JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 22, No. 1 (2018) 1001(6 p.)

# РУХ ЧАСТИНКИ У ҐРАВІТАЦІЙНОМУ ПОЛІ У СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНОМУ НЕКОМУТАТИВНОМУ ПРОСТОРІ КАНОНІЧНОГО ТИПУ ТА СЛАБКИЙ ПРИНЦИП ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Х. П. Гнатенко, О. О. Морозко, Ю. С. Криницький
*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
*кафедра теоретичної фізики, вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна*
*e-mail: khrystyna.gnatenko@gmail.com, yurikryn@gmail.com*

(Отримано 26 січня 2018 р.; в остаточному вигляді — 28 лютого 2018 р.)

Досліджено вплив некомутативності координат на квантові та класичні рівняння руху частинки в ґравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу з точністю до другого порядку за параметром некомутативності. Розглянуто слабкий принцип еквівалентності. Ми показали, що коли тензор координатної некомутативності є обернено пропорційним до маси, то слабкий принцип еквівалентності зберігається у сферично-симетричному некомутативному просторі.

**Ключові слова:** принцип еквівалентності, тензор некомутативності, сферична симетрія.

DOI: https://doi.org/10.30970/jps.22.1001

PACS number(s): 02.40.Gh, 04.20.Cv

## I. ВСТУП

Квантований простір може бути реалізованим на основі ідеї про те, що комутаційні співвідношення для операторів координат та операторів імпульсів є деформованими з параметрами деформації порядку планківських масштабів. Останніми роками багато систем досліджувалися у просторі з модифікованими комутаційними співвідношеннями. Серед них, для прикладу, гармонічний осцилятор [1–10], атом водню [6, 11–27], задача Ландау [28–31], частинка у ґравітаційній квантовій ямі [32, 33], багаточастинкові системи [6, 10, 11, 34–39] та інші.

Некомутативний простір канонічного типу характеризується такими комутаційними співвідношеннями:

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{1}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{2}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{3}$$

де $\theta_{ij}$ — параметри координатної некомутативності (елементи сталої антисиметричної матриці). Величина цих параметрів визначає мінімальну довжину, площу та об'єм у такому просторі [40].

Відомою проблемою у просторі (1)–(3) є проблема порушення сферичної симетрії. У зв'язку з цим багато робіт присвячено побудові сферично-симетричної некомутативної алґебри, вивченню фізичних систем у сферично-симетричному некомутативному просторі (див., для прикладу, роботи [21, 22, 41–50] та посилання у них).

У працях [21, 22] запропоновано будувати сферично-симетричну некомутативну алґебру

$$[X_i, X_j] = i\alpha l_{\mathrm{P}}^2 \sum_k \varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k, \tag{4}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{5}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{6}$$

узагальнивши параметр некомутативності та розглянувши тензор некомутативності, визначений як

$$\theta_{ij} = \frac{\alpha l_{\mathrm{P}}^2}{\hbar}\sum_k \varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k, \tag{7}$$

тут $\alpha$ — безрозмірна константа, $l_{\mathrm{P}}$ — довжина Планка. Ми розглядаємо випадок, коли у класичній границі маємо

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{\alpha}{\hbar} = \alpha' = \mathrm{const}. \tag{8}$$

Додаткові координати $\tilde{a}_i$ описуються гармонічним осцилятором

$$H_{\mathrm{osc}}^a = \hbar\omega_{\mathrm{osc}}\left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{2}\right) \tag{9}$$

з великою частотою $\omega_{\mathrm{osc}}$ та $\sqrt{\hbar/m_{\mathrm{osc}}\omega_{\mathrm{osc}}} = l_{\mathrm{P}}$, де $l_{\mathrm{P}}$ — довжина Планка [21]. Зважаючи на це, відстань між енергетичними рівнями осцилятора є великою та осцилятор перебуває в основному стані.

