ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 20, № 1/2 (2016) 1001(5 с.)

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 20, No. 1/2 (2016) 1001(5 p.)

МІНІМАЛЬНА ДОВЖИНА, ПЛОЩА ТА ОБ'ЄМ У ПРОСТОРІ З НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ

Х. П. Гнатенко, В. М. Ткачук
Кафедра теоретичної фізики,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Драгоманова, 12, 79005 Львів, Україна,
e-mail: khrystyna.gnatenko@gmail.com, e-mail: voltkachuk@gmail.com

(Отримано 23 грудня 2015 р., в остаточному вигляді — 27 квітня 2016 р.)

Ми вивчаємо простір, у якому просторові координати не комутують. Розглядаємо некомутативний простір канонічного типу. Досліджуємо мінімальну довжину, площу та об'єм у некомутативному просторі канонічного типу з збереженою сферичною симетрією. Показано, що у сферично-симетричному некомутативному просторі існує мінімальна довжина, проте площа та об'єм не є обмеженими.

Ключові слова: некомутативний простір, мінімальна довжина, сферична симетрія.

PACS number(s): 02.40.Gh, 03.65.−w

I. ВСТУП

Ідея про некомутативність координат має тривалу історію. Уперше її запропонував Гайзенберґ, згодом математично оформив її Снайдер у своїй публікації [1]. Останні роки велику увагу приділяють вивченню властивостей простору з некомутативними координатами, що пов'язано з розвитком теорії струн та квантової ґравітації (див., для прикладу, [2, 3]).

Некомутативний простір характеризується такими співвідношеннями для операторів координат та імпульсів:

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{1}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{2}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{3}$$

де θ_{ij} — параметр некомутативності. У випадку канонічної некомутативності координат θ_{ij} є елементами сталої антисиметричної матриці.

Зауважимо, що рух електричного заряду в сильному зовнішньому магнітному полі B можна описати за допомогою некомутативності координат. Оператори координат зарядженої частинки, що рухається на площині (X, Y) у сильному однорідному магнітному полі B, задовольняють співвідношення:

$$[X, Y] = -i\hbar\frac{c}{eB}, \tag{4}$$

де c — швидкість світла, e — заряд частинки (див., для прикладу, [4]).

Багато квантових та класичних задач досліджували в некомутативному просторі (1)–(3). Серед них атом водню (див., для прикладу, [5–12]), задача Ландау (див., для прикладу, [13–17]), двовимірні квантові системи в центральному потенціалі [18], частинка в ґравітаційному потенціалі [19, 20], система багатьох частинок у ґравітаційному полі та принцип еквівалентності [21, 22], оператор площі в некомутативному просторі [23] та багато інших.

У цій статті ми розглядаємо мінімальну довжину, площу та об'єм у некомутативному просторі (1)–(3). Зауважимо, що у тривимірному просторі з некомутативністю координат канонічного типу виникає проблема порушення сферичної симетрії (див., для прикладу, [5, 24, 25]). У нашій статті [26] побудовано некомутативну алґебру, яка еквівалентна алґебрі канонічного типу та є сферично-симетричною. У цій статті ми досліджуємо мінімальну довжину, площу та об'єм у сферично-симетричному некомутативному просторі, запропонованому у [26].

У розділі II розглядаємо мінімальну довжину, площу та об'єм у просторі з канонічною некомутативністю координат. У розділі III висвітлюємо проблему порушення сферичної симетрії в некомутативному просторі канонічного типу. У цьому ж розділі досліджуємо мінімальну довжину, площу та об'єм у некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією. Висновки подано в розділі IV.

