ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 17, № 3 (2013) 3001(4 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 17, No. 3 (2013) 3001(4 p.)

ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА В ПРОСТОРІ ЗІ СПІНОВОЮ НЕКОМУТАТИВНІСТЮ

В. М. Васюта
Кафедра теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка, вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна
(Отримано 21 березня 2013 р.; в остаточному вигляді — 7 липня 2013 р.)

Побудовано новий варіант нерелятивістської спінової некомутативності та знайдено її зв'язок з існуючими алґебрами. Показано, що в запропонованій алґебрі є мінімальна довжина, значення якої залежить від знака параметра некомутативності. Точно розв'язано тривимірний просторовий гармонічий осцилятор, знайдено та проаналізовано вирази для енерґетичних рівнів і власних функцій осцилятора.
Ключові слова: спінова некомутативність, мінімальна довжина, гармонічний осцилятор.

PACS number(s): 02.40.Gh, 11.10.Nx, 03.65.−w

I. ВСТУП

Гіпотеза некомутативності координат уперше з'явилася в роботах Снайдера [1], хоча дещо раніше некомутативність як математичний трюк використав Паєрлс для розгляду зарядженої частинки в специфічному електромагнітному полі [2].

Ідея некомутативності тривалий час не розвивалася, лише наприкінці 1970-их років сформульовано основи некомутативної геометрії як чисто математичної теорії. У фізиці зацікавлення некомутативністю відновилося з публікацією [3], де показано, що за наявності калібрувального поля, вбудовані бранні координати стають некомутуючими. Нещодавно створено теорію, що пояснює всі фізичні взаємодії, включаючи ґравітацію, через некомутативну геометрію, та показав сумісність висновків побудованої теорії зі Стандартною моделлю [4].

Некомутативність у квантовій механіці природно вводять, деформуючи комутатори координат. Широко досліджуваною моделлю є алґебра типу

$$[X_i, X_j] = i\theta_{ij}, \quad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [P_i, P_j] = 0, \qquad (1)$$

де θ_{ij} — сталий антисиметричний тензор, δ_{ij} — символ Кронекера. Зауважимо, що така алґебра ґенерується деякими версіями теорії суперструн [5,6].

Подальші дослідження стосуються модифікації деформацій алґебри (1), наприклад як у [7]:

$$[X_i, X_j] = i\theta\omega_{ij}(x), \quad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [P_i, P_j] = 0, \qquad (2)$$

де ω_{ij} є функцією x.

Нещодавно виникла ідея змішувати координати зі спінами. Так, у [8] запропоновано алґебру

$$[X_i, X_j] = i\theta^2\varepsilon_{ijk}s_k, \quad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [P_i, P_j] = 0,$$

$$[s_i, s_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}s_k, \qquad [X_i, s_j] = i\theta\varepsilon_{ijk}s_k, \qquad (3)$$

де ε_{ijk} — одиничний, повністю антисиметричний тензор, s_k — k-та компонента спіну. Така некомутативність небагато досліджувалася в літературі, є лише кілька публікацій, присвячених їй.

У [8] розглянуто гармонічний тривимірний осцилятор, отримано точно хвильову функцію основного стану суперсиметричного розширення осцилятора та запропоновано застосовувати таку алґебру для опису систем із дипольною (чи вищою мультипольною) взаємодією.

У [9] розглянуто розсіяння частинки на магнітному полі безмежно довгого й тонкого соленоїда (ефект Ааронова–Бома) у просторі з алґеброю (3), показано калібрувальну інваріантність відповідного поля в лінійному наближені по θ, у цьому ж наближенні розв'язано відповідне рівняння Паулі.

Аналогічну алґебру (з точністю до зміни знака координатного комутатора) використано для узагальнення куперівського механізму спарювання на триплетний стан [10].

Алґебра (3) також виникає при квантуванні квазікласичної некомутативної моделі Березіна–Маринова для спіну 1/2 [11].