Для координат $\tilde{a}_i$ та імпульсів $\tilde{p}_i^a$ виконуються звичні комутаційні співвідношення $[\tilde{a}_i, \tilde{a}_j] = [\tilde{p}_i^a, \tilde{p}_j^a] = 0$, $[\tilde{a}_i, \tilde{p}_j^a] = i\delta_{ij}$. Важливо, що $[\tilde{a}_i, X_j] = [\tilde{a}_i, P_j] = 0$, звідси випливає, що тензор координатної некомутативності комутує з координатами та імпульсами $[\theta_{ij}, X_k] = [\theta_{ij}, P_k] = 0$. Отже, алґебра (4)–(6) еквівалентна до алґебри канонічного типу та є сферично-симетричною [21].

У цій праці розглянуто вплив некомутативності на рух частинки у ґравітаційному полі в некомутативному просторі канонічного типу зі збереженою сферичною симетрією. У класичному та квантовому випадках досліджено залежність рівнянь руху частинки від її маси та розглянуто принцип еквівалентності.

Зазначимо, що проблему порушення принципу еквівалентності, зумовлену некомутативністю координат, досліджували в працях [34, 35, 51, 52]. У статті [34] запропоновано умову на параметр некомутативності, за якої відновлюється слабкий принцип еквівалентності у двовимірному некомутативному просторі канонічного типу. У роботі [51] знайдено точно спектр частинки в однорідному ґравітаційному полі у сферично-симетричному некомутавному просторі. На основі отриманого результату запропоновано шлях для відновлення слабкого принципу еквівалентності.

У цій статті ми досліджуємо виконання слабкого принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу в неоднорідному ґравітаційному полі та знаходимо умову на тензор некомутативності, за якої цей принцип відновлюється. У ширшому контексті, аналізуючи причини, що можуть призвести до порушення слабкого принципу еквівалентності, звертають увагу на вплив ґравітаційних ефектів $[n, n+1]$ [53, 54].

У другому розділі статті знаходимо вираз для гамільтоніана частинки в ґравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі з точністю до другого порядку за параметром некомутативності. Третій розділ присвячено дослідженню залежності рівнянь руху частинки у ґравітаційному полі від її маси, відновленню принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі. Висновки подано в четвертому розділі.

## II. ГАМІЛЬТОНІАН ЧАСТИНКИ У ҐРАВІТАЦІЙНОМУ ПОЛІ У СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ КАНОНІЧНОГО ТИПУ

У сферично-симетричному просторі канонічного типу (4)–(6), зважаючи на те, що тензор некомутативності означається за допомогою додаткових координат, необхідно розглядати повний гамільтоніан, визначений як

$$H = H_{\mathrm{s}} + H^a_{\mathrm{osc}}, \tag{10}$$

де $H_{\mathrm{s}}$ — гамільтоніан системи, $H^a_{\mathrm{osc}}$ — гамільтоніан осцилятора (9).

Розгляньмо частинку масою $m$ у ґравітаційному полі тіла масою $M$. Маємо

$$H_{\mathrm{s}} = \frac{P^2}{2m} - \frac{GMm}{R}, \tag{11}$$

де $R = \sqrt{\sum_i X_i^2}$, координати $X_i$ задовольняють комутаційні співвідношення (4) та можуть бути представлені як

$$X_i = x_i + \frac{1}{2}\sum_j \theta_{ij} p_j = x_i + \frac{\alpha l_{\mathrm{P}}^2}{2\hbar}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}]_i, \tag{12}$$

тут $p_i = P_i$. Для координат та імпульсів $x_i$, $p_i$ виконуються звичні комутаційні співвідношення $[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$, $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$. Використавши представлення, можемо записати:

$$R = \sqrt{r^2 - \frac{\alpha l_{\mathrm{P}}^2}{\hbar}(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{L}) + \frac{\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{4\hbar^2}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}]^2}, \tag{13}$$

де $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. З точністю до другого порядку за $\alpha l_{\mathrm{P}}^2/\hbar$ маємо

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{\alpha l_{\mathrm{P}}^2}{2\hbar r^3}(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{L}) + \frac{3\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{8\hbar^2 r^5}(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{L})^2 - \frac{\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{16\hbar^2}\left(\frac{1}{r^2}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}]^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{r}]^2\right). \tag{14}$$