II. МІНІМАЛЬНА ДОВЖИНА, ПЛОЩА ТА ОБ'ЄМ У ПРОСТОРІ З КАНОНІЧНОЮ НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ

У некомутативному просторі (1)–(3), враховуючи те, що переставні співвідношення для координат мають вигляд (1), можемо записати такі співвідношення невизначеностей:

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta X_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \theta_{ij}^2}{4}. \tag{5}$$

Розгляньмо оператор квадрата довжини $\mathbf{R}^2$, який визначається як

$$\mathbf{R}^2 = \sum_i X_i^2, \tag{6}$$

де координати X_i задовольняють співвідношення (1). Враховуючи (6), маємо

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle = \langle \Delta X_1^2 \rangle + \langle \Delta X_2^2 \rangle + \langle \Delta X_3^2 \rangle. \tag{7}$$

Знайдемо обмеження на довжину в некомутативному просторі (1)–(3). Із цією метою піднесемо (7) до квадрата. Зауважимо, що справедливою є така нерівність:

$$\langle\Delta\mathbf{R}^2\rangle^2 \geq 2\langle\Delta X_1^2\rangle\langle\Delta X_2^2\rangle + 2\langle\Delta X_2^2\rangle\langle\Delta X_3^2\rangle + 2\langle\Delta X_3^2\rangle\langle\Delta X_1^2\rangle. \tag{8}$$

Із (5) отримаємо:

$$\langle\Delta\mathbf{R}^2\rangle^2 \geq \frac{\hbar^2}{2}\left(\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2\right). \tag{9}$$

Отже, для середньоквадратичного відхилення оператора $\mathbf{R}$ справедливою є нерівність:

$$\langle\Delta\mathbf{R}^2\rangle \geq \frac{\hbar}{2^{\frac{1}{2}}}\left(\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Також із (9) отримаємо обмеження на довжину в некомутативному просторі

$$\Delta R \geq \frac{\hbar^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}}\left(\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{11}$$

де ми використали таке позначення: $\Delta R = \sqrt{\langle\Delta\mathbf{R}^2\rangle}$.

Розгляньмо обмеження на площу та об'єм у некомутативному просторі (1)-(3). Визначимо ΔX_i як

$$\Delta X_i = \sqrt{\langle\Delta X_i^2\rangle}. \tag{12}$$

Беручи до уваги (5), можемо легко отримати, що для $\Delta X_i \Delta X_j$, що відповідає площі, справедливою є така нерівність:

$$\Delta X_i \Delta X_j \geq \frac{\hbar|\theta_{ij}|}{2}. \tag{13}$$

Зауважимо, що оскільки в загальному випадку елементи матриці некомутативності можуть мати різні значення ($\theta_{12} \neq \theta_{23} \neq \theta_{31}$), із (13) можемо зробити висновок, що некомутативність канонічного типу (1) зумовлює анізотропію площі.

Знайдімо мінімальне значення $\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$, що відповідає об'єму у просторі з канонічною некомутативністю координат. Розписавши (13)

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{\hbar|\theta_{12}|}{2}, \tag{14}$$

$$\Delta X_2 \Delta X_3 \geq \frac{\hbar|\theta_{23}|}{2}, \tag{15}$$

$$\Delta X_3 \Delta X_1 \geq \frac{\hbar|\theta_{31}|}{2} \tag{16}$$

та перемноживши отримані нерівності (14), (15), (16), маємо

$$(\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3)^2 \geq \frac{\hbar^3}{8}|\theta_{12}\theta_{23}\theta_{31}|. \tag{17}$$

Остаточно із (17) отримаємо

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3 \geq \frac{\hbar^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}|\theta_{12}\theta_{23}\theta_{31}|^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Отже, у тривимірному просторі з некомутативністю координат (1)–(3) наявні обмеження знизу на довжину, площу, об'єм. Мінімальна довжина, площа та об'єм у такому просторі визначаються елементами матриці некомутативності відповідно до нерівностей (10), (13), (18).