Пізніше (3) була узагальнена додаванням імпульсної некомутативності [12]:

$$[X_i, X_j] = i\theta^2\varepsilon_{ijk}s_k, \qquad [P_i, P_j] = i\kappa^2\varepsilon_{ijk}s_k,$$

$$[X_i, P_j] = i(\delta_{ij} + \kappa\theta\varepsilon_{ijk}s_k), \qquad [s_i, s_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}s_k, \qquad (4)$$

$$[X_i, s_j] = i\theta\varepsilon_{ijk}s_k, \qquad [P_i, s_j] = i\kappa\varepsilon_{ijk}s_k.$$

Для цієї алґебри, як і для (3) у [8], знайдено точно основний стан суперсиметричного розширення тривимірного гармонічного осцилятора.

Інший підхід ґрунтується на спробі зґенерувати релятивістську Лоренц-інваріантну спінову некомутативність. В [11] запропоновано нові координати $X^\mu = x^\mu + \theta W^\mu$, де $W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}S_{\nu\rho}p_\sigma$ — псевдовектор Паулі–Любанського, $S_{\nu\rho} = \frac{i}{2}\gamma_\nu\gamma_\rho$. Відповідна алґебра має вигляд:

$$[X^\mu, X^\nu] = i\theta\hbar\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}S_{\rho\sigma} - i\theta^2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}W_\rho P_\sigma, \qquad (5)$$

$$[X^\mu, P^\nu] = -i\hbar g^{\mu\nu}, \qquad [P^\mu, P^\nu] = 0,$$

$$[X^\mu, \gamma^\nu] = -\frac{i\theta}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\rho\gamma_\sigma.$$

У [13] для такої алґебри розглянуто рівняння Дірака, показано існування закону збереження модифікованого електричного струму, а також показано, що для елекрона в постійному магнітному полі (задача Ландау) некомутативність знімає виродження збуджених рівнів у другому порядку теорії збурень за параметром некомутативності.

У цій праці побудовано нерелятивістський аналог алґебри (5), показано, що в такій алґебрі наявна мінімальна довжина, а також знайдено точний розв'язок тривимірного гармонічного осцилятора. Зауважимо, що, на відміну від (3) та (4), для нашої алґебри просторовий осцилятор розв'язується точно.

II. АЛҐЕБРА

Побудуймо нерелятивістський варіант алґебри [11]. Для цього введімо тривимірний аналог вектора Паулі–Любанського:

$$W_i = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\sigma_j p_k = \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{p}\right]_i, \tag{6}$$

де σ_j — матриці Паулі. Тоді некомутативні координати та імпульси запишемо у вигляді

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \theta\mathbf{W} = \mathbf{r} + \frac{\theta}{4}[\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{p}] = \mathbf{r} + \frac{\theta}{2\hbar}[\mathbf{s}\times\mathbf{p}], \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}, \tag{7}$$

де $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ задовольняють недеформовану алґебру Гайзенберґа.

Зауважимо, що (7) є спіновим аналогом так званого зсуву Боппа (Bopp shift) для алґебри [8], але через некомутативність спінових множників біля імпульсів (на відміну від звичайного випадку числових констант в (1)) алґебра (7) містить ще доданок, пропорційний квадрату параметра некомутативності:

$$\begin{aligned}
&[X_i, X_j] = i\theta\varepsilon_{ijk}s_k + i\frac{\theta^2}{4\hbar}\varepsilon_{ijk}P_k(\mathbf{s},\mathbf{P}),\\
&[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [P_i, P_j] = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Для повноти алґебри доповнімо її комутаційними співвідношеннями для спінів

$$[s_i, s_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}s_k, \quad [X_i, s_j] = i\frac{\theta}{2}(P_j s_i - \delta_{ij}(\mathbf{s},\mathbf{P})). \tag{9}$$

Важливою рисою цієї алґебри є те, що некомутативні координати залишаються векторами, тобто існує інваріантність стосовно до поворотів системи координат, яка порушується для алґебри (1).

III. МІНІМАЛЬНА ДОВЖИНА

Піднесімо (7) до квадрата

$$\begin{aligned}
R^2 &= r^2 + \frac{\theta}{\hbar}\left(\mathbf{r}, [\mathbf{s}\times\mathbf{p}]\right) + \frac{\theta^2 p^2}{8}\\
&= r^2 - \frac{\theta}{\hbar}\left(\mathbf{s},\mathbf{L}\right) + \frac{\theta^2 p^2}{8}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Знайдімо власні значення цього оператора. Розділімо радіальну та кутові змінні $\Psi(r,\theta,\varphi) = \mathcal{R}(r)\psi_{j,l,m}(\theta,\varphi)$, де $\psi_{j,l,m}(\theta,\varphi)$ — сферичний спінор, $\mathcal{R}(r)$ — радіальна частина хвильової функції. Розділивши змінні та скориставшись операторною тотожністю $2(\mathbf{s},\mathbf{L}) = J^2 - L^2 - S^2$, де $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$, отримаємо рівняння на радіальну частину