Отже, з точністю до другого порядку за параметром некомутативності гамільтоніан частинки у ґравітаційному полі в некомутативному просторі має такий вигляд:

$$H_{\mathrm{s}} = \frac{p^2}{2m} - \frac{GMm}{r} - \frac{GMm\alpha l_{\mathrm{P}}^2}{2\hbar r^3}(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{L}) - \frac{3GMm\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{8\hbar^2 r^5}(\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{L})^2 + \frac{GMm\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{16\hbar^2}\left(\frac{1}{r^2}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{p}]^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\tilde{\mathbf{a}} \times \mathbf{r}]^2\right). \tag{15}$$

Перепишімо гамільтоніан (10) як

$$H = H_0 + \Delta H, \tag{16}$$

де

$$H_0 = \langle H_{\mathrm{s}} \rangle_a + H^a_{\mathrm{osc}} \tag{17}$$

$$\Delta H = H - H_0 = H_{\mathrm{s}} - \langle H_{\mathrm{s}} \rangle_a, \tag{18}$$

тут $\langle \ldots \rangle_a$ позначає усереднення за хвильовими функціями тривимірного гармонічного осцилятора $H^a_{\mathrm{osc}}$ в основному стані $\psi^{(a)}_{0,0,0}$, $\langle \psi^{(a)}_{0,0,0} | \ldots | \psi^{(a)}_{0,0,0} \rangle$.

Знайдемо $\langle H_{\mathrm{s}} \rangle_a$. Відомо, що $\langle \tilde{a}_i \rangle_a = 0$, також $\langle \tilde{a}_i \tilde{a}_j \rangle_a = \delta_{ij}/2$. Отже, маємо

$$\langle H_{\mathrm{s}} \rangle_a = \frac{p^2}{2m} - \frac{GMm}{r} - \frac{3GMm\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4 L^2}{16\hbar^2 r^5} + \frac{GMm\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{16\hbar^2}\left(\frac{1}{r^2}p^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}p^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^5}\right), \tag{19}$$

тоді

$$\Delta H = -\frac{GMm\alpha l_{\mathrm{P}}^2}{2\hbar r^3}(\tilde{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{L}) - \frac{3GMm\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{8\hbar^2 r^5}(\tilde{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{L})^2 + \frac{GMm\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{16\hbar^2}\left(\frac{1}{r^2}[\tilde{\mathbf{a}}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}[\tilde{\mathbf{a}}\times\mathbf{p}]^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^7}[\tilde{\mathbf{a}}\times\mathbf{r}]^2\right)$$
$$+ \frac{3GMm\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4 L^2}{16\hbar^2 r^5} - \frac{GMm\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{16\hbar^2}\left(\frac{1}{r^2}p^2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}p^2\frac{1}{r^2} + \frac{\hbar^2}{r^5}\right). \qquad (20)$$

Важливо зауважити, що з точністю до другого порядку за $\Delta H$ (другого порядку за параметром некомутативності $\alpha l_{\mathrm{P}}^2/\hbar$) ми можемо розглядати гамільтоніан $H_0$, визначений як (17) [55]. Власні функції та спектр гамільтоніана $H_0$ можуть бути записані в такому вигляді: $\psi^{(0)}_{\{n_s\},\{0\}} = \psi^s_{\{n_s\}}\psi^a_{0,0,0}$, $E^{(0)}_{\{n_s\}} = E^s_{\{n_s\}} + \frac{3}{2}\hbar\omega_{\mathrm{osc}}$, де ми врахували те, що $\langle H_{\mathrm{s}}\rangle_a$ комутує з $H^a_{\mathrm{osc}}$, а також те, що частота осцилятора є дуже великою, тому осцилятор $H^a_{\mathrm{osc}}$ перебуває в основному стані. Для власних значень та власних функцій гамільтоніана $\langle H_{\mathrm{s}}\rangle_a$ використано такі позначення: $\psi^s_{\{n_s\}}$, $E^s_{\{n_s\}}$ відповідно, де $\{n_s\}$ — квантові числа. За теорією збурень у першому порядку за $\Delta H$, врахувавши (20), поправки до енерґетичних рівнів $H_0$ дорівнюють нулеві, $\Delta E^{(1)} = \langle\psi^s_{\{n_s\}}\psi^a_{0,0,0}|\Delta H|\psi^s_{\{n_s\}}\psi^a_{0,0,0}\rangle = 0$. У другому порядку теорії збурень у границі $\omega_{\mathrm{osc}}\to\infty$ маємо

$$\lim_{\omega_{\mathrm{osc}}\to\infty}\Delta E^{(2)} = \sum_{\{n'_s\},\{n^a\}}\frac{\left|\left\langle\psi^{(0)}_{\{n'_s\},\{n^a\}}\left|\Delta H\right|\psi^{(0)}_{\{n_s\},\{0\}}\right\rangle\right|^2}{E^s_{\{n_s\}} - E^s_{\{n'_s\}} - \hbar\omega_{\mathrm{osc}}(n^a_1+n^a_2+n^a_3)} = 0. \qquad (21)$$

