(u+1)\sin^2(F\pi)} \\ &-\frac{s}{4}\,\theta(-\cos\Theta)\frac{E_{\mathrm{BS}}+(2F-1)m}{(2F-1)E_{\mathrm{BS}}+m}\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta E_{\mathrm{BS}}\right)+\frac{s}{4}F(1-F)\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta m\right), \end{aligned} \qquad (86)$$

У границі $T\to 0$ $(\beta\to\infty)$ одержуємо скінченні результати для вакуумних спіну та орбітального кутового моменту, див. [18]. У границі $T\to\infty$ $(\beta\to 0)$ спін зростає лінійно з температурою, тоді як орбітальний кутовий момент прямує до нуля: як T^{2F-1} при $0<F<\frac{1}{2}$ і як T^{1-2F} при $\frac{1}{2}<F<1$.

Сумуючи (81), (85) і (86), отримуємо повний кутовий момент, що складається з двох частин: $M^{(0)}(T) = S^{(0)}(T)$ і

$$\begin{aligned} M^{(1)}(T) = &\, s(F-\frac{1}{2})\frac{\sin(F\pi)}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{du}{u\sqrt{u+1}}\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta m\sqrt{u+1}\right) \\ &\times \frac{Fu^F A-(1-F)u^{1-F}A^{-1}+u\left[(F-\frac{1}{2})(u^F A+u^{1-F}A^{-1})-\cos(F\pi)\right]}{[u^F A-u^{1-F}A^{-1}+2\cos(F\pi)]^2+4(u+1)\sin^2(F\pi)} \\ &+\frac{s}{2}\left(F-\frac{1}{2}\right)\theta(-\cos\Theta)\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta E_{\mathrm{BS}}\right)+\frac{s}{4}F(1-F)\,\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta m\right). \end{aligned} \qquad (87)$$

Зазначимо, що і спін, і орбітальний кутовий момент розбігаються, як $\int^\infty \frac{du}{u}$ при напівцілих значеннях $e\Phi$, якщо тільки $A\neq 0$ і $A^{-1}\neq 0$. Натомість ця розбіжність скорочується при їх сумуванні, і маємо незалежний від Θ результат:

$$M(T)|_{F=\frac{1}{2}} = \frac{R^2 sm}{\beta}\ln\left(1+e^{-\beta|m|}\right)+\frac{s}{16}\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta m\right). \qquad (88)$$

Наведемо також для повноти вираз для температурного середнього ферміонного числа [19]:

$$N(T) = -s\left(F-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left[M^{(1)}(T)-\frac{s}{4}F(1-F)\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\beta m\right)\right]. \qquad (89)$$

Перейдімо до розгляду температурних кореляцій між спостережуваними, що зберігаються й не зберігаються. Враховуючи (65) і (66), маємо кореляцію між ферміонним числом і спіном

$$\begin{aligned} \Delta(T;\hat{S},\hat{N}) = &\,\frac{s\,\sin(F\pi)}{4\pi}\int\limits_0^\infty \frac{du}{u}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta m\sqrt{u+1}\right) \\ &\times \frac{Fu^F A-(1-F)u^{1-F}A^{-1}-u\cos(F\pi)}{[u^F A-u^{1-F}A^{-1}+2\cos(F\pi)]^2+4(u+1)\sin^2(F\pi)} \\ &+\frac{s}{8}\,\theta(-\cos\Theta)\frac{E_{\mathrm{BS}}+(2F-1)m}{(2F-1)E_{\mathrm{BS}}+m}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta E_{\mathrm{BS}}\right) \end{aligned} \qquad (90)$$