$$\begin{aligned}
&\left(r^2 + \frac{\theta^2 p^2}{8} - \frac{\hbar}{2}\theta\big(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\big)\right)\mathcal{R}(r)\\
&= \lambda^2\mathcal{R}(r),
\end{aligned} \tag{11}$$

що є рівнянням радіального гармонічного осцилятора. Квантові числа пробігають значення $n, l = 0, 1, 2, \ldots$; $j = |l \pm 1/2|$. Власними значеннями такої задачі є

$$\begin{aligned}
\lambda^2 = &\frac{\hbar|\theta|}{\sqrt{2}}(2n + l + 3/2)\\
&- \frac{\hbar}{2}\theta\big(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\big).
\end{aligned} \tag{12}$$

Мінімальне значення $\lambda^2_{\min} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\hbar|\theta|$ досягається при $n = 0$, $j = 1/2$, $l = 0$ для $\theta > 0$ і $\lambda^2_{\min} = \frac{5-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\hbar|\theta|$ при $n = 0$, $j = 1/2$, $l = 1$ для $\theta < 0$. Оскільки середнє значення оператора фізичної величини не може бути меншим, ніж найменше власне значення цього оператора, то для довільного стану справедлива нерівність

$$\sqrt{\langle R^2\rangle} \geq \lambda_{\min}, \tag{13}$$

тобто в просторі з деформацією (8) існує мінімальна довжина в сенсі (13).

Зауважимо, що різна мінімальна довжина залежно від знака θ зумовлена тим фактом, що власні значення оператора $2\,(\mathbf{s},\mathbf{L})$ набувають усіх цілих чисел, за винятком -1 (в одиницях $\hbar^2$). Цей факт можна довести, переписавши доданок спін-орбітальної взаємодії з урахуванням залежності між квантовими числами $j = |l \pm 1/2|$: $j = 1/2$ для $l = 0$ та $j = l + \sigma$, $\sigma = \pm 1/2$ для $l \neq 0$.

Явну асиметрію λ^2 можна показати, переписавши (12) через квантові числа n, j σ:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2_{l=0} = \frac{\hbar|\theta|}{\sqrt{2}}(2n + 3/2);\\
&\lambda^2_{l\neq 0} = \frac{\hbar|\theta|}{\sqrt{2}}(2n + l + 3/2) - \hbar\theta\sigma(l + 1/2) + \frac{\hbar\theta}{4},
\end{aligned} \tag{14}$$

тут ми поклали $s(s+1) = 3/4$.

Власні функції (10) мають вигляд $\Psi(r,\varphi,\theta) = \mathcal{R}_{n,l}(r)\psi_{l,j,m}(\varphi,\theta)$, де $\psi_{l,j,m}(\varphi,\theta)$ — сферичний спінор [14, §24], а радіальна частина дорівнює

$$\mathcal{R}_{n,l}(r) = (-1)^n \left(\frac{m|\theta|}{\hbar}\right)^{3/4} \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+l+3/2)}} \rho^l e^{-\rho^2/2} L_n^{l+1/2}(\rho^2), \tag{15}$$

де $\rho = r\sqrt{\frac{m|\theta|}{\hbar}}$, а $L_n^{l+1/2}(\rho^2)$ — узагальнені поліноми Лаґерра.

IV. ГАРМОНІЧНИЙ ОСЦИЛЯТОР

На відміну від (3), в алґебрі (8) просторовий гармонічний осцилятор є точнорозв'язуваною задачею. Некомутативний просторовий осцилятор, ураховуючи всебічний аналіз і простоту розв'язків його аналога в комутативному просторі, може бути своєрідною лабораторією для дослідження впливу некомутативності на фізичні системи.

