

СТАТИСТИЧНА ФІЗИКА СКЛАДНИХ СИСТЕМ У СВІТІ ТА У ЛЬВОВІ

Ю. Головач^{1,2}, М. Дудка^{1,2}, В. Блавацька^{1,2}, В. Пальчиков^{1,2}, М. Красницька^{1,2}, О. Мриглод^{1,2}

¹Інститут фізики конденсованих систем НАН України, вул. Свенціцького, 1, Львів, 79011, Україна

²Співпраця L^4 і Коледж докторантів із статистичної фізики складних систем,
Ляйпціг–Лотаринґія–Львів–Ковентрі, Європа

(Отримано 27 березня 2018 р.; в остаточному вигляді — 14 травня 2018 р.)

Стаття є коротким нарисом про статистичну фізику складних систем — напрямок досліджень, що тепер набуває рис сформованої ділянки науки зі своїм об'єктом, понятійним апаратом, методами аналізу. Складна система має багато частин (агентів), що взаємодіють, і проявляє колективну поведінку, що нетривіально впливає з поведінки її окремих компонент. Прикладами таких систем є конденсована речовина, екологічні та біологічні системи, фондові ринки та економічні системи, людське суспільство. Поняття складної системи стосується багатьох традиційних дисциплін науки й утворює нову, міждисциплінарну галузь знань. Притаманними особливостями складних систем є самоорганізація, виникнення нових функціональних можливостей, адаптивний характер взаємодій, висока чутливість до малих змін початкових умов, підпорядкування степеневим законам (розподіли типу “товстих хвостів”).

Поряд із загальним окресленням властивостей складних систем у статті здійснено короткий огляд деяких робіт, виконаних у цій ділянці в Інституті фізики конденсованих систем НАН України.

Ключові слова: складні системи, статистична фізика, колективна поведінка, скейлінг, самоорганізація, складні мережі, наукометрія, соціофізика.

DOI: <https://doi.org/10.30970/jps.22.2801>

PACS number(s): 89.75.–k, 05.10.–a, 05.70.Fh, 07.05.Kf

I. СКЛАДНІ СИСТЕМИ: ФІЗИКА ПОЗА ФІЗИКОЮ

Складні системи — напрямок досліджень, що зараз набуває характерних рис добре сформованої ділянки науки зі своїм об'єктом, понятійним апаратом, методами аналізу [1]. Поняття *складна система* поступово стає одним із підставових понять сучасної науки, чи, ширше, усе частіше виступає в загальнокультурному контексті. Розширення сфери застосувань цього поняття, а також виявлення і усвідомлення все більшої кількості явищ, де воно застосовне, спричиняє труднощі в його точному означенні. І хоча, як ми побачимо з подальшої розповіді, наука про складні системи охоплює широку міждисциплінарну ділянку досліджень, центральними у ній є методи й концепції фізики. Про деякі з них ітиметься в цій статті. Нашу розповідь ми почнемо з окреслення в загальних рисах основних властивостей складних систем, зосередившись на тих, які становлять предмет вивчення статистичної фізики складних систем. Конкретні приклади будуть вибрані з-поміж результатів, які отримали науковці Інституту фізики конденсованих систем (ІФКС) НАН України.

A. Емерджентність і ефект метелика

Як правило, складною називається система з багатьох пов'язаних між собою складників, що, як ціле, мають властивості, які не очевидно впливають із властивостей окремих частин [2, 3]. Таким чином, наука про складні системи вивчає, як складові частини породжують колективну поведінку системи. У фізиці підкреслюється ще одна характерна риса: система є складною, якщо її поведінка кардинально залежить

від деталей системи [4]. При цьому маються на увазі такі явища, як детерміністичний хаос, квантове заплутування, виникнення третинної структури макромолекул білків, виникнення стану спінового скла тощо. Згадані явища дуже різні й теоретично досліджуються в різних ділянках фізики (теорія динамічних систем, квантова механіка, статистична фізика). Проте їхньою спільною рисою є те, що інфінітезимальна зміна у (різних за фізичною природою) початкових умовах приводить до докорінно різних сценаріїв еволюції.

Два згадані вище чинники (ще відомі як *емерджентність* та *ефект метелика*) є визначальними у формуванні предмета досліджень статистичної фізики складних систем. Прикладами таких систем є конденсована речовина, екологічні та біологічні системи, фондові ринки й економічні системи, людське суспільство. Іншими характерними особливостями складних систем, окрім уже згаданих вище високої чутливості до малих змін початкових умов та виникнення нових функціональних можливостей, є самоорганізація, підпорядкування степеневим законам (*товсті хвости* у статистичних розподілах) та адаптивний характер взаємодій.

B. Адаптивний характер взаємодій

Зупинимося спочатку на останній із перелічених вище властивостей. Відомо, що взаємодії між складовими частинами часом можуть спричинити колективну поведінку і, отже, породити макроскопічний стан. Однак у складній системі ці взаємодії зазнають впливу макростану і змінюються впродовж її еволюції. Інакше кажучи, у складній системі макро- і мікростани



динамічно оновлюють один одного [5]. Аналіз таких ефектів і привів до створення методів і вироблення концепцій, що були успішно застосовані для опису формально подібних явищ у хімічних, біологічних, соціальних та інших системах агентів нефізичної природи. Часом стверджується: якщо фізика — це наука чотирьох фундаментальних сил, якими взаємодіє матерія, то наука про складні системи використовує концептуальне узагальнення понять сили й матерії. Сили — це все, що змінює стан агентів-складників, а матерія — це все, до чого можна докласти сили. Знову ж таки, приклади знаходимо як у конденсованій речовині, так і в біології, фондових ринках, економіці, соціології чи гуманітарних дисциплінах. Одні з найчастіше згадуваних прикладів виникнення нових якостей у складних системах — це виникнення свідомості чи формування погоди. Тут доречно також згадати про докорінну відмінність між складними (complex) і складеними (complicated) системами: характеристики останніх можна отримати з індивідуальних властивостей їхніх складників. Знову ж таки, часто згадуваним прикладом для пояснення цієї відмінності слугує функціонування сучасного літака як саме складеної (а не складної) системи. Незважаючи на величезну кількість складників різної природи, поведінка системи літака в цілому є (повинна бути) передбачуваною і такою, що виключає емерджентність.

С. Розподіли з товстими хвостами

Поява степеневих розподілів — товстих хвостів — у статистиці є ще однією притаманною, можна сказати навіть неодмінною рисою складних систем агентів, що взаємодіють [6–8]. Класичний приклад — степеневий закон розподілу слів за частотою їх уживання в тексті, відомий як закон Зіпфа. Однак американський лінгвіст Джордж Зіпф не був першим, хто зауважив цю закономірність. Раніше подібні спостереження робили Есту (1916) і Кондон (1928). Часто такі степеневі закони називають іменами їх відкривачів. В економіці — це закон розподілу багатства між індивідуумами (Парето, 1896); у демографії — розподіл міст за їхнім розміром (Ауербах, 1913); у біології — розподіл розмірів родів за кількістю видів, що в них входять (Вілліс, Юл, 1922); у наукометрії — розподіл кількості статей, які написали окремі вчені (Лотка, 1926), наукових журналів за кількістю статей (Бредфорд, 1934), цитувань (Прайс, 1965). Список можна продовжити. Тоді як появу розподілу Гаусса чи Больцмана здебільшого можна пояснити центральною граничною теоремою, причину появи степеневі статистики вловити непросто. Те, що розподіли з товстими хвостами спостерігаються для широкого класу явищ, свідчить на користь припущення про достатньо загальні причини їх появи. З іншого боку, сам факт, що різні явища описуються однаковими степеневими

законами, не означає, що природа цих законів така сама.

На сьогодні причини появи степеневих законів об'єднано у декілька груп, подібно до класів універсальності в теорії фазових переходів. До них належать, зокрема, критичні явища, процеси з перевагою, самоорганізована критичність, мультиплікативні процеси з в'язями, оптимізація та залежні від шляху неергодичні процеси, фазовий простір яких зменшується з еволюцією. *Критичні явища* — типовий приклад появи степеневих законів у фізиці конденсованої речовини [9, 10]. З наближенням до критичної точки універсальні степеневі закони визначають як розбіжність деяких термодинамічних величин (таких, як стисливість плинів чи сприйнятливості магнетиків), так і структурні (асимптотика парної кореляційної функції) чи статистичні (розподіл за розміром скорельованих кластерів) властивості конденсованих речовин. У таких явищах причиною виникнення степеневих законів є зростання флуктуацій та їх кореляція поблизу критичної точки. Механізм *процесів з перевагою*, який часом ще називають явищем *rich get richer*, запропонував Юл і пізніше — Саймон. Якщо результат процесу пропорційний до кількості реалізацій у минулому, частота результатів підлягає степеневому розподілу. Окремим класом є *самоорганізована критичність*, тут степеневі закони спричинені нелінійними взаємодіями між складниками [11]. Система сама спрямовується до критичної точки, і не потрібне тонке налаштування параметрів, як це буває у звичайних критичних явищах. *Мультиплікативні процеси* (добутки послідовностей випадкових чисел) приводять до логнормальних розподілів. Якщо ж на такі процеси накладаються певні прості в'язі, то розподіл стає степеневим. До степеневих законів приводить також запропонований Бенуа Мандельбротом *сценарій оптимізації*, що базується на аргументах теорії інформації [12]. У цьому сценарії степеневі закони виникають як результат оптимізації затрат на передачу інформації. Недавно стало зрозуміло, що залежні від попередньої історії процеси, які стають обмеженими в результаті свого розвитку (*sample-space reducing processes*), також приводять до степеневих законів [13]. Завдання дослідника — з'ясувати, який саме з перелічених вище процесів домінує для конкретної складної системи. Дуже часто сумарна степенева поведінка може бути спричинена комбінацією таких механізмів.

Д. Складні мережі

Надзвичайно продуктивним для опису складних систем виявилось застосування концепції складних мереж [14]. Щобільше, наука про складні мережі настільки тісно переплелась із наукою про складні системи, що часом важко встановити межу, де закінчується одна й починається інша¹. Мережа (чи граф)

¹Ситуація подібна до розмежування математики і теоретичної фізики: перша слугує мовою, а друга за її допомогою описує явища.

є впорядкованою парою $G = (V, E)$, де V — це множина вершин (часом їх називають вузлами), а E — це множина ребер (зв'язків). Теорія графів — це розділ дискретної математики, що бере свій початок ще з XVIII століття. Уже із самого означення випливає перспективність і природність застосування формалізму мереж для опису складних систем агентів, що взаємодіють. При цьому потрібно ставити у відповідність кожному з агентів вершину, а кожній із взаємодій — ребро. Лише нещодавно фізики почали аналізувати мережі теоретично та емпірично, перші статті датуються кінцем 1990-их років. Мета досліджень змінилася від аналізу невеликих графів та властивостей окремих вершин і ребер до розгляду статистичних властивостей цих графів (мереж). Зі зміною мети змінилися й методи аналізу. Народження “науки про мережі” відбулося внаслідок розвитку комп'ютерних технологій: WWW надає порівняно легкий доступ до баз даних з інформацією про різноманітні мережі, і водночас потужність комп'ютерів дозволяє детально їх аналізувати (що було би просто неможливо в іншому разі, враховуючи розміри досліджуваних мереж). На сьогодні в мережевому формалізмі прийнято описувати взаємодії, що змінюються з часом, стохастичні взаємодії, взаємодії, що виникають на декількох рівнях і не вбудовані в евклідовий простір. Якщо додати можливість задавати різні стани для кожного агента-вузла, то стає зрозумілим успіх використання складних мереж як своєрідної *lingua franca* сучасної науки про складні системи. Про деякі результати таких досліджень ми розповімо в наступних підрозділах.

