

## ВПЛИВ ПРОЗОРСТІ ДІЕЛЕКТРИЧНОГО ПРОШАРКУ НА ФОРМУ ЗАЛЕЖНОСТІ СТРУМУ ВІД РІЗНИЦІ ФАЗ У КОНТАКТАХ ТИПУ SIS

В. Сахнюк, В. Головій

*Волинський національний університет імені Лесі Українки,  
кафедра теоретичної та математичної фізики,  
проспект Воли, буд. 13, Луцьк, 43000, Україна*

(Отримано 13 квітня 2010 р.; в остаточному вигляді — 16 березня 2011 р.)

Досліджено стаціонарні властивості надпровідних контактів типу SIS для довільної прозорості діелектричного прошарку при температурах, близьких до критичної. Наведено результати чисельних розрахунків залежності струму від різниці фаз  $I(\varphi)$ , просторової зміни параметра порядку та надплинної швидкості. З'ясовано, як відбувається перехід до просторово однорідного випадку при  $D \rightarrow 1$ . Одержано новий аналітичний вираз для залежності  $I(\varphi)$ . Подано асимптотичні результати для  $D \lesssim 1$ .

**Ключові слова:** надпровідник, SIS-контакт, струм Джозефсона, критичний струм, параметр порядку.

PACS number(s): 74.50.+r

### I. ВСТУП

Тривалий час форму залежності струму від різниці фаз не розглядали як важливий фактор у прикладних застосуваннях надпровідних контактів. У приладах, які базувались на ефекті Джозефсона, використовували тунельні SIS-структури з  $j \sim \sin \varphi$ . Сучасні досягнення в технології виготовлення надпровідних контактів дають змогу конструювати джозефсонівські переходи з довільним значенням коефіцієнта проходження електронів, що допускає протікання струмів, близьких до термодинамічного критичного струму. Тому при вивченні в таких контактах просторової форми параметра порядку виникає потреба враховувати разом із просторовою неоднорідністю також ефекти розпаровування в надпровідних областях. Теоретичні дослідження залежності струму від різниці фаз з урахуванням цих обставин (див. огляд [1]) у багатьох випадках приводять до результатів, у яких функція  $j(\varphi)$  відмінна від простої синусоїдальної залежності. Досліджували вплив прозорості на залежність  $j(\varphi)$  в тунельних SIS-структурах у [2] для температур, близьких до критичної. За основу в роботу взято рівняння Узаделя [3], які є асимптотичною формою рівнянь мікроскопічної теорії надпровідності за наявності немагнітних домішок високої концентрації ( $l \ll \xi_0$ ,  $l$  — довжина вільного пробігу електронів,  $\xi_0$  — довжина когерентності). У статті [3] розглянуто кілька значень коефіцієнта проходження електронів і побудовано відповідні залежності струму від різниці фаз, а також одержано аналітичні результати для частинних інтервалів різниці фаз. Подібні дослідження виконані в [4]. У [5] розглянуто залежність  $j(\varphi)$  з урахуванням впливу на просторову поведінку параметра порядку двох чинників: наявності просторової неоднорідності й розпаровуючої дії струму. Одержані

в [5] результати, хоч і чинні для довільної концентрації немагнітних домішок, надто засимволізовані та громіздкі для сприйняття й аналізу.

У цій праці ми дослідимо стаціонарні властивості SIS-контакту за відсутності домішок та без обмежень, крім фізичних, на значення коефіцієнта проходження електронів. Оскільки область досліджуваних температур вважаємо близькою до критичної, то за основу візьмемо теорію Гінзбурга–Ландау, як асимптотичну форму теорії надпровідності поблизу критичної температури. Акцентуючи увагу на з'ясуванні залежності  $j(\varphi)$ , дослідимо просторову зміну параметра порядку та надплинної швидкості.

### II. МОДЕЛЬ ТА ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Уважатимемо, що надпровідник займає область  $|z| > 0$ , а прошарок діелектрика розміщений у площині  $z = 0$ . Оскільки просторова неоднорідність порушена лише в напрямку осі  $Oz$ , перпендикулярної до площини діелектрика, то досліджувані величини залежать лише від  $z$ -координати. У теорії Гінзбурга–Ландау [6] густину струму обчислюємо за формулою

$$j(\zeta) = i \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{env_0}{p_0\xi_0 T_c^2} \left( \Delta \frac{d\Delta^*}{d\zeta} - \Delta^* \frac{d\Delta}{d\zeta} \right), \quad (1)$$

де  $e$  — заряд електрона,  $n$  — концентрація електронів,  $v_0$  — фермі-швидкість,  $p_0$  — фермі-імпульс,  $\xi_0 = v_0/2\pi T_c$  — довжина когерентності,  $T_c$  — критична температура,  $\zeta = z/\xi_0$  — безрозмірна змінна. Щоб скористатися формулою (1), обчислюючи струм у контакті, необхідно дослідити просторову поведінку параметра порядку  $\Delta(\zeta)$ , який, як відомо з [6], у теорії Гінзбурга–Ландау задовольняє рівняння

$$\frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} \frac{d^2 \Delta(T)}{d\xi^2} - \frac{1}{\Delta_\infty^2} |\Delta(\zeta)|^2 \Delta(\zeta) + \Delta(\zeta) = 0. \quad (2)$$