У (21) сумування відбувається за квантовими числами $\{n'_s\}$, $\{n^a\}$, які не збігаються з $\{n_s\}$, $\{0\}$, тому в знаменнику всіх доданків суми маємо пропорційність до частоти осцилятора. Чисельник цих доданків від частоти не залежить, оскільки довжина осцилятора фіксована та дорівнює довжині Планка. Тому в границі, коли частота осцилятора прямує до безмежності, поправки до енерґетичних рівнів $H_0$ дорівнюють нулеві й у другому порядку теорії збурень.

Отже, з точністю до другого порядку за параметром некомутативності, врахувавши (17), (19), (9) та звівши оператори до нормального вигляду, можемо записати такий гамільтоніан:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{GMm}{r} - \frac{3GMm\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4 L^2}{16\hbar^2 r^5}$$
$$+ \frac{GMm\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{16\hbar^2}\left(\frac{2}{r^3}p^2 + \frac{6i\hbar}{r^5}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}) - \frac{\hbar^2}{r^5}\right)$$
$$+ \hbar\omega_{\mathrm{osc}}\left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{2}\right). \qquad (22)$$

У наступному розділі цей результат буде використано для дослідження руху частинки в ґравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу та вивчення слабкого принципу еквівалентності.

## III. СЛАБКИЙ ПРИНЦИП ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ У СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНОМУ НЕКОМУТАТИВНОМУ ПРОСТОРІ КАНОНІЧНОГО ТИПУ

Знайдемо рівняння руху частинки в ґравітаційному полі в некомутативному просторі зі збереженою сферичною симетрією. З точністю до другого порядку за параметром некомутативності, використавши (22), маємо

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{r},H_0] = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{GMm\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{8\hbar^2}\left(\frac{1}{r^3}\mathbf{p} - \frac{3\mathbf{r}}{r^5}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\right), \qquad (23)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{p},H_0] = -\frac{GMm\mathbf{r}}{r^3} - \frac{3GMm\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{8\hbar^2}$$
$$\times\left(\frac{1}{r^5}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{p} - \frac{2\mathbf{r}}{r^5}p^2 + \frac{5\mathbf{r}}{2r^7}L^2 + \frac{5\hbar^2\mathbf{r}}{6r^7} - \frac{5i\hbar}{r^7}\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\right). \qquad (24)$$

Для аналізу рівнянь та для переходу до класичної границі зручно означити вектор

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\alpha l_P^2\tilde{\mathbf{a}}}{\hbar}. \qquad (25)$$

Урахувавши те, що середнє від квадрата цього вектора за функціями гармонічного осцилятора має такий вигляд:

$$\langle\theta^2\rangle = \langle\theta^2\rangle_a = \frac{3\alpha^2 l_{\mathrm{P}}^4}{2\hbar^2} = \frac{3(\alpha')^2 l_{\mathrm{P}}^4}{2}, \qquad (26)$$

із (23), (24) у границі $\hbar\to 0$ отримаємо такі класичні рівняння руху:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{GMm\langle\theta^2\rangle}{12}\left(\frac{1}{r^3}\mathbf{p} - \frac{3\mathbf{r}}{r^5}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\right), \qquad (27)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{GMm\mathbf{r}}{r^3} - \frac{GMm\langle\theta^2\rangle}{4}$$
$$\times\left(\frac{1}{r^5}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{p} - \frac{2\mathbf{r}}{r^5}p^2 + \frac{5\mathbf{r}}{2r^7}[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]^2\right). \qquad (28)$$

Важливо звернути увагу на те, що в рівняння для швидкості (23) входять доданки, зумовлені некомутативністю координат, які залежать від маси частинки. Відповідно до слабкого принципу еквівалентності траєкторія та швидкість частинки в ґравітаційному полі не залежать від її маси та композиції. Цей принцип також відомий як принцип рівності інерційної та ґравітаційної мас. Отже, із рівняння (23) випливає, що слабкий принцип еквівалентності порушується у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу.