Гамільтоніан некомутативного осцилятора запишемо

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 R^2}{2} = \frac{p^2}{2m}\gamma^2 + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{m\omega^2\theta}{2\hbar}(\mathbf{s}, \mathbf{L}),$$
$$\gamma^2 = 1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{8}. \tag{16}$$

Розділяючи змінні, як у попередньому випадку, отримаємо спектр просторового осцилятора

$$E = \hbar\omega\gamma(2n + l + 3/2) - \frac{\hbar m\omega^2\theta}{4}\big(j(j+1) - l(l+1) - 3/4\big), \tag{17}$$

де $n, l = 0, 1, 2, \ldots;\ j = |l \pm 1/2|$.

Легко бачити, що некомутативність знімає виродження за квантовими числами j та l. Проте для певних значень $m\omega|\theta| > 1$, як буде показано далі, можливе випадкове виродження рівнів.

Основний стан при $\theta > 0$ відповідає квантовим числам $n = 0,\ l = 0,\ j = 1/2$, енерґія основного стану дорівнює

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega\gamma = \frac{3}{2}\hbar\omega\sqrt{1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{8}}. \tag{18}$$

При $\theta < 0$ картина стає дещо складнішою — набір квантових чисел, які реалізовують основний стан, залежить від частоти: існує критична частота $\omega_{\mathrm{cr}} = \frac{2\sqrt{2}}{m|\theta|}$, нижче від якої основний стан реалізовується набором квантових чисел $n = 0,\ l = 0,\ j = 1/2$ з енерґією $E_0^{(1)} = E_0$, вище від критичної частоти основний стан реалізовується набором $n = 0,\ l = 1,\ j = 1/2$ з енерґією

$$E_0^{(2)} = \frac{5}{2}\hbar\omega\sqrt{1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{8}} - \frac{\hbar m\omega^2|\theta|}{2}, \tag{19}$$

для критичної частоти, значення якої шукаємо з умови $E_0^{(1)}(m\omega_{\mathrm{cr}}|\theta|) = E_0^{(2)}(m\omega_{\mathrm{cr}}|\theta|)$, основний стан є двократно виродженим з енерґією

$$E_0^{\mathrm{cr}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\hbar\omega_{\mathrm{cr}} = \frac{6\hbar}{m|\theta|}. \tag{20}$$

Залежність енерґії найнижчих енерґетичних рівнів від $m\omega|\theta|$ зображено на рис. 1.

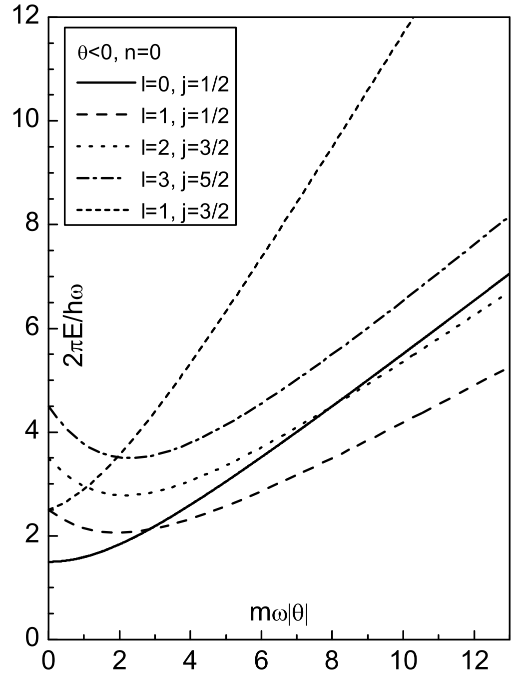

Рис. 1. Залежність енерґії рівнів від $m\omega|\theta|$ для деяких наборів квантових чисел.

Власні функції $\Psi(r, \varphi, \theta) = \mathcal{R}_{n,l}(r)\psi_{l,j,m}(\varphi, \theta)$, де кутова частина є відповідним сферичним спінором, а радіальна має вигляд

$$\mathcal{R}_{n,l}(r) = (-1)^n \left(\frac{m\omega}{\hbar}\gamma\right)^{3/4} \times \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+l+3/2)}} \rho^l e^{-\rho^2/2} L_n^{l+1/2}(\rho^2), \tag{21}$$

де $\rho = r\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}\gamma}$.

Легко бачити, що при спрямуванні $\theta \to 0,\ \gamma \to 1$ отримуємо вирази для недеформованого осцилятора.