Е. Дослідження складних систем в ІФКС НАНУ

Досі йшлося про загальні властивості складних систем, тепер ми плануємо зосередитися на тих напрямках, у яких проводять дослідження в ІФКС НАН України, а саме: статична і динамічна критична поведінка неупорядкованих магнетиків; конформаційні властивості полімерних макромолекул; кількісні підходи в суспільних науках; складні мережі; наукометрія. Наші методи дослідження включають аналітичні підходи (теоретико-польова ренормалізаційна група, функціональне інтегрування, пересумовування розбіжних рядів, феноменологічний термодинамічний підхід), комп'ютерні симуляції, емпіричний аналіз даних. Тяжка й марна справа перелічувати різні фізичні об'єкти чи навіть класи об'єктів, у яких спостерігається характерна для складних систем поведінка. У наступних підрозділах ми наведемо лише два приклади, що стосуються зовсім різних за своєю природою об'єктів — фрустрованих і структурно неупорядкованих магнетиків і полімерних макромолекул. Складна кооперативна поведінка керується в них різними параметрами — температурою та хімічним потенціалом, однак, як буде видно з наведених результатів, у їхній поведінці виразно простежується низка спільних рис.

1. Структурно-неупорядковані магнетики

Класичним прикладом складної системи, що описується методами статистичної фізики, є спінове скло — структурно неупорядкований магнетик із фрустрованими взаємодіями. Спінове скло характерне багатьма метастабільними станами, що, своєю чергою, спричиняє наявність у системі багатьох часових масштабів [15]. Складність опису спінового скла привела, зокрема, до розгляду часткових випадків, що описуються регулярними (структурно впорядкованими) фрустрованими моделями чи структурно неупорядкованими моделями, але без фрустрацій. Тоді як кількісний аналіз колективної поведінки за фазового переходу в магнетовпорядкований стан в ідеалізованих базових моделях (таких, як наприклад, модель Ізінга) на сьогодні здійснений з високою точністю і, фактично, становить головний зміст сучасної теорії фазових переходів [9, 16], опис критичності за наявності таких реалістичних умов, як структурний безлад [17–20], анізотропія [21], фрустрації [22] чи ефекти скінченого об'єму [23], є актуальною, важкою й цікавою задачею. Вона актуальна, бо реальні об'єкти, у яких відбувається магнітний фазовий перехід, часто характеризуються структурним безладом заміщення (тверді розчини антиферомагнетиків та їхніх немагнітних ізоморфів), локальною випадковою анізотропією (аморфні сплави рідкісноземельних із перехідними металами), фрустраціями (шаруваті трикутні антиферомагнетики, гелімагнетики). Така задача важка, бо поряд із звичайними труднощами, що виникають під час опису критичності, доводиться долати труднощі теорії неупорядкованих систем. А цікавість і перспективність такої задачі полягає й у тому, що завдяки універсальності критичної поведінки описані ефекти можуть спостерігатися не лише в магнітних системах і не лише в об'єктах фізики конденсованої речовини. Деякі з наших результатів, отриманих унаслідок аналізу ефективної та асимптотичної колективної поведінки неупорядкованих та фрустрованих магнетиків, наведені нижче в розділах II, III і IV.

2. Складні полімерні макромолекули

Концепція скейлінгу й виникнення степеневих законів в околі фазового переходу другого роду знайшла свій дальший розвиток і численні застосування у фізиці м'якої речовини. Ще в роботах нобелівського лауреата та закордонного дійсного члена НАН України П'єра-Жіля де Жена вказано на глибокий зв'язок між фізикою критичних явищ і фізикою макромолекул [24]. Зокрема поняття складності фігурує у формулюванні Нобелівського комітету: премія 1991 року була присуджена П.-Ж. де Жену за “...discovering that methods developed for studying order phenomena in simple systems can be generalized to more complex

forms of matter, in particular to liquid crystals and polymers...” [25]². Відомо, що конформаційні властивості довгих полімерних ланцюгів у доброму розчиннику підлягають степеневим законам – законам скейлінгу. На відміну від температурної чи польової залежності термодинамічних величин в околі точки фазового переходу, для гнучких полімерних ланцюгів степеневі закони виникають в границі $N \rightarrow \infty$, де N – кількість мономерів, що утворюють полімерний ланцюг. Так, середній характерний розмір \mathcal{R} і кількість конфігурацій \mathcal{Z} полімерного клубка зростають з N як

$$\mathcal{R} \sim N^\nu, \quad \mathcal{Z} \sim z^N N^{\gamma-1}. \quad (1)$$

Тут z – неуніверсальна стала (фугативність), а ν, γ – приклади полімерних критичних показників. Подібно як в теорії критичних явищ, для гнучкого полімеру ці показники *універсальні* – незалежні від особливостей хімічного складу макромолекули й залежать лише від вимірності простору. Пошук форми законів (1) привів не лише до створення сучасної теоретичної фізики і хімії полімерів, але й дозволив установити глибокий зв'язок, що існує між фізикою критичних явищ і фізикою макромолекул. Зокрема скейлінгові властивості полімерних ланцюгів належать до того ж класу універсальності, що і властивості ґраткових блукань із самоуниканням (self avoiding walks, SAW). А останні, своєю чергою, описуються m -векторною моделлю в границі $m \rightarrow 0$. Таку границю прийнято називати границею де Жена.

Як виявилось, зокрема й у результаті наших досліджень, універсальним степеневим законам підлягають й інші спостережувані, що описують конформаційні властивості полімерних ланцюгів та інших макромолекулярних утворень, складних як за топологією (полімерні сітки та зірки), так і за хімічним складом (кополімери та кополімерні сітки) [26, 27]. Щобільше, універсальною виявляється і форма таких утворень [28]. Деякі наші результати в цій ділянці, а також результати дослідження конформаційних властивостей полімерів у пористому середовищі [29–31] наведені в розділах V–VIII.

3. Соціофізика

Наведені у двох попередніх підрозділах приклади складних систем стосувалися фізики конденсованої речовини. У кількох подальших прикладах мова йтиметься про “фізику поза фізикою” – застосування концепцій і методів статистичної фізики й науки про складні мережі для дослідження систем агентів нефізичної природи, що взаємодіють. Можна вибрати різні початки відліку застосування концепцій природничих наук для опису явищ, що відбуваються в суспільстві. Сам термін *соціофізика* використано в назві книжки бельгійського астронома, математика і соціолога Адольфа Кетле (1835): *Sur l'homme et*

le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale (англійський переклад див. [32]). У цій праці Кетле простежує низку аналогій між фізикою та астрономією, з одного боку, та суспільним життям, з іншого; пояснює важливість нормального розподілу для опису суспільних явищ; запроваджує концепцію “середньої людини” з індивідуальними випадковими флуктуаціями.

Однак сучасне розуміння задач соціофізики сформувалося набагато пізніше, а певною мірою формується й тепер [33]. І пов'язане воно, насамперед, із кількісним аналізом того кола явищ в суспільстві, де прослідковуються прямі аналогії з поведінкою складних багаточастинкових систем. Завданням соціофізики є моделювання методами статистичної фізики таких великомасштабних соціальних явищ, як формування точки зору (opinion formation), розповсюдження культур, походження й еволюція мови, поведінка юрби, динаміка популяцій, поширення епідемій тощо. У цих та подібних задачах робляться спроби вивчати колективну поведінку, що виникає із взаємодій між індивідуумами як елементарними одиницями соціальних структур. І знову, скейлінг і універсальність виявляються центральними рисами цієї поведінки. Деякі з результатів, які ми отримали в цьому напрямку, наведені в розділах XI та XII.

4. Складні мережі

Про складні мережі ми вже згадували в підрозділі I D. Фактично наука про складні мережі виникла як певний концептуальний апарат, що дозволяє не лише якісно окреслити й візуалізувати процеси у складних системах. Застосування науки про мережі уможливило кількісний аналіз, зокрема дозволяє знаходити спільні риси в поведінці складних систем різної природи. Так, досліджуючи мережі громадського транспорту, ми запропонували низку графічних зображень для їх опису, з'ясували стійкість цих мереж до випадкових збоїв та спрямованих атак, використали підходи статистичної фізики для моделювання таких мереж [34–36]. Ми були першими, хто застосував концепції науки про складні мережі до аналізу української мови [37]. Вузлами в такій мережі виступають зазвичай слова, а залежно від інтерпретації зв'язку отримуються різні зображення мережі. Проведений аналіз дав змогу одержати кількісні характеристики мережі української мови. Ці емпіричні результати корисні для теоретичного опису еволюції мови.

Згадаймо ще про два проекти аналізу складних мереж, у яких беремо участь. Спільно з науковцями університетів Ковентрі й Оксфорду ми працюємо над виконанням проекту, у якому кількісні методи теорії

²Курсив – наш.

складних систем, зокрема теорії складних мереж, були застосовані до таких визначних європейських епічних наративів, як пам'ятки стародавнього англосаксонського героїчного епосу *Беовульф*, античної грецької епічної поеми *Іліада*, ірландських та ісландських саг, героїчного епосу східних слов'ян — билин [38–40]. Особливістю нашого дослідження є ще й те, що ми аналізуємо соціальні зв'язки між героями епічного наративу. Аналіз наративу як твору людського духу є традиційно прерогативою гуманітарних наук, тоді як аналіз соціальних структур, зрозуміло — предмет наук соціальних. Застосування кількісних методів і концепцій природничих наук для такого аналізу є, на нашу думку, характерною рисою сьогодення. У проєкті, який ми виконуємо спільно з науковцями Віденського медичного університету та Массачусетського технологічного інституту, вивчаються мережеві структури та активність користувачів в онлайн-грі класу MMOG (Massive multiplayer online game) під назвою PARDUS [41]. У наші дні такі ігри стали однією з наймасовіших колективних форм людської діяльності: у них беруть участь сотні мільйонів людей. Аналіз же діяльності гравців у таких іграх дає змогу здійснювати кількісний опис соціальної активності з точністю, порівняльною з точністю експериментів у природничих науках. Деякі з отриманих результатів наведено в розділах IX–XII.