За наявності струму в контакті параметр порядку записують у вигляді

$$\Delta(\zeta) = e^{\pm i\varphi/2} \Delta_\infty f(\zeta) e^{2im\chi(\zeta)}, \quad (3)$$

тут  $\Delta_\infty = \sqrt{\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} T_c \sqrt{1 - T/T_c}}$  — параметр порядку в просторово однорідному випадку поблизу  $T_c$ ,  $\varphi$  — стрибок фази на контакті,  $\chi(\zeta)$  — неперервний складник фази параметра порядку, який пов'язаний з надплинною швидкістю  $v_s$  співвідношенням  $\frac{d\chi}{d\zeta} = \xi_0 v_s$ .

Рівняння (2) описує просторову еволюцію параметра порядку в масштабі  $\xi(T) = \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{12} \frac{\xi_0^2}{1 - T/T_c}}$ , характерної довжини теорії Гінзбурга–Ландау. Поблизу границі надпровідника з діелектриком  $\Delta(\zeta)$  зазнає істотної зміни на менших відстанях  $\xi_0$ , тому для дослідження просторової еволюції параметра порядку в цій області слід звернутися до мікроскопічної теорії надпровідності, з якої одержимо граничну умову для рівняння Гінзбурга–Ландау. Пошук граничної умови для рівняння (2) є ключовим при використанні теорії Гінзбурга–Ландау, тому насамперед розгляньмо це питання.

За вихідну візьмімо систему рівнянь Горькова

$$\begin{cases} i\omega_n - \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{p}}^2 + \mu - U(z) \} G_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Delta(\mathbf{r}) F_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ i\omega_n + \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{p}}^2 - \mu + U(z) \} F_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Delta^*(\mathbf{r}) G_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \end{cases} \quad (4)$$

та умову самоузгодженості

$$\Delta^*(\mathbf{r}) = |g| T_c \sum_{\omega_n} F_{\omega_n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}).$$

Тут  $G$  та  $F$  — функції Гріна, а  $\omega_n = \pi T(2n+1)$  — непарна мацубарівська частота,  $U(z) = U_0 \delta(z)$  —  $\delta$ -функційний потенціал, яким моделюється прошарок діелектрика.

Оскільки в околі критичної температури  $\Delta(\mathbf{r})$  є малим, то розв'язок системи (4) можна одержати наближено у вигляді розкладу за степенями  $\Delta(\mathbf{r})$ . Це приводить до лінійного інтегрального рівняння для параметра порядку

$$\Delta(\mathbf{r}) = \int K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (5)$$

з ядром  $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |g| T_c \sum_{\omega_n} \langle G_{-\omega_n}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_{\omega_n}^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle$ .

Тут  $\langle \dots \rangle$  — позначає усереднення за атомними довжинами, у якому зміни ядра виникають лише в масштабі  $\xi_0$ . Функцію  $G_{\omega_n}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  шукаємо з рівняння

$$\left\{ i\omega_n - \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{p}}^2 + \mu - U(z) \right\} G_{\omega_n}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Нарешті, з урахуванням геометрії системи лінійне інтегральне рівняння (5) набуває вигляду:

$$\Delta(\zeta) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left\{ -\frac{|2n+1|}{x} |\zeta - \zeta'| \right\} + \text{sign } \zeta \zeta' R(x) \exp \left\{ -\frac{|2n+1|}{x} (|\zeta| + |\zeta'|) \right\} \right\} \Delta(\zeta') d\zeta', \quad (6)$$

де  $R(x) = 1 - D(x)$ ,  $D(x) = \frac{x^2}{x^2 + \alpha^2}$  — коефіцієнт відбиття та коефіцієнт проходження електронів крізь бар'єр  $U(z) = U_0 \delta(z)$ ,  $x = \cos \theta$ ,  $\theta$  — кут падіння електрона на границю IS,  $\alpha = \frac{mU_0}{p_0}$  або  $\alpha^2 = \frac{1-D(1)}{D(1)} = \frac{R(1)}{D(1)}$  — відношення коефіцієнта відбиття до коефіцієнта проходження електронів, що налітають на границю діелектрика з надпровідником під прямим кутом. Надалі  $D(1) \equiv D$ .