III. МІНІМАЛЬНА ДОВЖИНА, ПЛОЩА ТА ОБ'ЄМ У НЕКОМУТАТИВНОМУ ПРОСТОРІ З ВІДНОВЛЕНОЮ СФЕРИЧНОЮ СИМЕТРІЄЮ

У тривимірному просторі з канонічною некомутативністю координат наявна проблема порушення сферичної симетрії. Щоб відновити сферичну симетрію в некомутативному просторі, у статті [26] ми запропонували будувати тензор некомутативності за допомогою додаткових координат, які визначаються сферично-симетричною системою. Для простоти ми розглянули випадок, коли додаткові координати a_i, b_i описуються гармонічним осцилятором. Як наслідок, визначивши тензор некомутативності як

$$\theta_{ij} = \frac{\alpha}{\hbar}(a_i b_j - a_j b_i), \tag{19}$$

де α — безрозмірна константа, було побудовано таку сферично-симетричну алґебру:

$$[X_i, X_j] = i\alpha(a_i b_j - a_j b_i), \tag{20}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{21}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{22}$$

Додаткові координати a_i, b_i визначаються гармонічним осцилятором

$$H_{\text{osc}} = \frac{(p^a)^2}{2m_{\text{osc}}} + \frac{(p^b)^2}{2m_{\text{osc}}} + \frac{m_{\text{osc}}\omega^2 a^2}{2} + \frac{m_{\text{osc}}\omega^2 b^2}{2} \tag{23}$$

із параметрами m_{osc} та ω. Важається, що величина параметра некомутативності є планківських масштабів. Тому покладемо

$$\sqrt{\frac{\hbar}{m_{\text{osc}}\omega}} = l_{\text{P}}, \tag{24}$$

де l_{P} — довжина Планка. Ми вивчаємо випадок, коли частота осцилятора ω є великою [26, 27]. Як наслідок відстань між його енерґетичними рівнями велика також. Тому гармонічний осцилятор, який перебуває в основному стані, залишається в ньому.

Зауважимо, що координати a_i, b_i комутують

$$[a_i, a_j] = 0, \tag{25}$$

$$[b_i, b_j] = 0, \tag{26}$$

$$[a_i, b_j] = 0. \tag{27}$$

Також для координат a_i, b_i та імпульсів p_i^a, p_i^b справедливими є такі комутаційні співвідношення: $[a_i, p_j^a] = i\hbar\delta_{ij}$, $[b_i, b_j] = 0$, $[b_i, p_j^b] = i\hbar\delta_{ij}$, $[a_i, p_j^b] = [b_i, p_j^a] = [p_i^a, p_j^b] = 0$. Важливо, що координати a_i, b_i комутують з X_i та P_i. Як наслідок тензор некомутативності θ_{ij}, побудований за допомогою цих координат (19), також комутує з X_i та P_i. Отже, оператори X_i, P_i та θ_{ij} задовольняють такі самі комутаційні співвідношення, як і в випадку алґебри з канонічною некомутативністю координат ($\theta_{ij} = \text{const}$). У цьому сенсі алґебра (20)–(22) еквівалентна алґебрі канонічного типу (1)–(3) та є сферично-симетричною.

Зауважимо, що оператор повороту у сферично-симетричному некомутативному просторі (20)–(22) має вигляд

$$U(\varphi) = e^{\frac{i}{\hbar}\varphi(\mathbf{n}\cdot\tilde{\mathbf{L}})}, \tag{28}$$

де $\tilde{\mathbf{L}}$ — повний момент кількості руху

$$\tilde{\mathbf{L}} = [\mathbf{r}\times\mathbf{p}] + [\mathbf{a}\times\mathbf{p}^a] + [\mathbf{b}\times\mathbf{p}^b]. \tag{29}$$

Легко бачити, що комутаційні співвідношення (20)–(22) не зміняться після повороту $X_i' = U(\varphi)X_iU^+(\varphi)$, $a_i' = U(\varphi)a_iU^+(\varphi)$, $b_i' = U(\varphi)b_iU^+(\varphi)$. Ми отримаємо

$$[X_i', X_j'] = i\alpha(a_i'b_j' - a_j'b_i'). \tag{30}$$

Зауважимо, що оператор $\tilde{\mathbf{L}}$ задовольняє такі самі співвідношення, як і оператор моменту кількості руху у звичайному просторі ($\theta_{ij} = 0$), а саме: $[X_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}X_k$, $[P_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}P_k$, $[a_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}a_k$, $[p_i^a, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}p_k^a$, $[b_i, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}b_k$, $[p_i^b, \tilde{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}p_k^b$ [26].