5. Наукометрія

Кількісний аналіз уже впродовж тривалого часу активно використовуються і для вивчення такої особливої соціальної системи або специфічного виміру людської активності, як наука. У межах наукознавства, яке називають наукою про науку, розвинувся особливий напрям, що зосередив у собі кількісні аспекти досліджень, — наукометрія. Нині це вельми потужна дисципліна, що має свій понятійний апарат, використовує широкий спектр методів для аналізу великих масивів різного роду даних. Статистичний аналіз застосовують для пошуку кореляцій та опису бібліографічних даних та даних про наукові цитування; методи складних мереж забезпечують ефективний спосіб візуалізації інформації та її аналізу для пошуку закономірностей, типових структур і характерних властивостей системи як цілого; алгоритми аналізу часових послідовностей дають змогу проаналізувати динаміку процесів, що відбуваються всередині системи науки; підходи структурної лінгвістики допомагають здійснювати так званий контент-аналіз наукових текстів. Цим переліком не вичерпується багатий інструментарій високо міждисциплінарного наукометричного напрямку. Епоха так званих Big Data (“великих даних”) відкриває нові перспективи: уже є чимало результатів аналізу “цифрових слідів” у мережі Інтернет — ко-

ментарі в наукових соцмережах, дописи у професійних блогах, збережені закладки та вподобання статей, показники завантаженості файлів та відвідуваності сторінок — такі дані дають змогу характеризувати вчених та їхні роботи в іншому вимірі. Очевидно, що науку потрібно розглядати як систему складну та адаптивну, із механізмами самоорганізації та несподіваними колективними ефектами. Отже, статистична фізика з її понятійним апаратом та досвідом моделювання і вивчення великих багаточастинкових систем у довгочасових границях починає ефективно застосовуватись і для наукометричних задач. Деякі з них розв'язували вчені нашого інституту: моделювання та аналіз динаміки редакційного опрацювання статей, надісланих до наукового журналу [42]; вивчення кореляцій між експертними оцінками наукових колективів та окремими індикаторами впливу на основі цитованості їхніх публікацій [43–45]; дослідження еволюції наукової тематики як відгуку на суспільну вагому подію [46]. Ще одна із задач коротко описана в розділі XII.

II. ЕФЕКТИВНА Й АСИМПТОТИЧНА КРИТИЧНА ПОВЕДІНКА ТРИВИМІРНИХ НЕВПОРЯДКОВАНИХ МАГНЕТИКІВ

Тоді як у критичній точці T_c кореляційна довжина безмежна й низка термодинамічних і структурних властивостей системи описується універсальними степеневиими законами, поблизу T_c кореляційна довжина, хоч і суттєво перевищує міжатомну відстань, але все ж залишається скінченною. Урахування цього факту дозволило нам створити теорію ефективної критичної поведінки як один із розділів статистичної фізики критичних явищ у складних системах. Для ліпшого врахування умов експерименту теорію узагальнено на опис систем із структурними неоднорідностями, анізотропією та фрустраціями. Застосовуючи метод теоретико-польової ренормалізаційної групи (РГ), ми одні з перших детально описали універсальні властивості фазового переходу в магнетовпорядкований стан для низки базових моделей структурно непорядкованих магнетиків. Було отримано аналітичні вирази для асимптотичних критичних показників у високих порядках теорії збурень, та оцінено їх значення для тривимірних систем [17, 47] за допомогою техніки пересумовування рядів теорії збурень. А оскільки саме ефективна критична поведінка реально спостерігається на експерименті та в числових симуляціях, то її теоретичний аналіз був своєчасним і знайшов широке застосування у вивченні структурно непорядкованих магнетиків. Ці теоретичні дослідження стимулювали проведення нових експериментів і слугували їх поясненню.

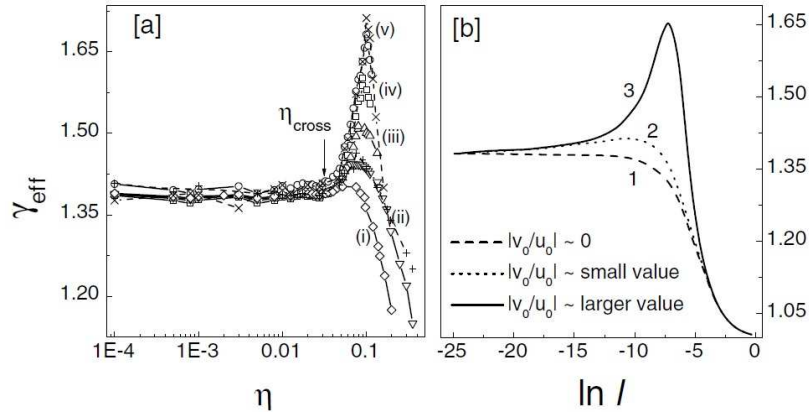


Рис. 1. Експериментальне вимірювання ефективного критичного показника ізотермічної магнітної сприйнятливості γ_{eff} аморфних сплавів FeMnZr як функції зведеної температури $\eta = (T - T_c)/T_c$ (лівий графік), виконане за нашим теоретичним передбаченням і поясненням спостережуваного ефекту (правий графік, граничне значення РГ параметра $\ell \rightarrow 0$ відповідає $T \rightarrow T_c$). Рисунок узято з роботи [48].

Так, структурний безлад у вигляді точкових немагнітних дефектів описується моделлю m -векторного розведеного магнетика з гамільтоніаном:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j c_i c_j, \quad (2)$$

де m -компонентні вектори $\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j$, локалізовані на вузлах i, j d -вимірної ґратки, а $c_i = 1$, якщо вузол i зайнятий спіном, і $c_i = 0$, якщо — ні. Ситуація, коли магнітні й немагнітні вузли зафіксовані в певній конфігурації (так званий *заморожений безлад*, quenched disorder) реалізується, наприклад, за швидкої зміни температури розплаву, коли час релаксації системи

до рівноважного стану набагато більший від типового часу спостереження. Виявляється, що навіть за слабого розведення немагнітної компонентою, коли концентрація магнітних вузлів $c \simeq 1$, а кореляції в розподілі зайнятих і вільних вузлів відсутні, у системі спостерігається складна критична поведінка.

Наші передбачення ефективної критичної поведінки розведеного гайзенберґівського ($d = m = 3$) та одновісного ($d = 3, m = 1$) магнетика зображені на рис. 1 та рис. 2а відповідно. Із наближенням до критичної точки ($\ell(T \rightarrow T_c) \rightarrow 0$) можуть спостерігатися різні сценарії ефективної критичної поведінки, що супроводжує фазовий перехід другого роду в магнетовпорядкований стан.

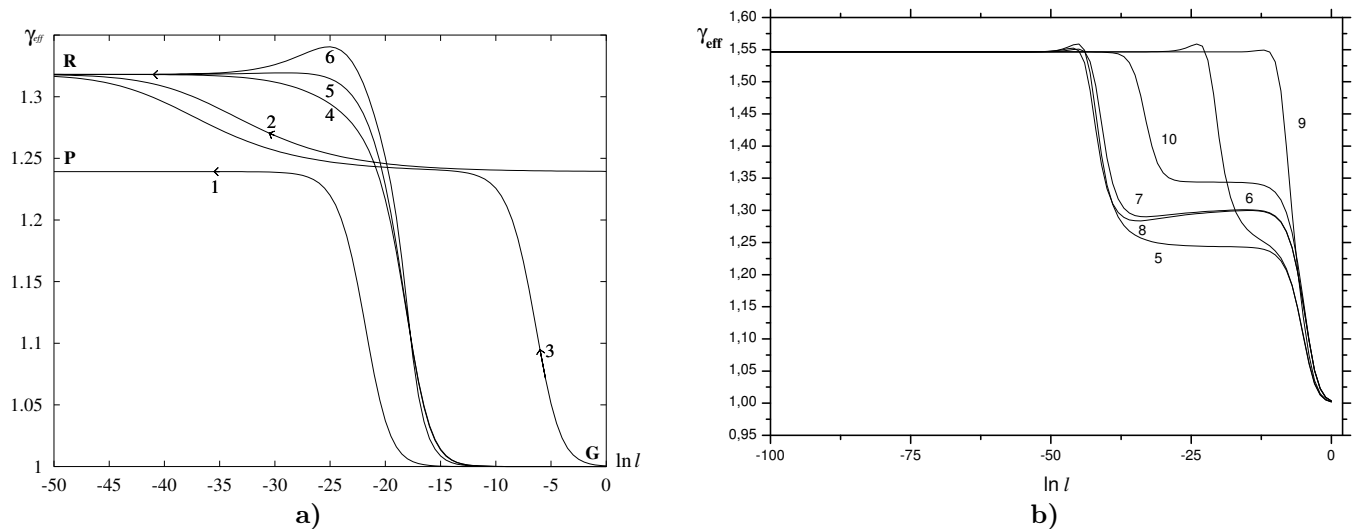


Рис. 2. Теоретичні обчислення зміни значення ефективного критичного показника ізотермічної магнітної сприйнятливості γ_{eff} при наближенні до T_c . Різні криві відповідають різним можливим сценаріям ефективної критичної поведінки. **а)**: тривимірна розведена модель Ізінґа (р-ня (2) при $d = 3, m = 1$) [17]. Спостерігається критична поведінка, що відповідає класам універсальності гаусової моделі (**G**), чистої (**P**) та розведеної (**R**) моделі Ізінґа. **б)**: тривимірна модель з вісю анізотропії, випадково розподіленою вздовж ребер m -вимірного гіперкуба (р-ня (3) при $d = 3, m = 2$) [21]. Різні плато відповідають різним класам універсальності.

Як свідчать результати експериментів і комп'ютерного моделювання, навіть слабка однійонна випадкова анізотропія може спричинити кардинальні зміни в критичній поведінці аморфних магнетиків. Для пояснення цього явища ми дослідили модель із випадковою анізотропією [21]:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - \sum_i D (\mathbf{S}_i \hat{\mathbf{x}}_i)^2. \quad (3)$$

Структурний безлад описується в (3) другим доданком, де $\hat{\mathbf{x}}_i$ — випадково спрямований заморожений одиничний вектор, а $D > 0$ — стала анізотропії. Цей доданок робить спрямування локального магнітного моменту вздовж осі випадкової анізотропії енергетично вигідним. Як підтверджено в наших роботах, у тривимірній моделі феромагнетизм відсутній за ізотропно розподіленою локальною осі анізотропії, а для анізотропного розподілу фазовий перехід може залишатися фазовим переходом другого роду, проте клас універсальності змінюється (див. рис. 2b й огляд [21]).

III. ГРАНИЧНІ ВИМІРНОСТІ В СИСТЕМАХ ЗІ СКЛАДНОЮ СТРУКТУРОЮ

Зміна вимірності параметра порядку в системах зі складними внутрішніми симетріями може привести до зміни класу універсальності або роду фазового переходу. Значення вимірності параметра порядку, за яких відбувається така зміна, називають *граничними* (marginal). Як і критичні показники та відношення критичних амплітуд, граничні вимірності є універсальними величинами, і з'ясування їхнього точного значення допомагає отримати відповідь на питання про можливий тип критичної поведінки в досліджуваних системах.