Асимптотика розв'язку рівняння (6) при  $\zeta \gg 1$  ( $z \gg \xi_0$ ), як це легко зрозуміти з самого рівняння, є лінійною:

$$\Delta(\zeta) = \Delta'_+ \zeta + \Delta_+, \quad \zeta \rightarrow +\infty \quad (7)$$

$$\Delta(\zeta) = \Delta'_- \zeta + \Delta_-, \quad \zeta \rightarrow -\infty.$$

Для симетричної й антисиметричної частин параметра порядку на основі (6) маємо такі рівняння:

$$\Delta_s(\zeta) = \int_0^\infty d\zeta' \Delta_s(\zeta') \{K(\zeta - \zeta') + K(\zeta + \zeta')\}, \quad (8)$$

$$\Delta_a(\zeta) = \int_0^\infty d\zeta' \Delta_a(\zeta') \{K(\zeta - \zeta') + K_0(\zeta + \zeta')\}, \quad (9)$$

де

$$K(\zeta) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} \exp \left\{ -\frac{|2n+1|}{x} |\zeta| \right\},$$

$$K_0(\zeta) = \frac{\rho}{2} \sum_n \int_0^1 \frac{dx}{x} (1 - 2D(x)) \exp \left\{ -\frac{|2n+1|}{x} |\zeta| \right\}.$$

Розв'язком рівняння (8) є стала  $\Delta_s(\zeta) = B$ . З рівняння (9) при  $\zeta \gg 1$  одержуємо, що асимптотика його розв'язку є лінійною:

$$\Delta_a(\zeta) = C(\zeta + q_\infty), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Зв'язок між коефіцієнтами в асимптотиках (7) і (10) буде таким:

$$\begin{aligned} \Delta'_+ &= \Delta'_-, \\ \Delta_+ - \Delta_- &= 2q_\infty \Delta'_+. \end{aligned} \quad (11)$$

Підставляючи в (11) представлення (3), знаходимо граничну умову для функції  $f(\zeta)$ :

$$\left. \frac{1}{f(\zeta)} \frac{df(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = \frac{\sin^2 \varphi/2}{q_\infty}. \quad (12)$$

Однак у цій умові невизначений параметр  $q_\infty$ . Для його обчислення підставимо в (9), замість функції  $\Delta_a(\zeta)$ , відповідний їй вираз із виділеною асимптотикою  $\Delta_a(\zeta) = \zeta + q_\infty + \psi(\zeta)$  та використаємо так званий метод квазіортогональності до асимптотики [7]. У підсумку одержуємо

$$\begin{aligned} q_\infty &= \frac{\pi^4}{28\zeta(3)} \int_0^1 x^3 R(x) dx \\ &+ \frac{21\zeta(3)}{\pi^2} \frac{\left( \int_0^1 x^2 R(x) dx \right)^2}{\int_0^1 x D(x) dx}. \end{aligned} \quad (13)$$

Маючи граничну умову (12), можемо перейти до розгляду рівняння (2) та дослідження струмових станів у контакті на основі формули (1). Підставляючи (3) в (1) та (2), приходимо до таких рівнянь:

$$j = 2en \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) f^2(\zeta) v_s(\zeta), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2(T)}{\xi_0^2} \frac{d^2 f(\zeta)}{d\zeta^2} - \xi^2(T) 4m^2 v_s^2(\zeta) f(\zeta) \\ + f(\zeta) - f^3(\zeta) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$f^2(\zeta) v_s(\zeta) = \text{const}. \quad (16)$$

Як бачимо, рівність (16) фактично є умовою неперервності для струму (14):  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ .

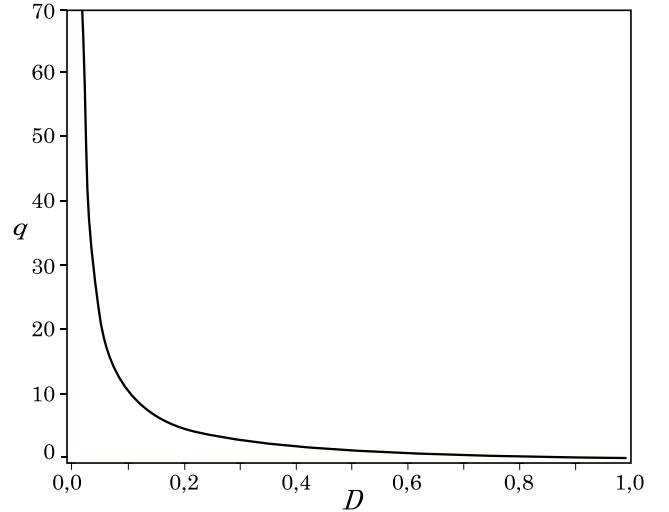


Рис. 1. Залежність параметра  $q_\infty$  від коефіцієнта прохідження електронів, які налітають на границю надпровідника з діелектриком під прямим кутом.

Рівняння (15) після виключення  $v_s(\zeta)$  має вигляд

$$\frac{1}{\tau^2} \frac{d^2 f(\zeta)}{d\zeta^2} - \frac{I^2}{f^3(\zeta)} + f(\zeta) - f^3(\zeta) = 0, \quad (17)$$

тут запроваджені позначення:  $\tau^2 = \frac{\xi_0^2}{\xi^2(T)} = \frac{12}{7\zeta(3)} (1 - T/T_c)$ ,  $I = j/j_0$  — безрозмірна густина струму, де  $j_0 = \sqrt{\frac{12}{7\zeta(3)} \frac{en v_0}{\rho_0 \xi_0}} (1 - T/T_c)^{3/2}$ .