Перепишімо рівняння руху, означивши вектор

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \tag{29}$$

маємо

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\upsilon} - \frac{GMm^2\langle\theta^2\rangle}{12}\left(\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\upsilon} - \frac{3\mathbf{r}}{r^5}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\right), \tag{30}$$

$$\dot{\boldsymbol{\upsilon}} = -\frac{GM\mathbf{r}}{r^3} - \frac{GMm^2\langle\theta^2\rangle}{4} \times\left(\frac{1}{r^5}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\boldsymbol{\upsilon} - \frac{2\mathbf{r}}{r^5}\upsilon^2 + \frac{5\mathbf{r}}{2r^7}[\mathbf{r}\times\boldsymbol{\upsilon}]^2\right). \tag{31}$$

Звернімо увагу, що рівняння (30), (31) залежать від добутку $m^2\langle\theta^2\rangle$. У випадку, коли $m^2\langle\theta^2\rangle$ не залежить від маси частинки, а саме, коли

$$m^2\langle\theta^2\rangle = A = \text{const}, \tag{32}$$

де $A$ — константа, яка є однаковою для частинок з різними масами, рівняння руху мають такий вигляд:

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\upsilon} - \frac{GMA}{12}\left(\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\upsilon} - \frac{3\mathbf{r}}{r^5}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\right), \tag{33}$$

$$\dot{\boldsymbol{\upsilon}} = -\frac{GM\mathbf{r}}{r^3} - \frac{GMA}{4} \times\left(\frac{1}{r^5}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\boldsymbol{\upsilon} - \frac{2\mathbf{r}}{r^5}\upsilon^2 + \frac{5\mathbf{r}}{2r^7}[\mathbf{r}\times\boldsymbol{\upsilon}]^2\right). \tag{34}$$

Важливо зазначити, що рівняння (33), (34) не залежать від маси. Отже, за виконання умови (32), траєкторія та швидкість частинки не залежать від її маси та відновлюється слабкий принцип еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу.

Проаналізуймо рівняння для операторів (23), (24) у випадку, коли виконується рівність (32). Маємо:

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\upsilon} - \frac{GMA}{12}\left(\frac{1}{r^3}\boldsymbol{\upsilon} - \frac{3\mathbf{r}}{r^5}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\right), \tag{35}$$

$$\dot{\boldsymbol{\upsilon}} = -\frac{GM\mathbf{r}}{r^3} - \frac{GMA}{4} \times\left(\frac{1}{r^5}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\boldsymbol{\upsilon} - \frac{2\mathbf{r}}{r^5}\upsilon^2 + \frac{5\mathbf{r}}{2r^7}[\mathbf{r}\times\boldsymbol{\upsilon}]^2 + \frac{5\hbar^2\mathbf{r}}{6m^2r^7} - \frac{5i\hbar}{mr^7}\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\upsilon})\right). \tag{36}$$

Звернімо увагу, що за виконання (32), залежність квантових рівнянь руху від маси зводиться до залежності від величини $\hbar/m$, як і очікувалося. Відомо, що кінематичні величини, які у класичній границі є незалежними від маси частинки, у квантовому випадку залежать відношення $\hbar/m$ [56], що пов'язано з комутаційним співвідношенням

$$[\mathbf{r}, \boldsymbol{\upsilon}] = i\frac{\hbar}{m}\hat{I}. \tag{37}$$

На завершення розділу зазначимо, що з (26), (32) випливає така умова:

$$\alpha m = \tilde{\gamma} = \text{const}, \tag{38}$$

де

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\frac{2A}{3}}\frac{\hbar}{l_{\mathrm{P}}^2} \tag{39}$$