і кореляцію між ферміонним числом і орбітальним кутовим моментом

$$\begin{aligned}\Delta(T;\hat{L},\hat{N}) = &-\frac{s\,\sin(F\pi)}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{du}{u}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta m\sqrt{u+1}\right)\\ &\times\frac{F^2u^FA-(1-F)^2u^{1-F}A^{-1}-u[1-2F(1-F)]\cos(F\pi)}{[u^FA-u^{1-F}A^{-1}+2\cos(F\pi)]^2+4(u+1)\sin^2(F\pi)}\\ &-\frac{s}{4}\,\theta(-\cos\Theta)\frac{[1-2F(1-F)]E_{\mathrm{BS}}+(2F-1)m}{(2F-1)E_{\mathrm{BS}}+m}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta E_{\mathrm{BS}}\right)\\ &+\frac{s}{6}\left(F-\frac{1}{2}\right)F(1-F)\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta m\right).\end{aligned}\tag{91}$$

Підсумовуючи (90) і (91), одержуємо кореляцію між ферміонним числом і повним кутовим моментом

$$\begin{aligned}\Delta(T;\hat{M},\hat{N}) = &-s\left(F-\frac{1}{2}\right)\frac{\sin(F\pi)}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{du}{u}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta m\sqrt{u+1}\right)\\ &\times\frac{Fu^FA+(1-F)u^{1-F}A^{-1}-u(2F-1)\cos(F\pi)}{[u^FA-u^{1-F}A^{-1}+2\cos(F\pi)]^2+4(u+1)\sin^2(F\pi)}\\ &-\frac{s}{4}(F-\frac{1}{2})\,\theta(-\cos\Theta)\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta E_{\mathrm{BS}}\right)+\frac{s}{6}\left(F-\frac{1}{2}\right)F(1-F)\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta m\right).\end{aligned}\tag{92}$$

Інші кореляції з повним кутовим моментом складаються з двох частин. Ураховуючи (77) і (67), отримуємо кореляцію між повним кутовим моментом і спіном, $\Delta(T;\hat{S},\hat{M})=\Delta^{(0)}(T;\hat{S},\hat{M})+\Delta^{(1)}(T;\hat{S},\hat{M})$, де

$$\Delta^{(0)}(T;\hat{S},\hat{M}) = \frac{R^2}{4\beta}\left[\frac{1}{\beta}\ln\left(1+e^{-\beta|m|}\right)+\frac{|m|}{e^{\beta|m|}+1}\right]\tag{93}$$

і

$$\Delta^{(1)}(T;\hat{S},\hat{M}) = -s\left(F-\frac{1}{2}\right)\Delta(T;\hat{S},\hat{N})-\frac{1}{16}F(1-F)\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta m\right).\tag{94}$$

Ураховуючи (78) і (68), одержуємо кореляцію між повним і орбітальним кутовими моментами, $\Delta(T;\hat{L},\hat{M})=\Delta^{(0)}(T;\hat{L},\hat{M})+\Delta^{(1)}(T;\hat{L},\hat{M})$, де

$$\Delta^{(0)}(T;\hat{L},\hat{M}) = \frac{R^4}{2\beta^2}\left[\frac{3}{\beta^2}\int\limits_{\beta|m|}^\infty du\,u\,\ln\left(1+e^{-u}\right)+m^2\,\ln\left(1+e^{\beta|m|}\right)\right]\tag{95}$$

і

$$\Delta^{(1)}(T;\hat{L},\hat{M}) = -s\left(F-\frac{1}{2}\right)\Delta(T;\hat{L},\hat{N})+\frac{1}{24}[1-F(1-F)]F(1-F)\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta m\right).\tag{96}$$

У границі нульової температури кореляції обертаються в нуль, за винятком випадку $A=-1$ і $F\neq\frac{1}{2}$, коли вони приймають скінченні значення. У високотемпературній межі кореляції з ферміонним числом прямують до скінченних значень (див. [20]), тоді як кореляції з повним кутовим моментом розбігаються: як T у випадку спіну і як T^2 у випадку орбітального кутового моменту.