Із (17) в границі  $\zeta \rightarrow \infty$  одержуємо

$$I = f_\infty^2 (1 - f_\infty^2)^{1/2}, \quad (18)$$

де  $f_\infty$  — значення функції  $f(\zeta)$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Для рівняння (17) існує перший інтеграл, який після врахування умови на нескінченності  $f' = 0$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ , набуває форми

$$\frac{1}{\tau^2} \left( \frac{df(\zeta)}{d\zeta} \right)^2 + (f_\infty - f(\zeta)) \left( \frac{1}{2} (f_\infty^2 + f^2(\zeta)) + \frac{I^2}{f_\infty^2 f^2(\zeta)} - 1 \right) = 0. \quad (19)$$

Струм обчислюватимемо в області  $\zeta \gg 1$ , де для параметра порядку маємо просту асимптотичну формулу (7), тоді, підставляючи останню в (1) і використовуючи співвідношення (11) та представлення для параметра порядку (3), маємо таку формулу для струму:

$$I = \frac{1}{2} \frac{f_+^2}{\tau q_\infty} \sin \varphi. \quad (20)$$

Тут  $f_+$  є значенням функції  $f(\zeta)$  при  $\zeta = 0$ , тобто на IS-границі контакту. Рівняння для  $f_+$  одержуємо на основі першого інтеграла (19) з урахуванням граничної умови (12):

$$\frac{\sin^4 \varphi/2}{\tau^2 q_\infty^2} f_+^2 + (f_\infty^2 - f_+^2) \left( \frac{1}{2} (f_\infty^2 + f_+^2) + \frac{I^2}{f_\infty^2 f_+^2} - 1 \right) = 0. \quad (21)$$

Розв'язуючи сукупність рівнянь (18), (20) та (21), можемо з'ясувати поведінку величин  $I$ ,  $f_+$ ,  $f_\infty$  як функцій  $\varphi$  та  $D$ . Щоб знайти  $I(\varphi)$ , зручно виключити з (20) та (21)  $I$ . Використовуючи (18), одержуємо замкнену систему рівнянь для  $f_+$ ,  $f_\infty$ :

$$\begin{cases} \frac{\sin^2 \varphi/2}{\tau q_\infty} f_+^2 + (f_\infty^2 - f_+^2) \left( \frac{1}{2} f_+^2 + f_\infty^2 - 1 \right)^{1/2} = 0, \\ f_\infty^2 (1 - f_\infty^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{f_+^2}{q_\infty \tau} \sin \varphi, \end{cases} \quad (22)$$

розв'язуючи яку, одержуємо  $f_+$  як функцію  $\varphi$ , а підставивши одержаний вираз у (20), знаходимо залежність струму від різниці фаз.

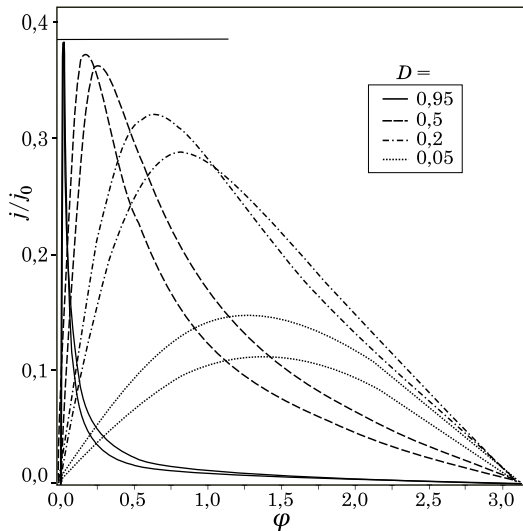


Рис. 2. Форми кривих, які відображають залежність струму від різниці фаз при різних значеннях коефіцієнта проходження електронів:  $D = 0.05; 0.2; 0.5; 0.95$ . Криві в парах з вищими максимумами відповідають температурі  $T = 0.99 T_c$ , а криві з нижчими максимумами —  $T = 0.98 T_c$ . Горизонтальна лінія — критичний струм просторово однорідного надпровідника.

Оскільки одержати точний аналітичний розв'язок системи (22) в загальному випадку неможливо, то варто чисельно розрахувати її розв'язки. Результати подано на рис. 2–5.

Вплив прозорості діелектрика на форму кривої залежності струму від різниці фаз визначаємо через параметр  $q_\infty$ , який входить у вираз для струму. З рис. 1 випливає, що параметр  $q_\infty$  є чутливішим до змін  $D$  при малих  $D$ . Якщо ж  $D$  наближається до одиниці, параметр  $q_\infty$  слабо залежить від коефіцієнта прохо-

дження електронів. Як видно з рис. 2, зі збільшенням коефіцієнта проходження електронів форма кривої струм-фазової залежності відрізняється від синусоїдальної. Максимум струму досягається при різниці фаз  $\varphi_c < \pi/2$ , яка зсувається ближче до нуля зі збільшенням  $D$ . Горизонтальна лінія на рис. 2 відповідає максимуму струму для просторово однорідного надпровідника  $I_c = 2/3\sqrt{3}$ , і, як бачимо (див. також рис. 3 (а)), вже при  $D \cong 0.5$  максимум струму в контакті дуже близький до максимуму струму в просторово однорідному надпровіднику. Тобто при  $D \gtrsim 0.5$  переважний вплив на струм у контакті дають ефекти розпаровування в надпровіднику, вплив тунельного бар'єра послаблюється.