Представимо координати X_i, які не комутують, та імпульси P_i через координати x_i та імпульси p_i, що задовольняють звичні комутаційні співвідношення

$$X_i = x_i + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]_i, \tag{31}$$

$$P_i = p_i, \tag{32}$$

де

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\alpha}{\hbar}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]. \tag{33}$$

Для координат x_i та імпульсів p_i виконується

$$[x_i, x_j] = 0, \tag{34}$$

$$[p_i, p_j] = 0, \tag{35}$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{36}$$

також $[x_i, a_j] = 0$, $[x_i, p_j^a] = 0$, $[p_i, a_j] = 0$, $[p_i, p_j^a] = 0$.

Зауважимо, що додаткові координати a_i, b_i, які формують тензор некомутативності, можна трактувати як внутрішні координати частинки. Квантові флуктуації цих координат приводять до неточковості частинки.

Розгляньмо середньоквадратичне відхилення оператора довжини у сферично-симетричному некомутативному просторі

$$\langle\Delta\mathbf{R}^2\rangle = \langle\Delta X_1^2\rangle + \langle\Delta X_2^2\rangle + \langle\Delta X_3^2\rangle. \tag{37}$$

Перейдімо до координат та імпульсів, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення. Використавши (31) та (32), отримаємо:

$$\langle\Delta\mathbf{R}^2\rangle = \langle x^2 - (\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}) + \frac{1}{4}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]^2\rangle - \sum_i\langle x_i + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p}]_i\rangle^2, \tag{38}$$

де $\mathbf{L} = [\mathbf{x}\times\mathbf{p}]$. Зважаючи на те, що для побудови сферично-симетричної некомутативної алґебри ми означили тензор некомутативності (19) за допомогою додаткових координат, при дослідженні фізичної системи із гамільтоніаном H_s у некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією необхідно розглядати повний гамільтоніан H із урахуванням доданків, що відповідають гармонічному осцилятору

$$H = H_s + H_{\text{osc}}, \tag{39}$$

де H_{osc} визначається із (23) [26]. Отже, обчислюючи середні у (38), необхідно розглядати хвильові функції, що відповідають повному гамільтоніану (39).

Розгляньмо випадок, коли хвильові функції, що відповідають гамільтоніану (39), можна записати в такому вигляді:

$$\psi(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{b}) = \psi(\mathbf{x})\psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a})\psi^b_{0,0,0}(\mathbf{b}), \tag{40}$$

де $\psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a})$, $\psi^b_{0,0,0}(\mathbf{b})$ — добре відомі хвильові функції гармонічного осцилятора (23) в основному стані.

Зауважимо, що

$$\langle\psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a})\psi^b_{0,0,0}(\mathbf{b})|\theta_i|\psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a})\psi^b_{0,0,0}(\mathbf{b})\rangle = 0. \tag{41}$$

Отже, врахувавши (41), маємо

$$\langle\Delta\mathbf{R}^2\rangle = \langle\Delta\mathbf{r}^2\rangle + \frac{1}{6}\langle\theta^2\rangle_{ab}\langle p^2\rangle, \tag{42}$$

де ми використали таке позначення:

$$\langle...\rangle_{ab} = \langle\psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a})\psi^b_{0,0,0}(\mathbf{b})|...|\psi^a_{0,0,0}(\mathbf{a})\psi^b_{0,0,0}(\mathbf{b})\rangle, \tag{43}$$