На завершення, сумуючи дві останні кореляції, маємо квадратичну флюктуацію повного кутового моменту, $\Delta(T;\hat{M},\hat{M})=\Delta^{(0)}(T;\hat{M},\hat{M})+\Delta^{(1)}(T;\hat{M},\hat{M})$, де

$$\Delta^{(0)}(T;\hat{M},\hat{M}) = \frac{R^2}{2\beta^2}\left[\frac{3R^2}{\beta^2}\int\limits_{\beta|m|}^\infty du\,u\ln(1+e^{-u})+\left(R^2m^2+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+e^{-\beta|m|}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{\beta|m|}{e^{\beta|m|}+1}\right]\tag{97}$$

і

$$\Delta^{(1)}(T;\hat{M},\hat{M}) = -s\left(F-\frac{1}{2}\right)\Delta(T;\hat{M},\hat{N})-\frac{1}{24}\left[\frac{1}{2}+F(1-F)\right]F(1-F)\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta m\right).\tag{98}$$

VI. ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

У статті розглянуто вплив температури на властивості двовимірного релятивістського фермі-газу з топологічним дефектом у вигляді точкового магнетного вихору. Найзагальніша сукупність граничних умов у місці знаходження вихору (при $r = 0$) параметризується згідно з (53) і (54) величиною Θ, яка своєю чергою параметризує сукупність самоспряжених розширень оператора гамільтоніяна. Ми показали, що в стані термодинамічної рівноваги в цій системі індукуються спін, орбітальний та повний кутові моменти. Спостережуваною, що зберігається, є повний кутовий момент, а спостережуваними, що не зберігаються, є спінова та орбітальна частини цього кутового моменту. Ми визначили температурні середні цих трьох спостережуваних, а також квадратичну флюктуацію спостережуваної, що зберігається, та кореляції між спостережуваними, що зберігаються і не зберігаються. Отримані результати залежать періодично від величини потоку вихору та величини Θ. Відзначимо, що при переході до нееквівалентного представлення алґебри Кліфорда (тобто $s \to -s$ або $m \to -m$) температурні середні змінюють знак на протилежний, тоді час кореляції і квадратична флюктуація залишаються незмінними; усі температурні характеристики лишаються незмінними при переході до еквівалентних представлень алґебри Кліфорда.

Серед усієї сукупности граничних умов виберемо умову мінімальної нерегулярности, тобто умову, що відповідає розбіжності радіяльних компонент при $r \to 0$ не сильніше, ніж $r^{-\nu}$, де $\nu \le \frac{1}{2}$ [12, 15, 16]:

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{ll} s\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{mod}2\pi), & 0 < F < \dfrac{1}{2} \\ 0(\mathrm{mod}2\pi), & F = \dfrac{1}{2} \\ -s\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{mod}2\pi), & \dfrac{1}{2} < F < 1 \end{array} \right. , \tag{99}$$

або $A^{-1} = 0$ при $0 < F < \frac{1}{2}$, $A = 1$ при $F = \frac{1}{2}$, $A = 0$ при $\frac{1}{2} < F < 1$. За такої умови кореляції з ферміонним числом набирають досить простого вигляду:

$$\Delta(T; \hat{S}, \hat{N}) = \frac{s}{8}\left[F - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}_0\left(F - \frac{1}{2}\right)\right] \times \mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta m\right), \tag{100}$$

$$\Delta(T; \hat{L}, \hat{N}) = -\frac{s}{12}\left[F - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}_0\left(F - \frac{1}{2}\right)\right] \times \left[1 + 2\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta m\right), \tag{101}$$

де $\mathrm{sgn}_0(u) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{sgn}(u), & u \neq 0 \\ 0, & u = 0 \end{array} \right\}$.

Зупинимося докладніше на переході до нульової температури. Як показано в роботі, температурні кореляції в цій межі обертаються в нуль при всіх значеннях параметра граничної умови, за винятком одного, коли в одночастинковому ферміонному спектрі виникає зв'язаний стан із нульовою енерґією, $E_{BS} = 0$ ($A = -1$). Зокрема, наведемо явний вигляд для квадратичної флюктуації повного кутового моменту в цій границі:

$$\Delta(0; \hat{M}, \hat{M}) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & A \neq -1, \\ \dfrac{1}{4}\left(F - \dfrac{1}{2}\right)^2, & A = -1; \end{array} \right. \tag{102}$$