При вищій температурі вплив прозорості бар'єра на форму кривої залежності  $j(\varphi)$  є істотнішим, що випливає з рис. 2. Це також видно з рис. 3 (b): підвищення температури приводить до більшого зміщення  $\varphi_c$  в напрямку до нуля.

Із рис. 4 видно, що в області зміни різниці фаз  $[0, \varphi_c]$  зі збільшенням прозорості бар'єра значення параметра порядку на IS-границі та в глибині зразка практично не відрізняються. Це означає, що саме ця область зміни різниці фаз передає еволюцію системи до просторово однорідного випадку при  $D \rightarrow 1$ .

Із рис. 2 бачимо, що деяке значення струму реалізовуватиметься при двох різних значеннях різниці фаз з інтервалу  $[0, \pi]$ . Як приклад, розгляньмо випадок  $D = 0.2$ ,  $T = 0.98 T_c$ , тоді для  $I(\varphi) = 0.2$  маємо  $\varphi_1 = 0.36$ ,  $\varphi_2 = 1.65$ . З'ясуємо, чим фізично відрізняються стани, у яких перебуває контакт в обох випадках. Для цього дослідимо просторову зміну модулів параметра порядку та надпливної швидкості в кожному з них. Щоб знайти функцію  $f(\zeta)$ , скористаймося рівнянням (19), яке з використанням (18) матиме вигляд

$$f(\zeta) \frac{df(\zeta)}{d\zeta} - \tau(f_\infty^2 - f^2(\zeta)) \left( f_\infty^2 - 1 + \frac{1}{2} f^2(\zeta) \right)^{1/2} = 0. \quad (23)$$

Розв'язок цього рівняння

$$f(\zeta) = \left[ 2(1 - f_\infty^2) + (3f_\infty^2 - 2) \cdot \text{th}^2 \left( \sqrt{\frac{3}{2} f_\infty^2 - 1} \cdot \tau(\zeta + c) \right) \right]^{1/2}. \quad (24)$$

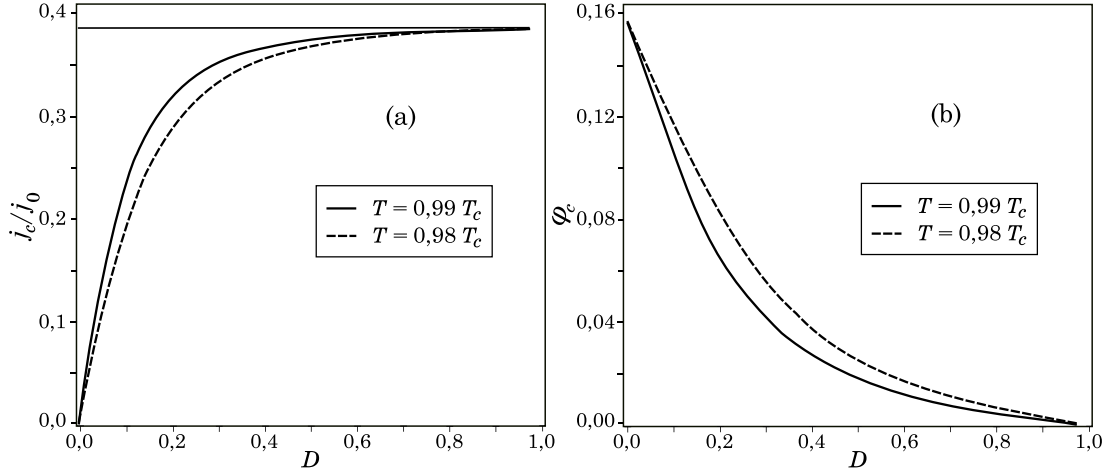


Рис. 3. Критичний струм у контакті (рис. (а)) та значення різниці фаз, при якому струм досягає максимуму (рис. (б)), як функції коефіцієнта проходження електронів. Горизонтальна лінія на рис. (а) відповідає критичному струму просторово однорідного надпровідника.

Із системи рівнянь (22) знаходимо, що при

- 1)  $\varphi_1 = 0.36$ :  $f_+^{(1)} = 0.95$ ,  $f_\infty = 0.98$ ;
- 2)  $\varphi_2 = 1.65$ :  $f_+^{(2)} = 0.56$ ,  $f_\infty = 0.98$ .