— константа, яка є однаковою для частинок із різними масами. Зауважимо, шо (38) відтворює умову на параметр некомутативності, запропоновану для збереження принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі на основі аналізу точного виразу для спектра частинки в однорідному ґравітаційному полі [51]. Також варто зазначити, що в праці [51] показано, що некомутативність впливає на масу частинки в однорідному полі. Цей ефект є ефектом третього порядку за параметрами некомутативності та також зумовлює порушення принципу еквівалентності. Тому для відновлення пропорційності ефективної маси частинки до її маси та для збереження принципу еквівалентності у статті [51] показано, що, крім умови (38), необхідно також розглядати умову пропорційності частоти осцилятора $H_{\mathrm{osc}}$ до маси частинки. Зауважимо, що в цій статті ми досліджуємо рівняння руху з точністю до другого порядку за параметром некомутативності. Ми показали, що в межах цієї точності, умова (38) дозволяє відновити слабкий принцип еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі, що узгоджується з результатами статті [51].

Отже, рух частинок із різними масами $m_n$ у некомутативному просторі визначається різними тензорами некомутативності $\theta_{ij}^{(n)}$, які з урахуванням (7), (38) мають такий вигляд:

$$\theta_{ij}^{(n)} = \frac{\tilde{\gamma} l_{\mathrm{P}}^2}{\hbar m_n}\sum_k \varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k. \tag{40}$$

Звернімо увагу, що, виконуючи рівності (38), некомутативні координати можна розглядати як кінематичні змінні [55]. Відповідно до (12) координати $X_i$ залежать від імпульсів і тому залежать від маси та не можуть розглядатися як кінематичні змінні. За умови (38), можемо записати

$$X_i = x_i + \frac{\tilde{\gamma} l_{\mathrm{P}}^2}{2\hbar}[\tilde{\mathbf{a}} \times \boldsymbol{\upsilon}]_i. \tag{41}$$

Як було показано в роботі [55], при виконанні рівності (38) координати центра мас системи частинок та координати відносного руху є незалежними, а також ефективний тензор некомутативності, який описує рух центра мас системи, не залежить від композиції.

## IV. ВИСНОВКИ

У статті розглянуто некомутативний простір канонічного типу зі збереженою сферичною симетрією, запропонований у роботах [21, 22]. Сферично-симетрична алґебра побудована за допомогою узагальнення параметра некомутативності та означення тензора некомутативності, який залежить від додаткових координат. Ми розглянули випадок, коли додаткові координати описуються гармонічним осцилятором.

У сферично-симетричному некомутативному просторі розглянуто частинку у ґравітаційному полі. Знайдено класичні рівняння руху частинки з точністю до другого порядку за параметром некомутативності. Показано, що некомутативність зумовлює додаткові доданки в рівняннях руху, які залежать від маси частинки. На основі цього результату, ми дійшли висновку, що слабкий принцип еквівалентності порушується у сферично-симетричному некомутативному просторі. Установлено, що, коли тензор некомутативності є обернено пропорційним до її маси (40), а саме, коли виконується умова (38), рівняння руху частинки, записані через величини $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{v} = \mathbf{p}/m$, не залежать від маси. Отже, траєкторія та швидкість у ґравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі є однаковими для частинок із різними масами і слабкий принцип еквівалентності зберігається. Також ми показали, що у квантовому випадку, за виконання умови (38) рівняння руху (35), (36) містять залежність від маси тільки у вигляді відношення $\hbar/m$. Така залежність зумовлена комутаційним співвідношенням для операторів $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{v}$ (37). Отже, у некомутативному просторі, як і у просторі зі звичними комутаційними співвідношеннями ($\theta_{ij} = 0$), у квантовому випадку кінематичні величини залежать від маси, що пов'язано з їх квантуванням [56].

Важливо зауважити, що обернена пропорційність тензора некомутативності до маси частинки, крім відновлення слабкого принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному просторі, дозволяє розв'язати проблему кінематичних змінних. Зазначимо, що умова (32) узгоджується з умовою на параметр некомутативності, яку отримано у працях [34,38,51,57] при дослідженні фундаментальних проблем у двовимірному некомутативному просторі канонічного типу. А саме в роботах [34,38,51,57] розглянуто таку рівність $\theta_n m_n = \gamma = \text{const}$, $\theta_n$ — параметр некомутативності, який відповідає частинці з масою $m_n$, $\gamma$ — константа, яка є однаковою для частинок із різними масами. При виконанні цієї рівності зберігаються властивості кінетичної енерґії, відновлюється слабкий принцип еквівалентності, рух центра мас та відносний рух є незалежними у двовимірному некомутативному просторі канонічного типу. Зазначимо також, що в працях [58–60] показано, що, коли параметр деформації, який описує рух частинки у деформованому просторі з мінімальною довжиною, залежить від маси частинки, то зберігаються властивості кінетичної енерґії, відновлюється принцип еквівалентності, перетворення Ґалілея та Лоренца не залежать від маси.