$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Зауважимо, що у правій частині рівності (42) маємо середнє від оператора

$$r^2 + \frac{\langle\theta^2\rangle_{ab}}{6}p^2, \tag{44}$$

який відповідає гамільтоніану гармонічного осцилятора з масою $3/\langle\theta^2\rangle_{ab}$ та частотою $\sqrt{2\langle\theta^2\rangle_{ab}}/\sqrt{3}$. Оператори x_i, p_i задовольняють звичні комутаційні співвідношення (34), (35), (36). Отже, енерґія основного стану осцилятора (44) має вигляд:

$$E_{0,0,0} = \sqrt{\frac{3\hbar^2\langle\theta^2\rangle_{ab}}{2}}. \tag{45}$$

Враховуючи (45), можемо записати

$$\langle\Delta\mathbf{R}^2\rangle \ge \sqrt{\frac{3\hbar^2\langle\theta^2\rangle_{ab}}{2}} - \langle\mathbf{r}\rangle^2 \ge \sqrt{\frac{3\hbar^2\langle\theta^2\rangle_{ab}}{2}}, \tag{46}$$

де $\langle\mathbf{r}\rangle = 0$.

Отже, у сферично-симетричному некомутативному просторі мінімальна довжина визначається з такої нерівності:

$$\Delta R \geq \left(\frac{3\hbar^2\langle\theta^2\rangle_{ab}}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (47)$$

де

$$\langle\theta^2\rangle_{ab} = \langle\theta^2\rangle = \frac{3\alpha^2 l_P^4}{2\hbar^2}. \quad (48)$$

Обчислюючи $\langle\theta^2\rangle_{ab}$, ми взяли до уваги (24), (33). Врахувавши (49) та (48), можемо записати таку нерівність:

$$\Delta R \geq \sqrt{\frac{3\alpha}{2}} l_{\mathrm{P}}. \quad (49)$$

Дослідимо також $\Delta X_i \Delta X_j$, що відповідає площі, та $\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$, що відповідає об'єму, у сферично-симетричному некомутативному просторі. Врахувавши комутаційні співвідношення (20), можемо записати

$$\langle\Delta X_i^2\rangle\langle\Delta X_j^2\rangle \geq \frac{\hbar^2\langle\theta_{ij}\rangle^2}{4}. \quad (50)$$

Зауважимо, що усереднивши за хвильовими функціями осцилятора (23) та врахувавши (41), маємо

$$\langle\Delta X_i^2\rangle\langle\Delta X_j^2\rangle \geq 0, \quad (51)$$

звідки

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq 0. \quad (52)$$

Із (52) можемо легко отримати

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3 \geq 0. \quad (53)$$

Отже, відповідно до нерівностей (52), (53) площа та об'єм можуть набувати як завгодно малих значень у сферично-симетричному некомутативному просторі (20)–(22). Це пов'язано з тим, що в такому просторі $\langle\theta_{ij}\rangle = 0$. Зауважимо, що в некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією (20)–(22) є обмеження на довжину. Мінімальна довжина в цьому просторі визначається відповідно до нерівності (49) та залежить від $\langle\theta^2\rangle$.

IV. ВИСНОВОК

Ми розглянули тривимірний простір із канонічною некомутативністю координат (1)–(3). Показано, що мінімальна довжина, площа та об'єм у некомутативному просторі визначаються елементами матриці некомутативності θ_{ij} відповідно до нерівностей (10), (13), (18). Із нерівності (13) зроблено висновок, що некомутативність канонічного типу (1) зумовлює анізотропію площі.

Важливо зазначити, що у тривимірному просторі з канонічною некомутативністю координат існує проблема порушення сферичної симетрії.

Ми розглянули некомутативну алґебру, запропоновану у [26], яка еквівалентна алґебрі канонічного типу та є сферично-симетричною (20)–(22), і дослідили мінімальну довжину у сферично-симетричному некомутативному просторі. Знайдено, що мінімальна довжина в некомутативному просторі з відновленою сферичною симетрією визначається $\langle\theta^2\rangle$, що випливає з нерівності (49).

Також ми розглянули $\Delta X_i \Delta X_j$ та $\Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$, що відповідають площі та об'єму в некомутативному просторі (20)–(22). Показано, що у сферично-симетричному некомутативному просторі, на відміну від простору з некомутативністю канонічного типу (1)–(3), площа та об'єм можуть набувати як завгодно малих значень (52), (53).