Покладаючи в (24)  $\zeta = 0$  та підставляючи одержані значення для  $f_\infty$  та  $f_+$ , фіксуємо сталу  $c$ :  $c_1 = 18.3$ ,  $c_2 = 5.08$ . У результаті маємо такі вирази для функції  $f(\zeta)$ :

$$f_1(\zeta) = [0.087 + 0.87 \cdot \text{th}^2(0.11 \cdot \zeta + 2.04)]^{1/2}, \quad \varphi_1 = 0.36,$$

$$f_2(\zeta) = [0.087 + 0.87 \cdot \text{th}^2(0.11 \cdot \zeta + 0.57)]^{1/2}, \quad \varphi_2 = 1.65.$$

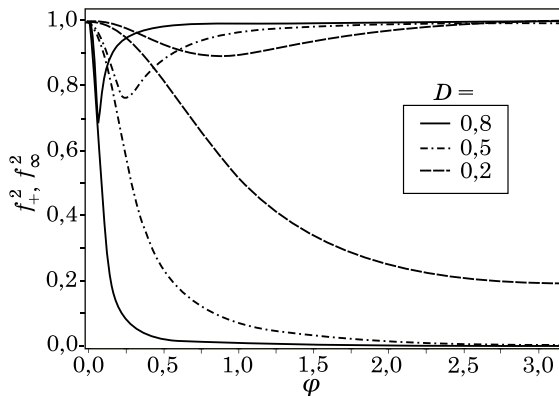


Рис. 4. Значення функції  $f^2(\zeta)$  залежно від різниці фаз при  $\zeta=0$  ( $f_+^2$ ) зображено на нижній лінії, а при  $\zeta \rightarrow \infty$  ( $f_\infty^2$ ) — на верхній лінії.

Ці залежності подано на рис. 5 (а), з якого випливає, що дві можливі просторові зміни функції  $f(\zeta)$  для  $I(\varphi) = 0.2$  суттєво відрізняються поблизу границі, а зі збільшенням  $\zeta$  обидві наближаються до  $f_\infty$  — значення функції  $f(\zeta)$  у глибині зразка.

Для пошуку  $v_s$  як функції  $\zeta$  скористаймося умовою неперервності для струму:

$$v_s(\zeta) f^2(\zeta) = v_s(\infty) f_\infty^2.$$

Звідки маємо

$$2m\xi_0 v_s(\zeta) = \tau \frac{I(\varphi)}{f^2(\zeta)}.$$

Відповідні залежності  $v_s^{(1)}(\zeta)$  і  $v_s^{(2)}(\zeta)$  зображені на рис. 5 (б).

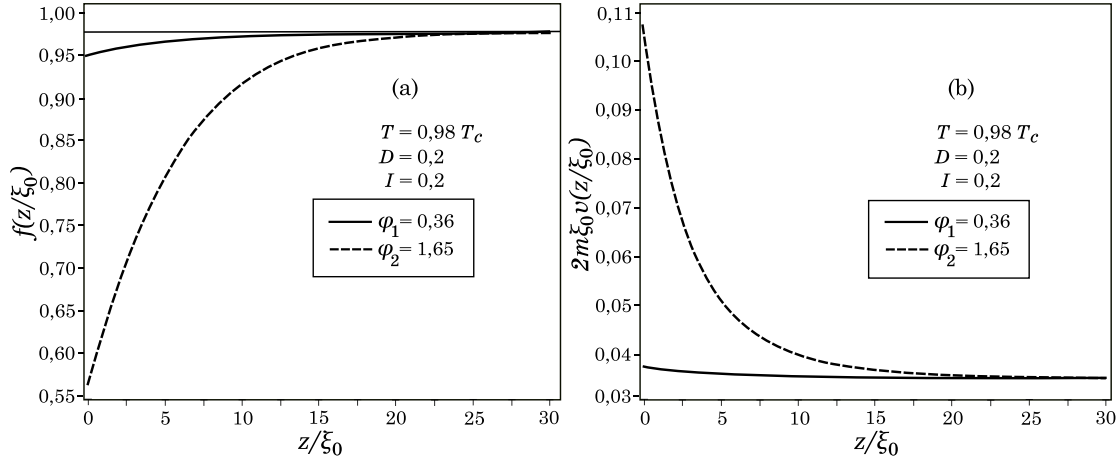


Рис. 5. Дві можливі форми залежності модуля параметра порядку (рис. (a)) та надплинної швидкості (рис. (b)) від безрозмірної відстані  $\zeta = z/\xi_0$  до границі надпровідника з діелектриком, при яких у контакті протікає однаковий струм.