У методі ренормалізаційної групи гранична вимірність визначається як вимірність, за якої відбувається зміна стійкості нерухомої точки перетворення РГ. Найточніші на сьогодні значення граничних вимірностей багатьох базових моделей критичної поведінки (так само, як і значення критичних показників) отримані саме таким методом. Зокрема, у наших роботах з високою точністю визначено граничні вимірності $O(m)$ -симетричних магнетиків з кубічною анізотропією, зі слабким структурним безладом (2), систем зі зв'язаними параметрами порядку та неколінеарним упорядкуванням. Для забезпечення високої точності під час одержання виразів для граничних вимірностей проводиться перенормування у високих порядках теорії збурень. Класифікація теорії збурень відбувається за кількістю інтегрувань за хвильовим вектором, у діаграмному зображенні цьому відповідає кількість петель у фейманівських діаграмах. Так, у наших розрахунках використано ряди в рекордному на сьогодні шестипетлевому наближенні. Для прикладу, наведемо вираз для граничної вимірності моделі тривимір-

ного ($d = 3$) $O(m)$ -симетричного магнетика з кубічною анізотропією [49]:

$$m_c = 4 - 4/3\tau + 0.29042005\tau^2 - 0.18967704\tau^3 + 0.19951035\tau^4 - 0.22465150\tau^5. \quad (4)$$

У цьому випадку гранична вимірність m_c розділяє два режими: якщо $m < m_c$, то система “не відчуває” анізотропії. Це явище відоме ще під назвою ізотропізації критичних флуктуацій. Однак за $m > m_c$ анізотропія приводить до зміни роду фазового переходу. Ряд (4) — це асимптотичний розклад, якщо $d = 3$ за псевдо- ϵ параметром τ . Такі ряди мають нульовий радіус збіжності. Для їх оцінки потрібно не лише покласти $\tau = 1$, але й застосувати спосіб, що б дозволив отримати надійні збіжні числові значення на підставі розбіжного ряду. Розроблення й удосконалення таких способів пересумовування асимптотичних рядів становить важливу частину інструментарію теоретико-польової РГ і було також одним із наших завдань [50]. Так, застосування методу пересумовування Паде–Бореля до ряду (4) дозволило нам оцінити $m_c = 2.862 \pm 0.005$. Зокрема така оцінка означає, що фазовий перехід у феромагнітних кристалах із трьома легкими осями ($m = 3$) відбувається за сценарієм переходу першого роду.

Значення граничних вимірностей важливі також для з'ясування можливої критичної поведінки складніших моделей. Зокрема величина (4) і подібні оцінки входять до умов стійкості різних типів мультикритичної поведінки систем з двома зв'язаними параметрами порядку з симетрією $O(m) \oplus O(n)$. Так, до систем з симетрією $O(2) \oplus O(1)$ належать анізотропні антиферомагнетики в зовнішньому полі, прикладеному уздовж осі анізотропії. Тут параметрами порядку є компоненти магнітних моментів підґраток вздовж поля та відповідні компоненти магнітних підґраток у перпендикулярних напрямках. Типові фазові діаграми таких магнетиків показані на рис. 3. Зокрема може спостерігатись бікритична точка, у якій зустрічаються дві лінії фазових переходів другого роду з лінією фазових переходів першого роду (рис. 3a), розділяючи три можливі фази. Інший сценарій також імовірний, коли мультикритична точка є тетракритичною, тобто зустрічаються чотири лінії фазових переходів другого роду, що розділяють чотири фази (рис. 3b).

Проведений аналіз стійкості різних типів мультикритичної поведінки показав, що тривимірні $O(1) \oplus O(2)$ системи повинні характеризуватись тетракритичною точкою [51, 52] однак вони перебувають дуже близько до границі стійкості такої мультикритичної поведінки. Це означає, що критична область, де спостерігається тетракритична поведінка, дуже вузька, а тому слабо досяжна в експериментах. Тому результати експериментальних і чисельних досліджень більше підтверджують першу діаграму.

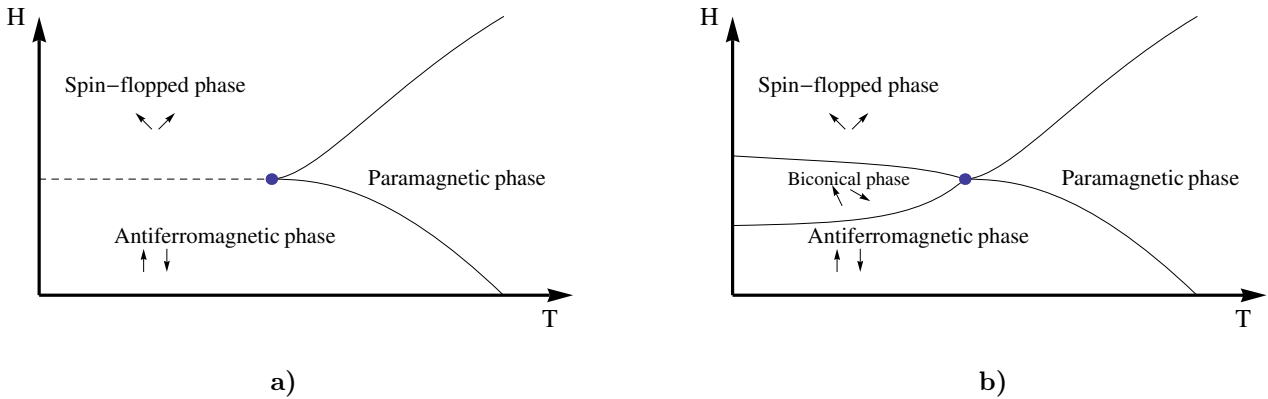


Рис. 3. Типові фазові діаграми анізотропних антиферромагнетиків у однорідному паралельному зовнішньому магнітному полі: **a)**: бікритична точка, **b)**: тетракритична точка. Тип фазової діаграми однозначно диктується значеннями граничних вимірностей $O(m) \oplus O(n)$ -симетричної моделі.

Іншою задачею, де аналіз граничних вимірностей допомагає отримати відповідь про рід фазового переходу, є фрустровані магнетики з неколінеарним упорядкуванням [53]. Класичними прикладами можуть бути шаруваті антиферромагнетики на трикутній ґратці (такі, як CsMnBr_3 , CsCuCl_3 , CsNiCl_3) та гелімагнетики Ho , Dy , Tb . Численні експериментальні дослідження й комп'ютерні симуляції не давали однозначної відповіді про рід фазового переходу в таких системах. Для теоретичного обґрунтування природи такого переходу ми дослідили значення вимірності m_c , нижче від якої у фрустрованих магнетиках неможливий фазовий перехід другого роду. Використовуючи ряди в шостому порядку перенормованої теорії збурень, ми отримали [54] $m_c \simeq 6.23$, що свідчить про відсутність фазового переходу другого роду для реальних систем, у яких $m = 2, 3$. Цей результат ми підтвердили, аналізуючи методами непертурбативної РГ, яка не використовує теорії збурень [22].

IV. ВПЛИВ СТРУКТУРНОГО БЕЗЛАДУ НА ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ У ДВОВИМІРНИХ МАГНЕТИКАХ

Усе більше зацікавлення теоретичним аналізом двовимірних систем спричинене прогресом в експериментальних методах створення й дослідження низьковимірних матеріалів, зокрема ультратонких плівок та двовимірних кристалів [55]. Варто також зауважити, що деякі двовимірні моделі дозволяють знайти точний розв'язок [56].

Розгляд питання про вплив структурного безладу на фазові переходи в низьковимірних системах дуже важливий, оскільки навіть виготовлений у лабораторних умовах матеріал може мати дефекти та домішки, що й уже казати про природні відповідники. Нижче ми зупинимося на двох явищах, спричинених наявністю немагнітних домішок у двовимірних ($d = 2$) магнетиках. Для означеності оберімо систему з гамільтоніаном (2) і вважаймо, що домішок небагато (концент-

рація “магнітної” компоненти $c \simeq 1$) і час їх релаксації до рівноважного стану суттєво більший від характерних часів релаксації спінової підсистеми — так званий “заморожений” безлад.

Наш перший результат стосується моделі Ізінґа. Відомо, що нескорельовані заморожені немагнітні домішки не змінюють роду фазового переходу в цій моделі, щобільше, провідна асимптотика термодинамічних і структурних функцій залишається такою ж, як і в моделі Ізінґа без домішок [57]. Однак як вплинуть на магнітне впорядкування можливі кореляції в розподілі немагнітних домішок? Для з'ясування цього питання ми дослідили ефекти, спричинені структурними неоднорідностями, скорельованими на великих відстанях r згідно зі степеневим законом

$$g(r) \sim r^{-a}, \quad (5)$$

із кореляційним параметром a [58]. Безлад, для якого загасання парної кореляційної функції домішка-домішка (5) характеризується параметром $a < d$, називається *далекосяжно скорельованим* (long-range correlated). Цілі значення параметра a дають змогу описати наявність протяжних дефектів у вигляді ліній ($a = d - 1$) чи площин ($a = d - 2$), випадково розкиданих у просторі, тоді як нецілі значення кореляційного параметра відповідають дефектам у вигляді складних кластерів фрактальної вимірності $d_f = d - a$. При значенні кореляційного параметра, що перевищує вимірність простору d , відтворюється випадок точкових нескорельованих дефектів. Розглядаючи вплив такого далекосяжно-скорельованого безладу на критичну поведінку двовимірної моделі Ізінґа, ми використали ферміонне зображення цієї моделі та застосували формалізм теоретико-польової РГ [59]. Цей формалізм дає змогу отримати точні результати для критичних показників фазового переходу в магнетовпорядкований стан у випадку нескорельованих немагнітних домішок: відомо, що провідна асимптотика залишається незмінною і структурний безлад спричиняє лише появу логарифмічних поправок [57]. Як показано в нашій роботі, далекосяжні кореляції немагнітних

домішок приводять до зміни критичних показників магнітного фазового переходу в моделі Ізінга, якщо $d = 2$ і $0.995 < a < 2$. Зокрема отриманий результат для критичного показника кореляційної довжини $\nu = 2/a + O((2-a)^3)$ узгоджується з попередніми припущеннями, одержаними в другому порядку по-

двійного $(4-d)$, $(4-a)$ -розкладів [58, 60]. Цей факт, а також наша оцінка для показника загасання парної кореляційної функції $1/4 - (2-a)/8 \leq \eta \leq 1/4$ свідчать про зміну класу універсальності магнітного фазового переходу.

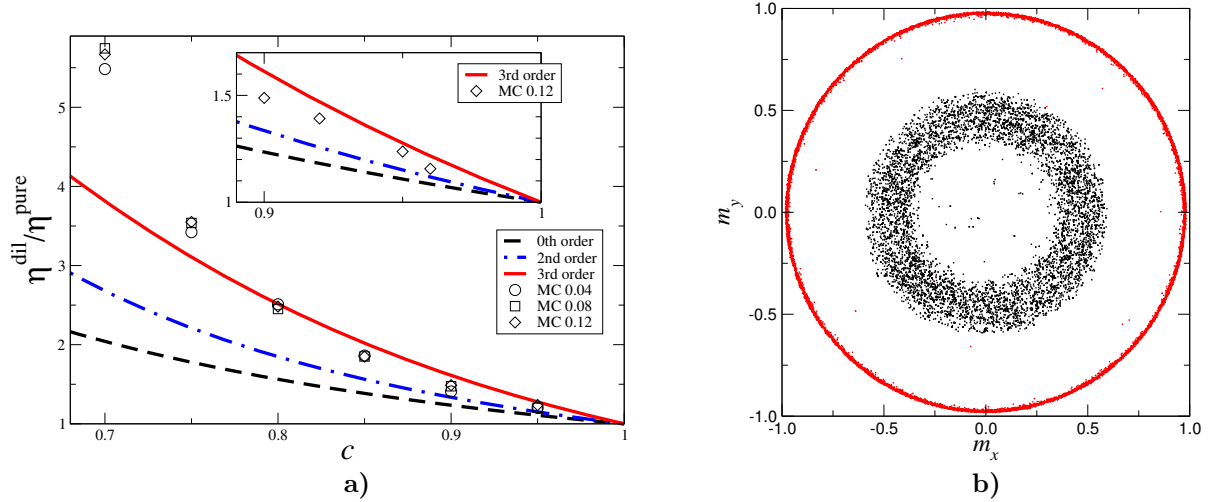


Рис. 4. Характеристики квазідалекосяжного впорядкування у двовимірній ХУ моделі. **а)**: зміна показника парної кореляційної функції зі зростанням концентрації магнітної компоненти c [20]. **б)**: значення x і y компонент намагніченості для кожного кроку МС для ґратки розміром 16×16 за концентрації спінів $c = 0.70$ і температури $k_B T/J = 0.1$ [23]. Зовнішнє кільце відповідає нерозведеній системі, $c = 1.0$.