Подяки. Публікація містить результати досліджень, проведених за ґрантової підтримки ДФФД України (конкурс Ф-64, № держреєстрації 0116U005055) та МОН України (тема ФФ-30Ф, № держреєстрації 0116U001539).

[1] H. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
[2] N. Seiberg, E. Witten, J. High Energy Phys. **9909**, 032 (1999).
[3] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994).
[4] R. Jackiw, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **127**, 53 (2004).
[5] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. **86**, 2716 (2001).
[6] Pei-Ming Ho, Hsien-Chung Kao, Phys. Rev. Lett. **88**, 151602 (2002).
[7] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Eur. Phys. J. C **36**, 251 (2004).
[8] N. Chair, M. A. Dalabeeh, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 1553 (2005).
[9] A. Stern, Phys. Rev. Lett. **100**, 061601 (2008).
[10] S. Zaim, L. Khodja, Y. Delenda, Int. J. Mod. Phys. A **26**, 4133 (2011).
[11] T.C. Adorno, M.C. Baldiotti, M. Chaichian, D. M. Gitman, A. Tureanu, Phys. Lett. B **682**, 235 (2009).
[12] L. Khodja, S. Zaim, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1250100 (2012).
[13] V. P. Nair, A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B **505**, 267 (2001).
[14] S. Bellucci, A. Nersessian, C. Sochichiu, Phys. Lett. B **522**, 345 (2001).
[15] O. F. Dayi, L. T. Kelleyane, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1937 (2002).
[16] Kang Li, Xiao-Hua Cao , Wang Dong-Yan, Chin. Phys. **15**, 2236 (2006).
[17] S. Dulat, K. Li, Chin. Phys. C **32**, 92 (2008).
[18] J. Gamboa, M. Loewe, J. C. Rojas, Phys. Rev. D **64**, 067901 (2001).
[19] J. M. Romero, J. D. Vergara, Mod. Phys. Lett. A **18**, 1673 (2003).

[20] B. Mirza, M. Dehghani, Commun. Theor. Phys. **42**, 183 (2004).
[21] Kh. P. Gnatenko, Phys. Lett. A **377**, 3061 (2013).
[22] Kh. P. Gnatenko, J. Phys. Stud. **17**, 4001 (2013).
[23] J. M. Romero, J. A. Santiago, J. D. Vergara, Phys. Rev. D **68**, 067503 (2003).
[24] A. P. Balachandran, P. Padmanabhan, J. High Energy Phys. **1012**, 001 (2010).
[25] V. G. Kupriyanov, Fortschr. Phys. **62**, 881 (2014).
[26] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **378**, 3509 (2014).
[27] Kh. P. Gnatenko, Yu. S. Krynytskyi, V. M. Tkachuk, Mod. Phys. Lett. A **30**, 1550033 (2015).

MINIMAL LENGTH, AREA, AND VOLUME IN A SPACE WITH NONCOMMUTATIVITY OF COORDINATES

Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk
Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,
12, Drahomanov St., Lviv, UA–79005, Ukraine

We study a space in which spatial coordinates do not commute. We consider a noncommutative space of the canonical type characterised by the constant antisymmetric matrix of noncommutativity. Length, area, and volume are limited below in this space. The corresponding minimal values are determined by the elements of the matrix of noncommutativity. We examine the minimal length, area, and volume in a noncommutative space of the canonical type with the preserved rotational symmetry which has been proposed in our previous paper [Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **378**, 3509 (2014)]. The corresponding rotationally invariant noncommutative algebra is constructed with the help of the generalization of the parameter of noncommutativity to a tensor. The latter is constructed with the help of additional coordinates that are governed by a rotationally symmetric system. It is shown that in the rotationally invariant noncommutative space there is a minimal length which is determined by the mean value of the tensor of noncommutativity. On the contrast to the canonical version of noncommutativity in the rotationally invariant noncommutative space the area and volume are not constrained.