Отже, ідея залежності параметрів квантованості простору від маси частинки дає змогу отримати низку вагомих результатів у квантованому просторі.

## ПОДЯКИ

Автори статті вдячні проф. Ткачукові В. М. за допомогу та цінні коментарі під час дослідження, а також ас. Самарові М. І. за участь в обговоренні результатів. Публікація містить результати досліджень, проведених за підтримки Міністерства освіти та науки України в межах держбюджетної теми ФФ-63Нр (No. 0117U007190) та за підтримки ДФФД України, проект Ф76/105-2017.

[1] A. Hatzinikitas, I. Smyrnakis, J. Math. Phys. **43**, 113 (2002).
[2] A. Kijanka, P. Kosinski, Phys. Rev. D **70**, 127702 (2004).
[3] Jing Jian, Jian-Feng Chen, Eur. Phys. J. C **60**, 669 (2009).
[4] A. Smailagic, E. Spallucci, Phys. Rev. D **65**, 107701 (2002).
[5] A. Smailagic, E. Spallucci, J.Phys. A **35**, 363 (2002).
[6] A. E. F. Djemai, H. Smail, Commun. Theor. Phys. **41**, 837 (2004).
[7] P. R. Giri, P. Roy, Eur. Phys. J. C **57**, 835 (2008).
[8] J. Ben Geloun, S. Gangopadhyay, F. G. Scholtz, EPL **86**, 51001 (2009).
[9] D. Nath, P. Roy Ann. Phys, **377**, 115 (2017).
[10] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, J. Phys. Stud. **21**, 3001 (2017).
[11] Pei-Ming Ho, Hsien-Chung Kao, Phys. Rev. Lett. **88** 151602 (2002).
[12] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. **86**, 2716 (2001).
[13] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Eur. Phys. J. C **36**, 251 (2004).
[14] O. Bertolami, R. Queiroz, Phys. Lett. A **375**, 4116 (2011).
[15] N. Chair, M. A. Dalabeeh, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 1553 (2005).
[16] A. Stern, Phys. Rev. Lett. **100**, 061601 (2008).
[17] S. Zaim, L. Khodja, Y. Delenda, Int. J. Mod. Phys. A **26**, 4133 (2011).
[18] T. C. Adorno, M. C. Baldiotti, M. Chaichian, D. M. Gitman, A. Tureanu, Phys. Lett. B **682**, 235 (2009).
[19] L. Khodja, S. Zaim, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1250100 (2012).
[20] S. A. Alavi, Mod. Phys. Lett. A **22**, 377 (2007).
[21] Kh.P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **378**, 3509 (2014).