На відміну від моделі Ізінга, яка має дискретну Z_2 -симетрію, фазовий перехід із виникненням параметра порядку (спонтанної намагніченості M) неможливий у двовимірній системі з неперервною симетрією. Однак у двовимірному світі відбувається низка дивовижних явищ, одне з них — так зване *квазі-далекосяжне* впорядкування, у яке переходить двовимірною системою з неперервною симетрією $O(2)$ під час топологічного фазового переходу, який описали Березинський та Костерліц і Таулес. За опис цього явища, що відбувається у двовимірних твердих тілах, магнетиках, бозе-плинах, рідких кристалах, останні два автори отримали Нобелівську премію у 2016 році. Квазідалекосяжне впорядкування характеризується відсутністю параметра порядку, $M = 0$, однак степеневим загасанням парної кореляційної функції: $G_2(R) \sim R^{-\eta}$. Як ще один приклад впливу структурного безладу на фазовий перехід наведемо наші результати дослідження двовимірної структурно неупорядкованої (розведеної) ХУ-моделі з гамільтоніаном (2), якщо $m = 2$. Зокрема в результаті наших досліджень виявилось, що показник η^{dil} залежить від концентрації домішок c і збільшується порівняно з показником η^{pure} нерозведеної системи [20]:

$$\eta^{\text{dil}} = \eta^{\text{pure}} \left(\frac{1}{c^2} + 0.73 \frac{1-c}{c^3} - 0.27 \frac{(1-3c+2c^2)}{c^4} \right). \quad (6)$$

Для порівняння розрахунків у різних порядках теорії

збурень із результатами МС-моделювання див. рис. 4а. Результат (6) справедливий не лише в термодинамічній межі, а і для скінченних, але достатньо великих систем [23]. Середнє значення намагніченості скінченної системи відмінне від нуля (див. рис. 4б) і спадає з кількістю спінів N як $M \approx cN^{-\eta^{\text{dil}}/4}$.

V. КОНЦЕПЦІЯ СКЕЙЛІНГУ У ФІЗИЦІ ПОЛІМЕРНИХ МАКРОМОЛЕКУЛ СКЛАДНОЇ ТОПОЛОГІЇ

Дослідження конформаційних властивостей полімерних макромолекул складної топології, утворених з'єднанням різної кількості полімерних ланцюгів — важлива ділянка сучасної фізики і хімії полімерів. Один із прикладів такої макромолекули, полімерна зірка, зображений на рис. 5. Зацікавлення теоретичним аналізом властивостей зіркових полімерів викликане низкою причин — це і промислові застосування (наприклад, у нафтовидобуванні чи фармацевтичній індустрії), і наявні результати експериментального дослідження фізичних властивостей добре означених об'єктів, монодисперсних як за ступенем полімеризації, так і за кількістю гілок. Поза тим, зіркові полімери становлять унікальний клас об'єктів м'якої речовини, проміжний між ланцюговими полімерами та колоїдами (пор., наприклад, рис. 5а і б).

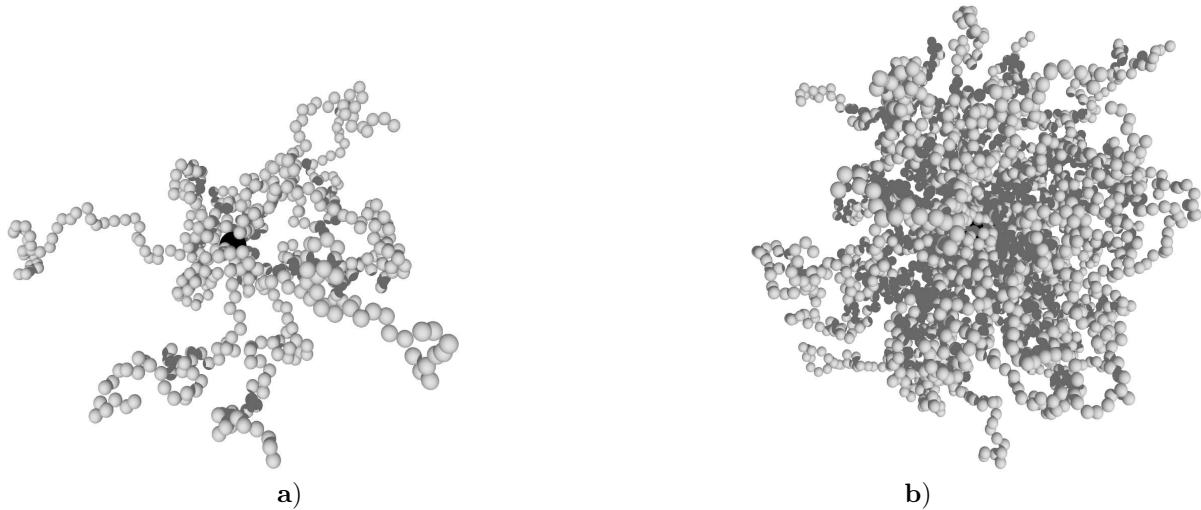


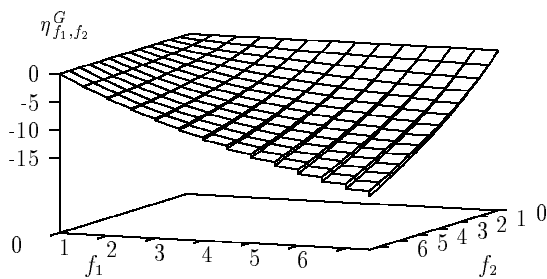
Рис. 5. Комп'ютерне моделювання полімерної зірки зі ступенем полімеризації (кількістю мономерів у ланцюзі) $N = 50$ і функціональністю (кількістю ланцюгів) $f = 10$ **a)** та $f = 50$ **b)** [61]. Зі збільшенням f полімерна зірка все менше схожа на фрактал і все більше — на тривимірний об'єкт — колоїдну частинку.

Подібно до того, як характерний розмір і кількість конфігурацій полімерного ланцюга в доброму розчиннику підлягають законам скейлінгу (1), кількість конфігурацій зіркового полімера пов'язана з його характерним розміром як [62]:

$$Z_f \sim z^{Nf} N^{\gamma_f - 1} \sim \mathcal{R}^{\eta_f - f\eta_2}, \quad (7)$$

тут γ_f, η_f — універсальні критичні показники. Однак тепер глобальними змінними, від яких залежать критичні показники, є не лише вимірність простору d , а й функціональність зіркового полімера f . Кількість глобальних змінних зростає під час розгляду багатосортних зіркових полімерів. Так, для зіркового кополімера (полімерної зірки, що складається з f_1 ланцюгів сорту 1 і f_2 ланцюгів сорту 2) кількість конфігурацій змінюється з \mathcal{R} як [26]:

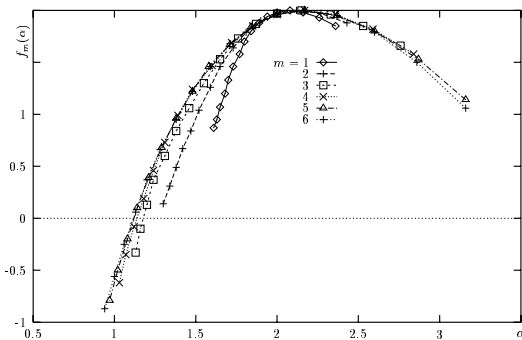
$$Z_{f_1 f_2} \sim \mathcal{R}^{\eta_{f_1 f_2} - f_1 \eta_{20} - f_2 \eta_{02}}, \quad (8)$$



a)

тут критичні показники $\eta_{f_1 f_2}$ залежать від трьох глобальних змінних d, f_1, f_2 .

Знання наведених вище законів (1), (7), (8) дозволило нам не тільки кількісно описати низку явищ, що відбуваються за участю полімерів, а й теоретично пояснити різні ефекти, для яких важлива статистика випадкових блукань. Серед таких ефектів — фазове розшарування суміші зіркових полімерів у пористому середовищі; зміна властивостей керованих дифузіїю реакцій із пастками, якщо пастка перебуває на полімерному ланцюгові або на полімерній зірці; виникнення мультифрактальної поведінки в макромолекулярних системах; зміна роду фазового переходу під час розчеплення молекули ДНК (unzipping transition) [26, 27, 29].



b)

Рис. 6. Універсальні характеристики скейлінгу складних полімерів та пов'язаних з цим явищ. **a)** Показник $\eta_{f_1 f_2}^G$ (8) двовимірної ($d = 2$) полімерної зірки, утвореної двома наборами f_1 і f_2 взаємоунікних випадкових блукань (random walks) [26]. Сходинки на “килими” відповідають різниці в значеннях, отриманих у різних теоретичних підходах. Значення на діагоналі відповідають показнику скейлінгу однорідної полімерної зірки η_{2f} (7). **b)** Спектральна функція, що кількісно описує явище дифузії частинок біля адсорбера у формі зірки з m полімерних ланцюгів [27].

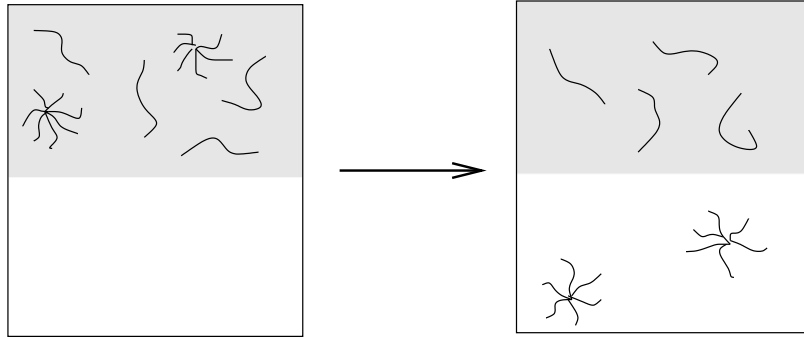


Рис. 7. Розділення суміші лінійних та зіркових полімерів у розчині, частина якого містить далекосяжно скорельовані структурні дефекти (показано сірим кольором). Рисунок узято з роботи [64].

На рис. 6 зображено результати теоретичного аналізу скейлінгу складних полімерів [26,27]. Рис. 6а зображає показник $\eta_{f_1 f_2}$ (8) двовимірної двосортної полімерної зірки як функцію кількості ланцюгів f_1 і f_2 , коли окремі ланцюги поведуться як випадкові блукання (їм дозволено перетинатися). У фізиці макромолекул така ситуація відповідає так званій Θ -точці (аналогічній точці Бойля в термодинаміці, коли реальний газ поводить себе як ідеальний). Однак статистиці випадкових блукань підлягають і інші задачі, зокрема задача про дифузію, коли блукання описує траєкторію частинки. Така інтерпретація дозволила застосувати результати для показників $\eta_{f_1 f_2}$ (і теорію, що дає змогу отримати ці результати) для опису явища дифузії частинок біля полімерного адсорбера [27]. Виявляється, що кількісні характеристики такого явища описуються мультифрактальними спектрами [63], які, як правило, важко піддаються аналітичному опису й переважно аналізуються числовими методами. Рис. 6б показує один із результатів аналітичних розрахунків для так званої спектральної функції, що кількісно описує дифузію частинок біля адсорбера у формі зірки з m полімерних ланцюгів. Зауважимо, що результати для показників $\eta_{f_1 f_2}$ (рис. 6а) одержані за допомогою методу теоретико-польової РГ. Таким чином, їх застосування для обчислення спектральної функції прокладає місток між теорією поля та теорією мультифракталів, що само собою є цікавим результатом, який може мати добрі перспективи (див. також розділ VIII).