зазначимо, що такою ж поведінкою характеризується і квадратична флюктуація ферміонного числа, див. [19]. Як відомо, за ненульової температури значення всіх квантових чисел слід розуміти як температурні середні значення, тобто як результат усереднення за багатьма квантовими вимірюваннями. У межі нульової температури температурні середні переходять у вакуумні очікування. Вакуумні значення спіну та орбітального кутового моменту (тобто спостережуваних, що не зберігаються) слід також розуміти як результат усереднення за багатьма квантовими вимірюваннями. Щодо вакуумних значень повного кутового моменту та ферміонного числа (тобто спостережуваних, що зберігаються), то все визначається поведінкою відповідних квадратичних флюктуацій у межі нульової температури: якщо граничне значення флюктуації обертається в нуль, то вакуумне значення є точно спостережуваним в окремому квантовому вимірюванні. Отже, доходимо висновку, що вакуумне значення повного кутового моменту

$$M(0) = \frac{s}{4}\mathrm{sgn}(m)\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right)^2, \qquad A = -1 \tag{103}$$

слід розуміти як результат усереднення за багатьма вимірюваннями, якщо $F \neq \frac{1}{2}$; у випадку $F = \frac{1}{2}$ та для всіх інших граничних умов при $0 < F < 1$ вакуумний повний кутовий момент є точно спостережуваним в окремому вимірюванні.

Дослідження виконано за підтримки Цільової програми Відділення фізики і астрономії НАН України та проєкту Ф16-457-2007 Державного фонду фундаментальних досліджень України. Також робота Н.Д.В. була підтримана ґрантом INTAS для молодих науковців (№ 05-109-5333), а робота Ю.О.С. підтримана Швейцарським національним науковим фондом у межах програми SCOPES (№ IB7320-110848) і ґрантом INTAS (№ 05-1000008-7865).

ДОДАТОК А

Радіальні компоненти ядра резольвенти (49) мають вигляд (див. [19])
I. ($l = s(n - n_c) > 0$):

$$a_{11}^{(n)}(r;r') = \frac{i\pi}{2}(\omega + m)\left[\theta(r-r')H_{l-F}^{(1)}(kr)J_{l-F}(kr') + \theta(r'-r)J_{l-F}(kr)H_{l-F}^{(1)}(kr')\right], \tag{1.1}$$

$$a_{12}^{(n)}(r;r') = \frac{i\pi}{2}k\left[\theta(r-r')H_{l+1-F}^{(1)}(kr)J_{l-F}(kr') + \theta(r'-r)J_{l+1-F}(kr)H_{l-F}^{(1)}(kr')\right], \tag{1.2}$$

$$a_{21}^{(n)}(r;r') = \frac{i\pi}{2}k\left[\theta(r-r')H_{l-F}^{(1)}(kr)J_{l+1-F}(kr') + \theta(r'-r)J_{l-F}(kr)H_{l+1-F}^{(1)}(kr')\right]; \tag{1.3}$$

$$a_{22}^{(n)}(r;r') = \frac{i\pi}{2}(\omega - m)\left[\theta(r-r')H_{l+1-F}^{(1)}(kr)J_{l+1-F}(kr') + \theta(r'-r)J_{l+1-F}(kr)H_{l+1-F}^{(1)}(kr')\right], \tag{1.4}$$

II. ($l' = -s(n - n_c) > 0$):

$$a_{11}^{(n)}(r;r') = \frac{i\pi}{2}(\omega + m)\left[\theta(r-r')H_{l'+F}^{(1)}(kr)J_{l'+F}(kr') + \theta(r'-r)J_{l'+F}(kr)H_{l'+F}^{(1)}(kr')\right], \tag{1.5}$$

$$a_{12}^{(n)}(r;r') = -\frac{i\pi}{2}k\left[\theta(r-r')H_{l'-1+F}^{(1)}(kr)J_{l'+F}(kr') + \theta(r'-r)J_{l'-1+F}(kr)H_{l'+F}^{(1)}(kr')\right], \tag{1.6}$$

$$a_{21}^{(n)}(r;r') = -\frac{i\pi}{2}k\left[\theta(r-r')H_{l'+F}^{(1)}(kr)J_{l'-1+F}(kr') + \theta(r'-r)J_{l'+F}(kr)H_{l'-1+F}^{(1)}(kr')\right]; \tag{1.7}$$

$$a_{22}^{(n)}(r;r') = \frac{i\pi}{2}(\omega - m)\left[\theta(r-r')H_{l'-1+F}^{(1)}(kr)J_{l'-1+F}(kr') + \theta(r'-r)J_{l'-1+F}(kr)H_{l'-1+F}^{(1)}(kr')\right], \tag{1.8}$$