При великих частотах чи великих масах ($m\omega \gg 1/|\theta|,\ \gamma \approx 8^{-1/4} m\omega|\theta|$) енерґія осцилятора дорівнює

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2\lambda^2, \tag{22}$$

тобто формально збігається з класичним виразом для енерґії гармонічного осцилятора з різницею, що λ^2 квантується згідно з (14). Енерґія основного стану при цьому $E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2\lambda^2_{\min}$.

V. ВИСНОВКИ

У цій праці ми ввели нерелятивістський аналог некомутативної Лоренц-коваріантної алґебри [11] із змішуванням координат та спінів. У лінійному наближенні за параметром некомутативності координатний комутатор для нашої алґебри збігається з нерелятивістською спіновою некомутативністю, запропонованою в [8].

Для досліджуваної алґебри знайдено мінімальну довжину $\sqrt{\langle R^2\rangle} \geq \lambda_{\min}$, яка залежно від знака θ дорівнює

$$\lambda_{\min} = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\hbar|\theta|\right)^{1/2}, \quad \theta > 0;$$
$$\lambda_{\min} = \left(\frac{5-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\hbar|\theta|\right)^{1/2}, \quad \theta < 0.$$

У межах запропонованої алґебри точно розв'язано тривимірний гармонічний осцилятор. Показано, що некомутативність знімає виродження за орбітальним l (вірніше сумі $2n+l$) та спіновим квантовими числами. При певних, достатньо великих, значеннях $m\omega|\theta|$ деякі рівні є випадково виродженими, зокрема для $\theta < 0$ і $m\omega|\theta| = \sqrt{8}$ основний рівень є двократно виродженим. В асимптотиці $m\omega \gg 1/|\theta|$ енерґія основного рівня $E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2\lambda_{\min}^2$.

VI. ПОДЯКИ

Автор висловлює вдячність своєму науковому керівникові докторові фізико-математичних наук професорові Ткачукові В. М. за формулювання ідеї цього дослідження та обговорення результатів, а також колективу кафедри теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка за проведені дискусії.

[1] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71** 38 (1947); Phys. Rev. **72**, 68 (1947).
[2] R. Peierls, Z. Phys. **80**, 763 (1933).
[3] N. Seiberg, E. Witten, J. High Energy Phys. **09**, 032 (1999).
[4] A. H. Chamseddine, A. Connes, Fortschr. Phys. **58**, 553 (2010); preprint arXiv:1004.0464 [hep-th] (2010).
[5] F. Ardalan, H. Arfaei, M. M. Sheikh-Jabbari, J. High Energy Phys. **02**, 016 (1999).
[6] S.-C. Chu, P.-M. Ho, Nucl. Phys. B **550**, 151 (1999).
[7] V. G. Kupriyanov, preprint arXiv:1204.4823 [math-ph] (2012).
[8] H. Falomir, J. Gamboa, J. López-Sarrión, F. Méndez, P. A. G. Pisani, Phys. Lett. B **680**, 384 (2009).
[9] Ashok Das, H. Falomir, M. Nieto, J. Gamboa, F. Méndez, Phys. Rev. D **84**, 045002 (2011).
[10] Ashok Das, J. Gamboa, F. Méndez, F. Torres, Phys. Lett. A **375**, 1756 (2011).
[11] M. Gomes, V. G. Kupriyanov, A. J. da Silva, Phys. Rev. D **81**, 085024 (2010).
[12] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Méndez, J. C. Rojas, Phys. Rev. D **85**, 025009 (2012); preprint arXiv:1111.0511v2 [hep-th] (2011).
[13] A. F. Ferrari, M. Gomes, V. G. Kupriyanov, C. A. Stechhahn, Phys. Lett. B **718**, 1475 (2013).
[14] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1989).

EXACT SOLUTION OF HARMONICAL OSCILLATOR IN SPACE WITH SPIN NONCOMMUTATIVITY

V. M. Vasyuta
Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,
12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine, waswasiuta@gmail.com

A new model of spin noncommutativity is proposed and its connection with the existing algebras is found. It is shown that in the proposed algebra minimal length exists, and its value depends on the sign of parameter of noncommutativity. The 3D harmonical oscillator is solved exactly, both the spectrum and eigenfunctions of the oscillator are obtained and analyzed.