VI. КОНФОРМАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОЛІМЕРІВ У ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Однією з важливих проблем сучасної фізики полімерів є вплив структурних неоднорідностей (домішок) у середовищі на універсальні конформаційні властивості молекул. Зокрема важливо розуміння поведінки макромолекул у колоїдних розчинах чи поблизу мікропористих мембран. Так, приклад неупорядкованого (пористого) середовища можна знай-

ти, досліджуючи конформаційні особливості протеїнів у клітинах живих організмів. Використовуючи дані рентгенівської кристалографії та криоелектронної мікроскопії неглобулярних протеїнів у природних (зокрема клітинних) середовищах, знайшли, що більшість макромолекул характеризуються універсальними параметрами розміру та форми, які відрізняються від відповідних значень в ідеальних чистих розчинниках.

Флуктуації густини домішок часто приводять до значних просторових неоднорідностей та утворення складних пористих структур фрактальної природи. Вплив таких неоднорідностей на властивості полімерних макромолекул можна досліджувати в межах моделі далекосяжно скорельованого безладу, описаного в розділі IV.

Застосовуючи підхід теоретико-польової РГ, у роботі [30] ми проаналізували вплив далекосяжно скорельованого безладу (5) на універсальні показники (1) та отримали числові значення показників у новому класі універсальності. Важливо зазначити, що наявність скорельованих дефектів складної структури спричиняє зростання ефективного розміру полімерного клубка (збільшення значення показника ν), і цей ефект посилюється зі зростанням кореляцій безладу.

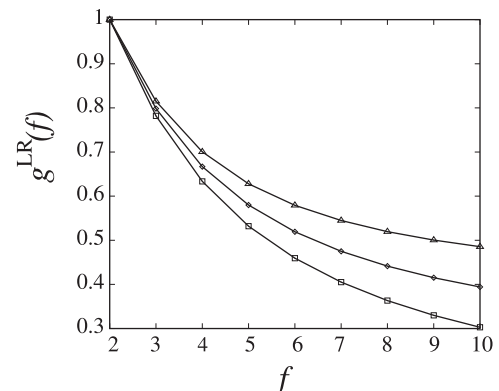


Рис. 8. Відношення $g^{LR}(f)$ як функція f за різних значень кореляційного параметра $\delta = 4 - a$: $\delta = 0.1$, $\delta = 0.5$, $\delta = 1.0$ знизу вгору. Рисунок узятий з роботи [66].

Дослідження властивостей f -гілкових зіркових полімерів у далекосяжно скорельованому безладі [31, 64] вказує на нетривіальність впливу безладу на спектр зіркових показників γ_f у виразі (7). Зокрема, за $f = 1, 2$, що відповідає лінійним полімерним ланцюжкам, значення показника γ зростає із зростанням кореляцій безладу, якщо ж $f > 2$, то значення показника стає меншим порівняно з відповідним значенням у чистому розчині. На основі отриманих результатів можна передбачити цікаве явище розділення суміші лінійних та зіркових полімерів однакової молекулярної ваги (однакової кількості мономерів) у розчині, частина якого перебуває в пористому середовищі за наявності скорельованих дефектів (див. рис. 7). У тій частині розчину, що перебуває у скорельованому пористому середовищі, концентрація лінійних полімерів зростатиме, тоді як для зіркових полімерів, навпаки, енергетично вигідніше перебувати в розчині з тією ж концентрацією нескорельованих домішок.

Цікаво зазначити, що відношення характерних розмірів (радіусів гірації) лінійного полімерного ланцюжка та f -гілкового зіркового полімера $g(f) \equiv \langle R_{gstar}^2 \rangle / \langle R_{gchain}^2 \rangle$ є також універсальною величиною. Щобільше, ця величина є експериментально спостережуваною і пов'язана з відношенням похідних від інтенсивностей розсіяння на зіркових та лінійних полімерах

$$I'(k)_{star} / I'(k)_{chain} = g(f) + \dots \quad (9)$$

за малих значень хвильового вектора k . Відомо [65], що в чистих розчинах за будь-якого $f < 3$, відношення $g(f)$ є меншим за одиницю, а отже ефективний розмір галуженого полімера завжди менший, аніж розмір полімерного клубка тієї ж молекулярної ваги. У праці [66] ми отримали значення відношення характерних розмірів лінійного полімерного ланцюжка та f -гілкового зіркового полімера за наявності далекосяжно скорельованого безладу, $g^{LR}(f)$. Як видно із наших результатів, зображених на рис. 8, наявність структурного безладу приводить до зростання цієї величини зі зростанням скорельованості безладу. А отже, ефективний розмір галуженої полімерної макромолекули в пористому середовищі зростає порівняно з негалуженим полімерним ланцюгом.

VII. ПОЛІМЕРИ СКЛАДНОЇ ТОПОЛОГІЇ І СТАТИСТИКА ФОРМУВАННЯ ПЕТЕЛЬ У МАКРОМОЛЕКУЛАХ

Утворення петель у полімерних макромолекулах відіграє важливу роль у низці біохімічних процесів, таких, як стабілізація глобулярних протеїнів та компактифікація молекул ДНК в клітинних ядрах. Важливе явище локалізації хроматину в компактних ділянках, відомих як хроматинові території, визначається утворенням множинних петель у хроматинових нитках. Численні аналітичні та чисельні дослідження присвячено аналізу процесів петлеутворення в полімерних макромолекулах. Також інтенсивно вивча-

ють конформаційні властивості окремих петель (кільцевих полімерів), що, своєю чергою, є важливими з огляду на те, що молекули ДНК деяких мікроорганізмів мають форму замкнутих петель.

Установлено, що ймовірність утворення петлі розміру l підлягає закону скейлінгу:

$$P \sim l^{-\lambda}, \quad (10)$$

де λ — універсальний показник, що залежить лише від вимірності простору. У випадку ідеального гауссового ланцюжка $\lambda = d/2$. Однак ефект виключеного об'єму між мономерами приводить до того, що ймовірність утворення петлі, а відповідно і значення показника λ , залежить від розташування петлі вздовж полімерного ланцюжка [67] (див. рис. 9).

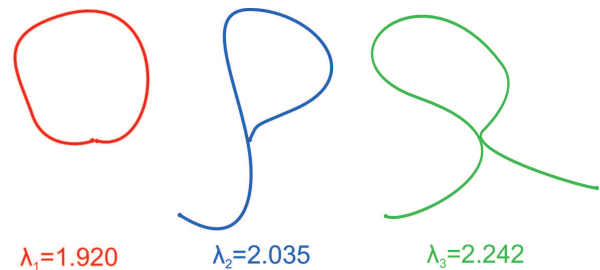


Рис. 9. Схематичне зображення різних типів утворення петель уздовж полімерного ланцюжка та відповідні значення критичних показників у виразі (10), отримані в роботі [67].

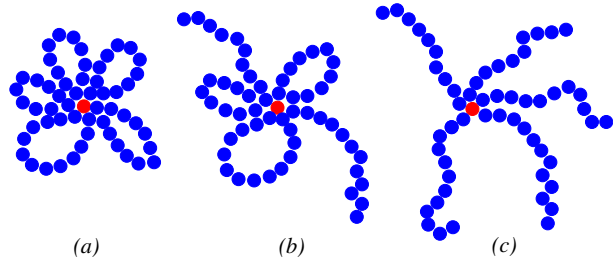


Рис. 10. Схематичне зображення полімерних систем різної топології. Рисунок узято з роботи [72].

У роботі [68] ми проаналізували статистику утворення петель у полімерних макромолекулах у розчині в наявності далекосяжно скорельованого безладу, описаного в попередньому підрозділі. Наші результати вказують на те, що скорельовані дефекти приводять до збільшення значень показників λ порівняно з чистим розчином, а отже, ймовірність утворення петель у полімерних макромолекулах знижується за наявності структурних дефектів.

Іншим цікавим питанням є вплив топології замкненої петлі на конформаційні властивості макромолекули. Зручним параметром для порівняння ефективного лінійного розміру кільцевого та лінійного полімерів однакової молекулярної ваги є відношення їхніх радіусів гірації, що, як і відношення розмірів лінійного та

зіркового полімерів (9), є експериментально спостережуваною величиною. Установлено, що в ідеалізованому гауссовому випадку ця величина набуває значення $1/2$ [65], тоді як ефект виключеного об'єму спричиняє її зростання [69, 70]. У роботі [71] ми проаналізували вплив далекосяжно скорельованого безладу на це відношення і показали, що ефективний розмір кільцевого полімера зростає порівняно з розміром лінійної макромолекули зі зростанням кореляцій безладу.

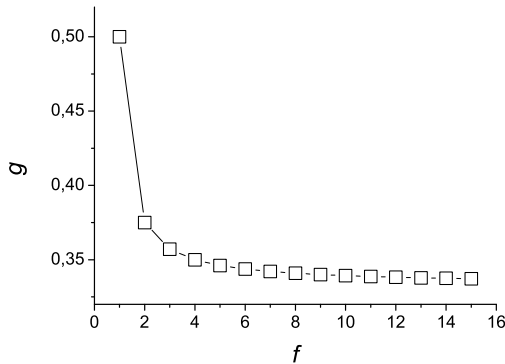


Рис. 11. Відношення радіусів гірації квіткових та зіркових полімерів однакової загальної молекулярної ваги як функція параметра галуження f . Рисунок узят з роботи [72].

Із цього погляду цікаво дослідити конформаційні властивості полімерної системи складної топології, що містить загалом f_1 петель і f_2 лінійних ланцюжків однакової загальної довжини (див. рис. 10). Таку модель “квіткових” полімерів запропоновано в нашій роботі [72]. Ми вивчили, зокрема, поведінку відношення радіусів гірації квітового та зіркового полімерів $g \equiv \langle R_{g, \text{rosette}}^2 \rangle / \langle R_{g, \text{star}}^2 \rangle$ із $f_1 = f$ та $f_2 = f$ відповідно. Як видно з рис. 11, ефективний розмір квітового полімера стає все більш компактним порівняно із зірковим полімером тієї ж молекулярної ваги зі зростанням параметра галуження, що й відповідає експериментально спостережуваному явищу компактифікації макромолекул із множинним петлеутворенням.

VIII. МУЛЬТИФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОЛІМЕРНОГО ЛАНЦЮЖКА НА ПЕРКОЛЯЦІЙНОМУ КЛАСТЕРІ

Досліджуючи фізичні процеси на складних фрактальних структурах, часто стикаємось із ситуацією співіснування набору сингулярностей, пов'язаних із множинами різних фрактальних вимірностей [73]. У таких задачах необхідно враховувати весь спектр критичних показників, що характеризують різні моменти розподілу спостережуваних величин. Такі властивості зазвичай співвідносяться з терміном “мультифрактальність” [74]. Спектр мультифрактальних вимірностей можна використати для опису тонких геометричних властивостей фрактального об'єкта, які не можна

відобразити в рамках лише фрактальних вимірностей. Справді, кластери згенеровані в результаті агрегації, обмеженої дифузією (ОДА) [75], та перколяційні кластери мають однакову фрактальну вимірність, але різну геометричну структуру. Це було зазначено, зокрема, під час дослідження мультифрактальності розподілу напруг на перколяційних кластерах та розподілу ймовірностей зростання в ОДА. Мультифрактальні властивості виникають під час аналізу різноманітних явищ, для прикладу, турбулентності в хаотичних динамічних системах, динаміки серцебиття і т.д.