III. ($n = n_c$):

$$a_{11}^{(n_c)}(r;r') = \frac{i\pi}{2}\frac{\omega + m}{\sin\nu_\omega + \cos\nu_\omega e^{iF\pi}}\Big\{\theta(r-r')H_{-F}^{(1)}(kr)[\sin\nu_\omega J_{-F}(kr') + \cos\nu_\omega J_F(kr')] + \theta(r'-r)[\sin\nu_\omega J_{-F}(kr) + \cos\nu_\omega J_F(kr)]H_{-F}^{(1)}(kr')\Big\}, \tag{1.9}$$

$$a_{12}^{(n_c)}(r;r') = \frac{i\pi}{2}\frac{k}{\sin\nu_\omega + \cos\nu_\omega e^{iF\pi}}\Big\{\theta(r-r')H_{1-F}^{(1)}(kr)[\sin\nu_\omega J_{-F}(kr') + \cos\nu_\omega J_F(kr')] + \theta(r'-r)[\sin\nu_\omega J_{1-F}(kr) - \cos\nu_\omega J_{-1+F}(kr)]H_{-F}^{(1)}(kr')\Big\}, \tag{1.10}$$

$$a_{21}^{(n_c)}(r;r') = \frac{i\pi}{2}\frac{k}{\sin\nu_\omega + \cos\nu_\omega e^{iF\pi}}\Big\{\theta(r-r')H_{-F}^{(1)}(kr)[\sin\nu_\omega J_{1-F}(kr') - \cos\nu_\omega J_{-1+F}(kr')] + \theta(r'-r)[\sin\nu_\omega J_{-F}(kr) + \cos\nu_\omega J_F(kr)]H_{1-F}^{(1)}(kr')\Big\}; \tag{1.11}$$

$$a_{22}^{(n_c)}(r;r') = \frac{i\pi}{2}\frac{\omega - m}{\sin\nu_\omega + \cos\nu_\omega e^{iF\pi}}\Big\{\theta(r-r')H_{1-F}^{(1)}(kr)[\sin\nu_\omega J_{1-F}(kr') - \cos\nu_\omega J_{-1+F}(kr')] + \theta(r'-r)[\sin\nu_\omega J_{1-F}(kr) - \cos\nu_\omega J_{-1+F}(kr)]H_{1-F}^{(1)}(kr')\Big\}, \tag{1.12}$$

де $k = \sqrt{\omega^2 - m^2}$ і фізичний лист вибраний за допомогою умови $0 < \operatorname{Arg} k < \pi$ ($\operatorname{Im} k > 0$), $J_\mu(u)$ — функція Бесселя порядку μ, $H_\mu^{(1)}$ — функція Ганкеля першого роду порядку μ, та

$$\operatorname{tg}\nu_\omega = \frac{k^{2F}}{\omega+m}\operatorname{sgn}(m)(2|m|)^{1-2F}\frac{\Gamma(1-F)}{\Gamma(F)}\operatorname{tg}\left(s\frac{\Theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right). \tag{1.13}$$