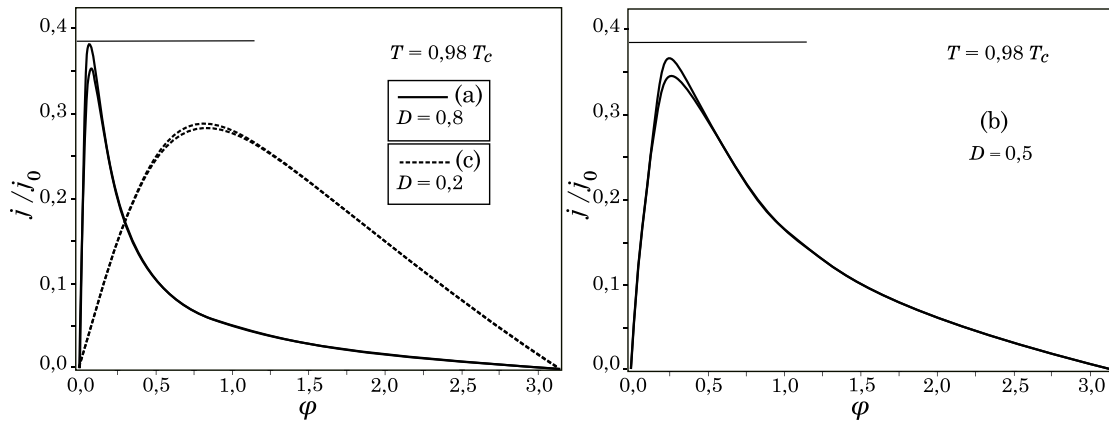


Рис. 6. Залежність струму від різниці фаз для прозорості бар'єра  $D = 0.8; 0.5; 0.2$ . Вищий графік відповідає чисельному результату, нижній — аналітичному. Горизонтальна пряма позначає критичне значення струму в однорідному випадку.

Порівнююючи рис. 5 (a) і рис. 5 (b), можемо зробити висновок щодо відмінностей між станами  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$ , у яких перебуває контакт з однаковим значенням струму. У стані  $\varphi_1$  параметр порядку поблизу IS-границі сильно пригнічений, отже, концентрація надпровідних електронів в околі границі є малою. Тому для забезпечення протікання заданого струму надплинна швидкість є більшою. І навпаки виглядає ситуація в стані  $\varphi_2$ : в околі границі контакту концентрація надпровідних електронів більша, тому для протікання того ж струму надплинна швидкість має бути меншою.

### III. АНАЛІТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Крім одержаних чисельних результатів, вдається розвинути доволі ефективну аналітику. Якщо подивитися на чисельні результати для різних  $D$  (рис. 4), то бачимо, що  $f_\infty^2$  швидко наближається до 1 при  $\varphi > \varphi_c$  для  $D$ , близького до 1, а при малих  $D$  значення  $f_\infty^2$  близьке до 1 на всьому інтервалі зміни  $\varphi$ . Тому, покладаючи в системі рівнянь (22)  $f_\infty^2 = 1 - \varepsilon$  та зберігаючи доданки, не вищі першого степеня за  $\varepsilon$ , приходимо до такого аналітичного виразу для залежності струму від різниці фаз:

$$I(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{2q_\infty \tau + \frac{\sin^2 \varphi}{\tau q_\infty}} \left[ 1 + \frac{\sin^2 \varphi / 4}{\tau^2 q_\infty^2} \left( 1 - \sqrt{1 + 2\tau^2 q_\infty^2} \right) \right]. \quad (25)$$

При одержанні цієї формули на коефіцієнт проходження електронів не накладалися жодні умови, тому її можна використовувати для довільного  $D$ . Як видно з рис. 6, на якому зображені залежності  $I(\varphi)$ , отримані чисельно та на основі формули (25), відмінність між ними виникає лише у вузькому околі  $\varphi_c$  при  $D \gtrsim 0.2$ . Із

формули (25) легко одержати асимптотичні результати для  $D \ll 1$ . При  $D \ll 1$

$$q_\infty \cong \frac{7\zeta(3)}{3\pi^2} \left( \int_0^1 xD(x)dx \right)^{-1} \gg 1.$$

Тоді в першому порядку за  $D$  маємо

$$j(\varphi) = \frac{env_0}{p_0\xi_0} \frac{3}{16} \frac{\Delta_\infty^2}{T_c^2} \int_0^1 xD(x)dx \sin \varphi. \quad (26)$$

Для поправки до струму, квадратичної за прозорістю одержуємо такий результат:

$$\delta j = -\frac{3\sqrt{3}\pi^4}{112\zeta(3)} env_0 \frac{\Delta_\infty}{E_F} \left( \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \left( \int_0^1 xD(x)dx \right)^2. \quad (27)$$

Формула (27) була отримана у складніших розрахунках також і в роботі [8].

Для області  $D \lesssim 1$  струм у контакті досягає максимуму при  $\varphi_c \ll 1$ . Якщо  $\varphi \ll 1$ , то з першого рівняння системи (22), у якому перший доданок можна відкинути як малий, одержимо

$$1) f_+^2 = f_\infty^2,$$

$$2) f_+^2 = 2(1 - f_\infty^2).$$

Підставляючи 1) в друге рівняння (22), знаходимо  $f_\infty^2$ :

$$f_\infty^2 = 1 - \frac{\varphi^2}{4\tau^2 q_\infty^2}. \quad (28)$$

Оскільки  $2/3 \leq f_\infty^2 \leq 1$ , то (28) чинне для інтервалу  $\varphi: 0 \leq \varphi \leq 2\tau q_\infty/\sqrt{3}$ .