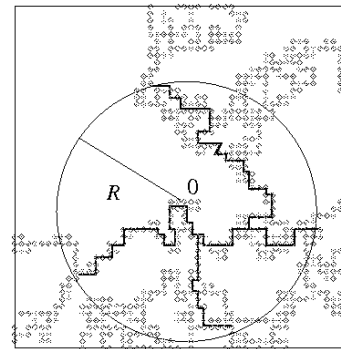


Рис. 12. Різні траєкторії SAW із фіксованою відстанню R між кінцями на перколяційному кластері, якщо $d = 2$. Рисунок узят з роботи [78].

Із цього погляду цікаво розглянути властивості блукань із самоуниканнями (SAWs) на фрактальних кластерах. Відомо, що скейлінгові властивості SAWs у таких випадках суттєво змінюються. Справді, знайдено нові скейлінгові показники для SAWs на килимі Серпінського. Схожу ситуацію спостерігаємо, досліджуючи SAWs на неупорядкованих ґратках із концентрацією p структурних дефектів, дуже близькою до порога перколяції p_c . У цьому випадку в системі виникає перколяційний кластер із дозволених вузлів, що має фрактальну структуру. Значимо, що модель перколяції є своєрідною парадигмою для дослідження неупорядкованих систем [76]. Тут закон скейлінгу (1) виконується з показником $\nu_{p_c} \neq \nu_{\text{SAW}}$.

Якщо властивості SAWs на перколяційних кластерах були об'єктом значної кількості чисельних та аналітичних досліджень, то висвітленню мультифрактальності цієї задачі було приділено недостатньо уваги. У наших працях [77] показано, що недостатньо лише показника ν_{p_c} , щоб повністю описати властивості SAWs на перколяційному кластері. Натомість існує цілий спектр мультифрактальних показників $\nu^{(q)}$:

$$\nu^{(q)} = \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2q} \right) \frac{\varepsilon}{42} + \left(\frac{589}{21} - \frac{397}{14 \cdot 2q} + \frac{9}{4q} \right) \left(\frac{\varepsilon}{42} \right)^2 + O(\varepsilon^3), \quad (11)$$

де розклад проведено за $\varepsilon = 6 - d$ — відхиленням вимірності простору від верхнього критичного значення. Отримання числових оцінок на підставі цього розкладу потребує застосування процедури пересумування, див. також розділ III.

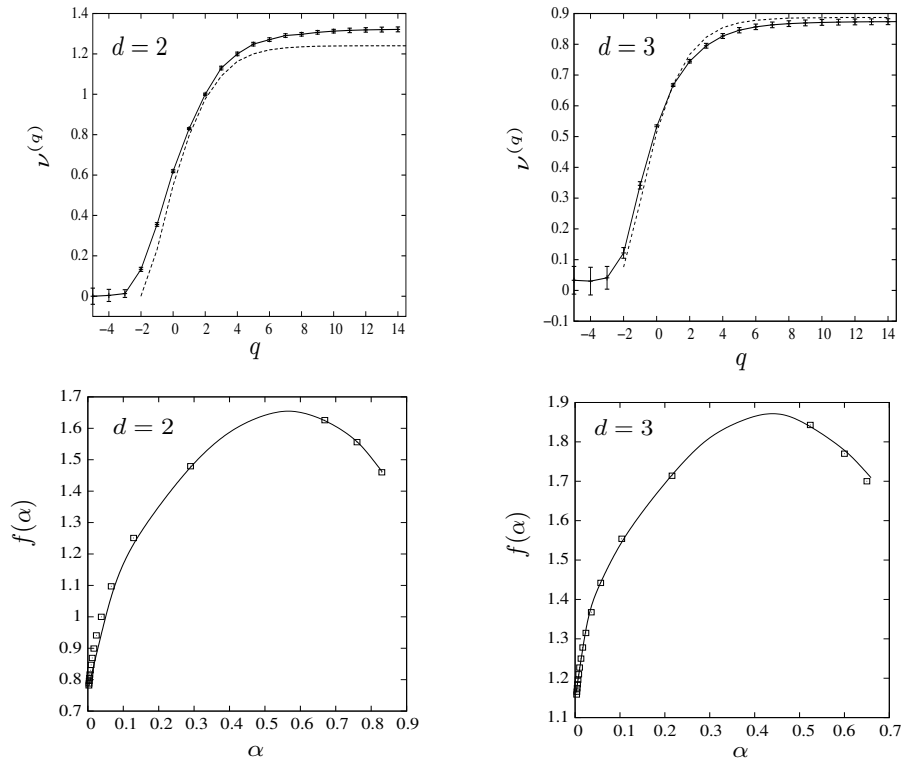


Рис. 13. Верхній рядок: спектр мультифрактальних показників $\nu^{(q)}$ як функція q , якщо $d = 2, 3$ (суцільні криві — комп’ютерне моделювання, штриховані — Паде-апроксимація аналітичних виразів (11)). Нижній рядок: спектральна функція $f(\alpha)$, якщо $d = 2, 3$, максимальне значення $f(\alpha)$ відповідає фрактальній вимірності носія (основи перколяційного кластера). Рисунок узято з роботи [78].

У нашій наступній праці [78] цю задачу проаналізовано за допомогою чисельного підходу в $d=2$ - та 3-вимірних просторах. Для побудови перколяційних кластерів на неупорядкованих ґратках застосовано алгоритм Хошена-Копельмана [79], а для побудови траєкторії SAW використано збідено-збагачений метод зростаючого ланцюжка [80]. Таким чином, побудовано всеможливі траєкторії з фіксованою відстанню R між кінцями, як схематично зображено на рис. 12. Увівши вагу $w(i)$ для кожного вузла i перколяційного кластера, що характеризує ймовірність проходження траєкторії через заданий вузол, установили, що різні моменти розподілу цієї ваги $M^{(q)} = \sum_{i \in R} w(i)^q$ підлягають законам скейлінгу з показниками $\nu^{(q)}$, що добре узгоджуються з теоретичними передбаченнями (11), див. Рис. 13. Отже, ми аналітично й чисельно показали мультифрактальні властивості моделі SAW на фрактальних перколяційних кластерах.

ІХ. ІДЕЇ СТАТИСТИЧНОЇ ФІЗИКИ В МОДЕЛЮВАННІ Й АНАЛІЗІ ЕФЕКТИВНОСТІ ТРАНСПОРТНИХ МЕРЕЖ

Використовуючи апарат статистичної фізики, наук про дані та складні мережі, ми дослідили топологію мереж громадського транспорту (ГТ), їхню стійкість

до зовнішніх збурень, взаємозв’язок стійкості та топології, а також змоделивали еволюційні процеси, що можуть привести до спостережуваних структур.

Наш аналіз базувався на зображенні мереж ГТ у вигляді графів. Вузлами таких графів можна обрати зупинки маршрутів, а кожну пару вузлів-зупинок поєднати зв’язком, якщо вони є послідовними зупинками хоча б для одного маршруту. Дослідження топології такої мережі розпочато з аналізу співвідношення кількості “звичайних” та “центральных” вузлів графа. Оскільки така дискретна класифікація суб’єктивна, то розглянуто поняття центральності вузлів і проаналізовано форми їх розподілів. Одним із прикладів такої центральності є ступінь k_i вузла i — кількість зв’язків, приєднаних до нього. За характером розподілу ступенів вузлів $p(k)$ мережі можна судити про її властивості й навіть оцінити спосіб еволюції. Поширеним типом розподілів ступенів у складних мережах різної природи є степеневий [14]

$$p(k) \sim k^{-\lambda}. \tag{12}$$

Такі мережі прийнято називати безмасштабними у зв’язку з відсутністю характерного масштабу. На відміну від мереж з експоненційним розподілом ступенів вузлів, у безмасштабних мережах допускається можливість існування вузлів із надзвичайно великими ступенями — габів, що можуть контролювати мережу.

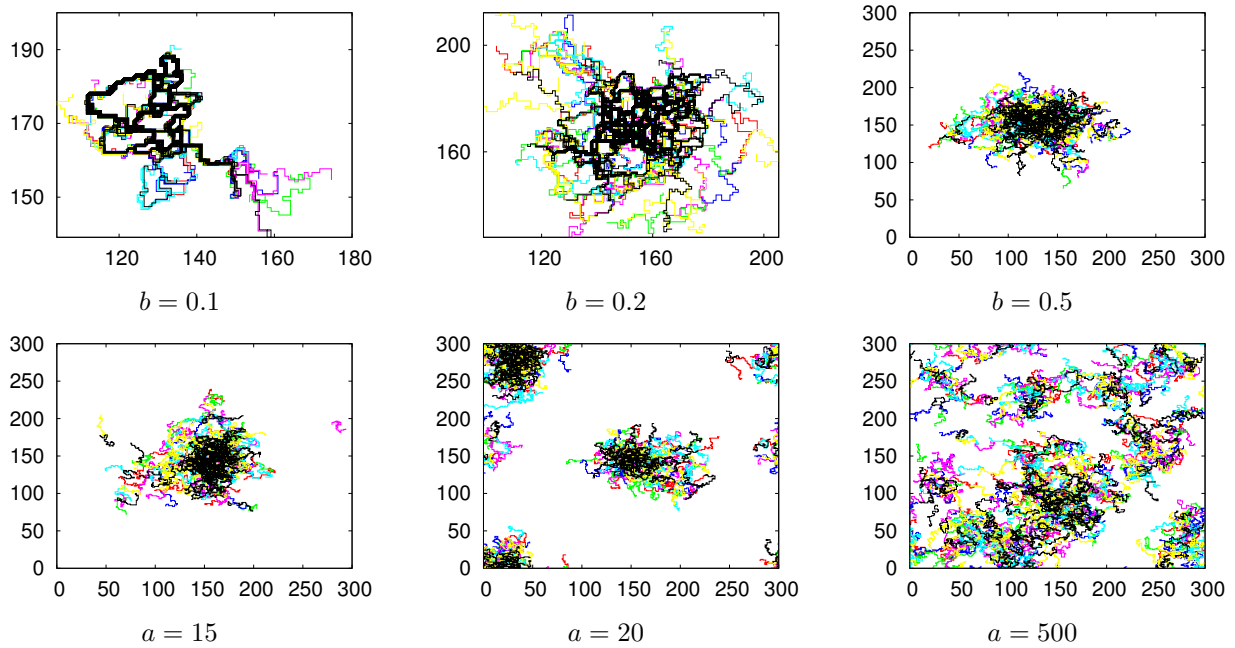


Рис. 14. Мережі ГТ різних модельованих міст розміру 300×300 із $R = 1024$ маршрутами по $S = 64$ станції кожен. Перший рядок: $a = 0$, $b = 0.1 \div 0.5$. Другий рядок: $b = 0.5$, $a = 15 \div 500$. Зі зростанням b маршрути покривають усе більшу площу. Зростання a приводить до кластеризації мережі. Рисунок узято з [35].