За відсутности вихору радіяльні компоненти набирають вигляду

$$a_{11}^{(n)}(r;r')\Big|_{e\Phi=0} = \frac{i\pi}{2}(\omega+m)\left[\theta(r-r')H_{sn}^{(1)}(kr)J_{sn}(kr')+\theta(r'-r)J_{sn}(kr)H_{sn}^{(1)}(kr')\right], \tag{1.14}$$

$$a_{12}^{(n)}(r;r')\Big|_{e\Phi=0} = \frac{i\pi}{2}k\left[\theta(r-r')H_{sn+1}^{(1)}(kr)J_{sn}(kr')+\theta(r'-r)J_{sn+1}(kr)H_{sn}^{(1)}(kr')\right], \tag{1.15}$$

$$a_{21}^{(n)}(r;r')\Big|_{e\Phi=0} = \frac{i\pi}{2}k\left[\theta(r-r')H_{sn}^{(1)}(kr)J_{sn+1}(kr')+\theta(r'-r)J_{sn}(kr)H_{sn+1}^{(1)}(kr')\right]. \tag{1.16}$$

$$a_{22}^{(n)}(r;r')\Big|_{e\Phi=0} = \frac{i\pi}{2}(\omega-m)\left[\theta(r-r')H_{sn+1}^{(1)}(kr)J_{sn+1}(kr')+\theta(r'-r)J_{sn+1}(kr)H_{sn+1}^{(1)}(kr')\right], \tag{1.17}$$

Зазначимо, що всі радіяльні компоненти поводяться в асимптотиці на великих відстанях як розбіжні хвилі.

ДОДАТОК Б

Користуючись інтеґральним представленням реґуляризованого ядра резольвенти (69)

$$\langle\mathbf{x}\left|(H_0-\omega)^{-1}e^{-tH_0^2}\right|\mathbf{x}'\rangle = \int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-t(p^2+m^2)\right]\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\gamma^0 m+\omega}{p^2-k^2}, \tag{2.1}$$

можна обчислити його слід за спінорними індексами при $\mathbf{x}'=\mathbf{x}$:

$$\operatorname{tr}\left\langle\mathbf{x}\left|(H_0-\omega)^{-1}e^{-tH_0^2}\right|\mathbf{x}\right\rangle = 2\omega\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{e^{-t(p^2+m^2)}}{p^2-k^2}. \tag{2.2}$$

Аналогічно, використовуючи співвідношення

$$\Sigma\left\langle\mathbf{x}\left|(H_0-\omega)^{-1}e^{-tH_0^2}\right|\mathbf{x}'\right\rangle = \int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-t(p^2+m^2)\right]\frac{1}{2}s\gamma^0\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\gamma^0 m+\omega}{p^2-k^2}, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\Sigma\,J_0\left\langle\mathbf{x}\left|(H_0-\omega)^{-1}e^{-tH_0^2}\right|\mathbf{x}'\right\rangle &= \int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-t(p^2+m^2)\right]\\ &\times\frac{1}{2}s\gamma^0\left(x^1p^2-x^2p^1+\frac{1}{2}s\gamma^0\right)\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\gamma^0 m+\omega}{p^2-k^2},\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_0\,J_0\left\langle\mathbf{x}\left|(H_0-\omega)^{-1}e^{-tH_0^2}\right|\mathbf{x}'\right\rangle &= \int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-t(p^2+m^2)\right]\\ &\times\left(x^1p^2-x^2p^1\right)\left(x^1p^2-x^2p^1+\frac{1}{2}s\gamma^0\right)\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\gamma^0 m+\omega}{p^2-k^2},\end{aligned} \tag{2.5}$$

знаходимо співвідношення

$$\operatorname{tr}\Sigma\left\langle\mathbf{x}\left|(H_0-\omega)^{-1}e^{-tH_0^2}\right|\mathbf{x}\right\rangle = sm\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{e^{-t(p^2+m^2)}}{p^2-k^2}, \tag{2.6}$$

$$\operatorname{tr}\Sigma\,J_0\left\langle\mathbf{x}\left|(H_0-\omega)^{-1}e^{-tH_0^2}\right|\mathbf{x}\right\rangle = \frac{\omega}{2}\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{e^{-t(p^2+m^2)}}{p^2-k^2}, \tag{2.7}$$

$$\operatorname{tr}\Lambda_0\,J_0\left\langle\mathbf{x}\left|(H_0-\omega)^{-1}e^{-tH_0^2}\right|\mathbf{x}\right\rangle = \omega r^2\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{p^2e^{-t(p^2+m^2)}}{p^2-k^2}, \tag{2.8}$$

які у випадку $\operatorname{Im}k>|\operatorname{Re}k|$ можна звести до вигляду (70)–(72).