[22] Kh. P. Gnatenko, Yu. S. Krynytskyi, V. M. Tkachuk, Mod. Phys. Lett. A **30**, 1550033 (2015).
[23] Kh. P. Gnatenko, J. Phys.: Conf. Ser. **670**, 012023 (2016).
[24] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Ukr. J. Phys. **61**, 432 (2016).
[25] M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A **74**, 012101 (2006).
[26] M. M. Stetsko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **372**, 5126 (2008).
[27] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Int. J. Mod. Phys. A **32**, 1750161 (2017).
[28] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas, Mod. Phys. Lett. A **16**, 2075 (2001).
[29] P. A. Horváthy, Ann. Phys. **299** 128 (2002).
[30] O. F. Dayi, L. T. Kelleyane, Mod. Phys. Lett. A **17** 1937 (2002).
[31] M. Daszkiewicz, Acta Phys. Polon. B **44**, 699 (2013).
[32] O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. de Aragao, P. Castorina, D. Zappala, Phys. Rev. D **72**, 025010 (2005)
[33] C. Bastos, O. Bertolami, Phys. Lett. A **372**, 5556 (2008).
[34] Kh. P. Gnatenko, Phys. Lett. A **377**, 3061 (2013).
[35] Kh. P. Gnatenko, J. Phys. Stud. **17**, 4001 (2013).
[36] S. Bellucci, A. Yeranyan, Phys. Lett. B **609**, 418 (2005).
[37] I. Jabbari, A. Jahan, Z Riazi, Turk. J. Phys. **33**, 149 (2009).
[38] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **381**, 2463 (2017).
[39] M. I. Samar, V. M. Tkachuk, J. Math. Phys. **58**, 122108 (2017).
[40] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, J. Phys. Stud. **20**, 1001 (2016).
[41] E. F. Moreno, Phys. Rev. D **72**, 045001 (2005).
[42] V. Gáliková, P. Presnajder, J. Phys: Conf. Ser. **343**, 012096 (2012).
[43] R. Amorim, Phys. Rev. Lett. **101**, 081602 (2008).
[44] M. Daszkiewicz, J. Lukierski, M. Woronowicz, Phys. Rev. D **77**, 105007 (2008)
[45] M. Daszkiewicz, J. Lukierski, M. Woronowicz, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 355201 (2009).
[46] A. Borowiec, J. Lukierski, A. Pachol, J. Phys. A: Math. Theor. **47** 405203 (2014).
[47] A. Borowiec, A. Pachol, SIGMA **10**, 107 (2014).
[48] M. Gomes, V.G. Kupriyanov, Phys. Rev. D **79**, 125011 (2009).
[49] V. G. Kupriyanov, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 245303 (2013).
[50] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Int. J. Mod. Phys. A **33**, 1850037 (2018).
[51] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Mod. Phys. Lett. A **31**, 1650026 (2016).
[52] A. Saha, Phys. Rev. D. 89, 025010 (2014).
[53] R. Plyatsko, Phys. Rev. D **58**, 084031(1998).
[54] R. Plyatsko, M. Fenyk, O. Stefanyshyn, *Equations of Motion in Relativistic Gravity* (Springer, New York, 2015), p. 165.
[55] Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, J. Phys. Stud. **21**, 4002 (2017).
[56] D. Greenberger, Ann. Phys. **47**, 116 (1968).
[57] Kh. P. Gnatenko, Mod. Phys. Lett. A **32**, 1750166 (2017).
[58] C. Quesne, V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A **81**, 012106 (2010).
[59] V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A **86**, 062112 (2012).
[60] V. M. Tkachuk, Found. Phys. **46**, 1666 (2016).

## THE MOTION OF A PARTICLE IN A GRAVITATIONAL FIELD IN A ROTATIONALLY-INVARIANT NONCOMMUTATIVE SPACE OF A CANONICAL TYPE AND THE WEAK EQUIVALENCE PRINCIPLE

Kh. P. Gnatenko, O. O. Morozko, Yu. S. Krynytskyi
*Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,*
*12, Drahomanov St., Lviv, 79005, Ukraine*

A noncommutative space of a canonical type with preserved rotational symmetry is considered. The space is constructed involving additional coordinates, which build the tensor of noncommutativity and correspond to a rotationally-invariant system. The system is considered to be a harmonic oscillator with a high frequency. In the rotationally-invariant noncommutative space, the influence of noncommutativity on the classical and quantum equations of motion of a particle in the gravitational field is studied up to the second order in the parameter of noncommutativity. The weak equivalence principle is considered. We find that the noncommutativity of coordinates causes additional terms in the equation of motion, which depend on the mass. Therefore, the weak equivalence principle, also known as the principle of the universality of free fall or the Galilean equivalence principle, is not preserved in a noncommutative space with rotational symmetry. We show that in the case when the tensor of noncommutativity which corresponds to the motion of a particle in a noncommutative space is inversely proportional to its mass, the classical equations of motion in the gravitational field do not depend on the mass. Therefore, the weak equivalence principle is recovered in the rotationally-invariant noncommutative space. Also, in the case when the condition for the tensor of noncommutativity is satisfied, the dependence of the quantum equations of motion on the mass $m$ is represented by the ratio $\hbar/m$.