Відповідний вираз для струму

$$I(\varphi) = \frac{\varphi}{2\tau q_\infty} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{4\tau^2 q_\infty^2} \right), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\tau q_\infty/\sqrt{3}. \quad (29)$$

Як виходить зі співвідношення (29), при  $\varphi_c = 2\tau q_\infty/\sqrt{3}$  струм досягає максимального значення  $I_c = 2/3\sqrt{3}$ , рівного термодинамічно критичному струму.

Рівняння (29) також показує, як відбувається перехід системи до просторово однорідної конфігурації. При  $D \rightarrow 1$ ,  $q_\infty \rightarrow 0$ , тоді на основі (29)  $\varphi$  повинне прямувати до 0, аби відношення  $\frac{\varphi}{\tau q_\infty}$  залишилося скінченним  $\left( \frac{\varphi}{\tau q_\infty} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$ .

Підстановка 2) у друге рівняння (22) дає  $f_\infty^2 = \frac{2\varphi}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 4\tau^2 q_\infty^2}}$ . Формула (29) аналогічна відповідній формулі для струму в просторово однорідному випадку

$$I = f^2(1 - f^2)^{1/2},$$

якщо в останній здійснити перехід від параметра  $f$  до  $\varphi$  за формулою  $f^2 = 1 - \frac{\varphi^2}{\varphi\tau^2 q_\infty^2}$ .

З умови  $2/3 \leq f_\infty^2 \leq 1$  маємо  $\varphi \geq \varphi_c$ . Щодо обмежень згори, то з цієї умови вони не випливають, тому вимагатимемо лише, щоб  $\varphi \ll 1$ .

Формула для струму:

$$I(\varphi) = \frac{4\tau q_\infty \varphi}{\left( \varphi + \sqrt{\varphi^2 + 4\tau^2 q_\infty^2} \right)^2}, \quad \frac{2\tau q_\infty}{\sqrt{3}} \leq \varphi \ll 1. \quad (30)$$

Якщо відійти від  $\varphi_c$  в область  $\varphi > \varphi_c$ , де  $f_\infty^2$  близька до одиниці, то можна скористатися формулою (25). У підсумку, враховуючи, що  $\tau q_\infty \ll 1$ , маємо

$$I(\varphi) = \frac{\sin \varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2\tau q_\infty + \frac{\sin^2 \varphi}{\tau q_\infty}}, \quad \tau q_\infty \ll \varphi \leq \pi. \quad (31)$$

Асимптотики формул (30) і (31) в області  $\tau q_\infty \ll \varphi \ll \pi$  є однаковими, тобто в цій області (розрахунки показують, що це є  $\varphi \approx 10\tau q_\infty$ ) відбувається перехід від залежності  $I(\varphi)$ , заданої формулою (30), до залежності, заданої формулою (31). Отже, одержані аналітичні результати (29), (30) і (31) для залежності струму від різниці фаз в області  $D \lesssim 1$  покривають усьє інтервал зміни  $\varphi: 0 \leq \varphi \leq \pi$ .

- [1] A. A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov, E. Il'ichev, Rev. Mod. Phys. **6**, 411 (2004).  
[2] М. Ю. Куприянов, Письма Журн. эксп. теор. физ. **8**, 56, 414 (1992).  
[3] K. D. Usadel, Phys. Rev. Lett. **25**, 507 (1970).  
[4] F. Sols, J. Ferrer, Phys. Rev. B. **49**, 15913 (1994).  
[5] В. Є. Сахнюк, А. В. Свідзинський, Укр. фіз. журн. **9**, 876 (2006).  
[6] А. В. Свідзинський, *Мікроскопічна теорія надпровідності* (РВВ "Вежа", Луцьк, 2003).  
[7] A. V. Svidzinsky, V. E. Sakhnyuk, Condens. Matter Phys. **3**, 683 (2000).  
[8] Т. П. Анцигіна, А. В. Свідзинський, Теор. мат. физ. **14**, 412 (1973).

**INFLUENCE OF THE DIELECTRIC LAYER TRANSPARENCY  
UPON THE CURRENT DEPENDENCE OF THE PHASE DIFFERENCE  
ON THE SIS JUNCTIONS**

V. Sakhnyuk, V. Holoviy  
*Lesia Ukrainka Volyn National University,  
Theoretical and Mathematical Physics Department,  
13 Voh Avenue, Lutsk, UA-43000, Ukraine*

Stationary properties of superconducting SIS junctions for an arbitrary dielectric layer transparency at the temperatures close to critical are studied. The numerical results of the current's dependence upon phase difference  $I(\varphi)$ , order parameter space distribution and superfluid velocity are given. It is shown how a transition to the space homogenous case at  $D \rightarrow 1$  occurs. A new analytical expression for the dependence  $I(\varphi)$  is found. Asymptotic results for  $D \lesssim 1$  are presented.