[1] R. Jackiw, C. Rebbi, Phys. Rev. D **13**, 3398 (1976).
[2] J. Goldstone, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **47**, 986 (1981).
[3] G. E. Volovik, J. Low Temp. Phys. **121**, 357 (2000).
[4] K. S. Novoselov, D. Jiang, F. Schedin, T. J. Booth, V. V. Khotkevich, S. V. Morozov, A. K. Geim, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **102**, 10451 (2005).
[5] A. C. Neto, F. Guinea, N. M. Peres, Physics World **19** No. 11, 33 (2006).
[6] A. K. Geim, K. S. Novoselov, Nature Mater. **6**, 183 (2007).
[7] G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **53**, 2449 (1984).
[8] Yu. A. Sitenko, N. D. Vlasii, in *Book of Abstracts of the 2$^{\rm nd}$ Intern. Conf. on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics*, Sept. 19–23, 2006, Kharkov, Ukraine, p. 36; Nucl. Phys. B **787**, 241 (2007).
[9] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
[10] E. M. Серебряный, Теор. мат. физ. **64**, 299 (1985).
[11] Ю. А. Ситенко, Яд. физ. **47**, 292 (1988); **48**, 1053 (1988).
[12] Yu. A. Sitenko, Nucl. Phys. B **342**, 655 (1990); Phys. Lett. B **253**, 138 (1991).
[13] P. Gornicki, Ann. Phys. (N. Y.) **202**, 271 (1990); E. G. Flekkoy, J. M. Leinaas, Int. J. Mod. Phys. A **6**, 5327 (1991).
[14] Ю. О. Ситенко, Д. Г. Ракитянський, Укр. фіз. журн. **41**, 329 (1996); Ю. А. Ситенко, Д. Г. Ракитянский, Яд. физ. **60**, 308 (1997); 320 (1997).
[15] Yu. A. Sitenko, Phys. Lett. B **387**, 334 (1996); Ю. А. Ситенко, Д. Г. Ракитянский, Яд. физ. **60**, 1643 (1997).
[16] Ю. А. Ситенко, Яд. физ. **60**, 2285 (1997); **62**, 1152 (1999) (поправка).
[17] Ю. А. Ситенко, Яд. физ. **62**, 1123 (1999).
[18] Ю. А. Ситенко, Яд. физ. **62**, 1898(1999).
[19] Yu. A. Sitenko, V. M. Gorkavenko, Nucl. Phys. B **679**, 597 (2004).
[20] Yu. A. Sitenko, V. M. Gorkavenko, Nucl. Phys. B **714**, 217 (2005).
[21] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей* (Наука, Москва, 1976).
[22] A. Das, *Finite Temperature Field Theory* (World Scientific, Singapore, 1997).
[23] M. B. Paranjape, Phys. Rev. Lett. **55**, 2390 (1985); Phys. Rev. D **36**, 3766 (1987).
[24] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность* (Мир, Москва, 1978).
[25] *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган (Наука, Москва, 1979).

SPIN AND ANGULAR MOMENTUM OF TWO-DIMENSIONAL RELATIVISTIC FERMI GAS WITH A MAGNETIC VORTEX

N. D. Vlasii[1,2], Yu. A. Sitenko[1,2]

[1] *Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 14-b, Metrolohichna St., Kyiv, UA–03680, Ukraine*

[2] *Physics Department, Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2, Glushkov Ave., Build. 1, Kyiv, UA–03022, Ukraine*

The influence of temperature on the induced quantum numbers in relativistic fermionic systems with topological defects is analyzed. We consider an ideal gas of two-dimensional Dirac electrons in the presence of a defect in the form of a point magnetic vortex with an arbitrary flux. The most general boundary conditions at the vortex point, providing for the self-adjointness of the Dirac Hamiltonian, are employed. It is shown that spin and angular momentum are induced in the system, and we determine a dependence of thermal averages and correlations on the vortex flux and boundary condition.