У межах проведеного дослідження проаналізовано властивості мереж громадського транспорту 14 великих міст світу з урахуванням усіх доступних даних про різні типи транспорту. Показано, що розподіл ступенів вузлів може характеризуватися як степеневим, так і експоненційним загасанням, що може свідчити про різні класи механізмів еволюції ГТ в цих містах. Базуючись на цих результатах, ми запропонували опис еволюції мереж ГТ [35], побудований на відомій моделі з фізики полімерів — блукання із самоуніканням. У цьому підході мережу вулиць міста розглядали як квадратну ґратку розміром $X \times X$. Перший маршрут фіксованої довжини S прокладали випадковим блуканням із довільно вибраної точки “міста”. Початок x_0 кожного наступного маршруту вибирали з імовірністю

$$p \sim k_{x_0} + a/X^2, \quad (13)$$

а кожному наступну зупинку маршруту — з імовірністю

$$p \sim k_x + b, \quad (14)$$

див. рис. 14. Показано, що ряд властивостей згенерованих мереж (розподіли ступенів вузлів, розподіли довжин найкоротших шляхів) відтворює відповідні характеристики реальних. Обґрунтовано причини появи універсальності в поведінці таких характеристик.

Ще один приклад, узятий із статистичної фізики, — задача про перколяцію — дозволив нам дослідити стійкість мереж ГТ до випадкових збоїв та спрямованих атак (вилучення їхніх складників). Ми змоделювали різні сценарії атак: від випадкових, вилучаючи вузли чи зв'язки мережі випадковим способом, до спрямованих, послідовно усуваючи найважливіші складники, див. рис. 15.

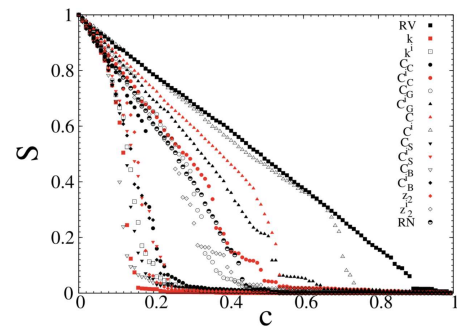


Рис. 15. Залежність розміру S найбільшої зв'язної компоненти мережі ГТ Парижа від частки c вилучених вузлів за різних сценаріїв атак. Кожен сценарій атаки відображений відповідним символом на рисунку: заповнені чорні квадрати відповідають випадковому сценарію, а заповнені червоні — сценарію, за якого першими видаляються вузли з найбільшими ступенями. Див. [36] для детальнішого опису.

Виявилось, що більшість мереж ГТ надзвичайно стійкі до випадкових атак, водночас вони дуже вразливі до спрямованих сценаріїв руйнування [35,36]. Запропоновано критерії відбору важливих вузлів мережі та спосіб передбачення стійкості мережі до атак різних типів.

Х. УНІВЕРСАЛЬНІСТЬ, НУЛІ СТАТИСТИЧНОЇ СУМИ Й ПОРУШЕННЯ ТЕОРЕМИ ЛІ-ЯНґА ДЛЯ МОДЕЛІ ІЗІНґА НА БЕЗМАСШТАБНІЙ МЕРЕЖІ

Започаткований у працях Нобелівських лауреатів Цзун-дао Лі і Чженьнін Янґа, а також Майкла Фішера, аналіз розподілу нулів статистичної суми в комп-

лексній площині становить сьогодні одну з основ теорії фазових переходів [81–83]. Нулі Лі-Янга розраховують за дійсної температури T в площині комплексного магнітного поля H , тоді як нулі Фішера аналізують в площині комплексної температури. У термодинамічній границі $N \rightarrow \infty$ нулі формують неперервні криві в комплексній (H чи T) площині. Аналізуючи розташування і скейлінг нулів, у формалізмі Лі-Янга-Фішера здійснюють альтернативний опис критичної поведінки всієї системи і знаходять її універсальні характеристики.

Результати, які ми отримали, стосуються аналізу нулів Лі-Янга і Фішера для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі [85,86]. Приємно зазначити, що наші роботи є першими, у яких такий формалізм застосовано для аналізу критичної поведінки на безмасштабній мережі. Зацікавлення вивченням критичної поведінки і фазових переходів у спінових моделях на складних мережах викликано низкою причин. Так, у задачах соціофізики структура складної мережі відповідає реальним соціальним зв'язкам між індивідуумами. Подібно, під час моделювання магнітних наносистем їхня структура набагато ліпше описується топологією мережі, а не ґратки. Зрештою, розгляд критичних явищ на складних мережах становить і чисто академічний інтерес, адже, як показали, зокрема, і наші дослідження, такі явища суттєво відрізняються від їхніх аналогів на ґратках.

Наш аналіз стосувався моделі Ізінга, спіни S_i якої локалізовані на вузлах i відпаленої безмасштабної мережі з функцією розподілу ступенів вузлів, згідною за степеневим законом (12). Наявність відпаленого безладу приводить до того, що усереднення за спінами та конфігураціями зв'язків потрібно виконувати для статистичної суми Z , а не її логарифму. Після усереднення за випадковими зв'язками "взаємодія" в Z стає сепарабельною [84]:

$$Z(T, H) = \text{Tr}_S \exp \left(\frac{1}{2N \langle k \rangle T} \sum_{i \neq j} S_i S_j k_i k_j + \frac{H}{T} \sum_i S_i \right). \quad (15)$$

Своєю чергою, це дає змогу отримати точне інте-

гральне представлення для функції $Z(T, H)$ і проаналізувати її у комплексній площині. Зокрема, ми знайшли скейлінгові співвідношення для координат нулів Лі-Янга та Фішера скінченної системи з N частинок:

$$H_j(N, T = T_c) \sim \left(\frac{j}{N} \right)^\sigma, \quad T_j(N, H = 0) \sim \left(\frac{j}{N} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}}, \quad (16)$$

де j – порядок нуля, $\sigma = \frac{\beta\delta}{2-\alpha}$, а α, β, δ – критичні показники фазового переходу в магнетовпорядкований стан. Подібно, аналізуючи рух нулів Фішера за змінного дійсного магнітного поля (типова картина розташування нулів показана на рис. 16а), ми знайшли значення кутів φ, ψ , що характеризують розташування ліній нулів. Отриманий результат,

$$\sigma = \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}, \quad \psi = \frac{\pi(\lambda - 3)}{2(\lambda - 2)}, \quad \varphi = \frac{\pi(\lambda - 3)}{2(\lambda - 1)}, \quad (17)$$

$$3 < \lambda < 5,$$

свідчить про те, що в ділянці проміжних значень λ універсальні значення кутів і показника σ стають λ -залежними, а отже і сама гіпотеза про універсальність критичної поведінки зазнає змін, коли така поведінка виявляється на безмасштабній мережі.

Відомо, що для моделі Ізінга на ґратці справедлива теорема Лі-Янга про одичне коло. Відповідно до цієї теореми, нулі статистичної суми мають чисто уявні координати в комплексній H -площині (чи, відповідно, розташовуються на колі одичного радіуса в площині e^H). Про важливість цієї теореми свідчить і те, що часом її називають фундаментальною теоремою теорії фазових переходів. Як виявилось в результаті нашого аналізу [85, 86], нулі Лі-Янга для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі в діапазоні $3 < \lambda < 5$ не задовільняють теорему про одичне коло, тоді як за $\lambda \geq 5$ усі нулі є чисто уявними, див. рис. 16с. Це неочікувано, оскільки означає, що роль показника загасання λ (для мереж) та вимірності d (для ґраток), які контролюють універсальні характеристики фазових переходів і є глобальними параметрами, не еквівалентна на рівні нулів Лі-Янга.

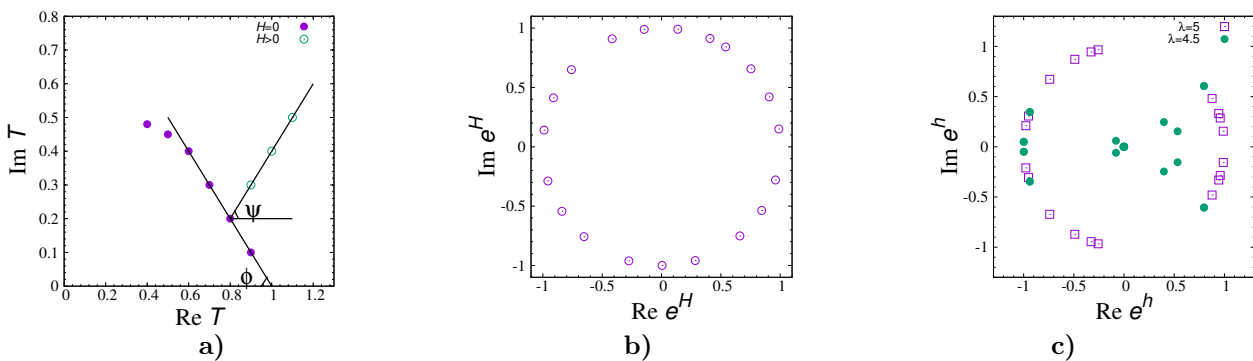


Рис. 16. а): Нулі Фішера в комплексній T -площині. Кут φ є кутом між лінією конденсації нулів Фішера та дійсною осі. Кут ψ описує рух нулів Фішера зі зміною дійсного зовнішнього поля H . Рух першого нуля зі збільшенням магнітного поля H зображено колами. б), с): Нулі Лі-Янга моделі Ізінга на двовимірній ґратці та на безмасштабній мережі ($h \sim H^\sigma$). Якщо $\lambda < 5$, то теорема Лі-Янга порушується: координати нулів не лежать на колі одичного радіуса [85].

XI. СОЦІОФІЗИКА — ФІЗИЧНІ ПІДХОДИ ДО ВИВЧЕННЯ СУСПІЛЬНИХ ЯВИЩ

Поява мобільного зв'язку суттєво вплинула на способи дослідження соціальних систем [87]. Велика кількість інформації про кожного абонента зберігається на серверах мобільних операторів. Пізніше ці дані можуть бути використані для різних досліджень. Прикладом такого підходу є ініціатива D4DChellenge [88], яку провів мобільний оператор Orange у Кот-д'Івуарі. Надаючи дослідникам доступ до анонімізованих даних спілкування, організатори ініціативи попросили провести дослідження довільного кола задач, результати яких могли би бути використаними для поліпшення добробуту населення країни. База даних складалася з двох частин: даних про кількість дзвінків усіма парами антен мобільного оператора Orange протягом 5 місяців та десяти менших баз даних, кожна про переміщення 50 000 випадковим способом вибраних абонентів протягом двох тижнів.

До участі в цьому проекті долучилося чимало фізиків, зокрема і представники нашого Інституту у співпраці з науковцями університету Аалто (Фінляндія). Хоча закони взаємодії між учасниками соціуму мають нефізичний характер, глобальна поведінка великою мірою нагадує закони, які можна спостерігати в природничих науках. Одним із таких прикладів є закон соціальної гравітації [89]. Суть його полягає в тому, що міста (населені пункти) притягаються між собою за законами, подібними до закону гравітації. Різниця полягає у тому, що саме вважається масою і що характеризує взаємодію. Аналогом маси може бути населення міста чи його економічні показники (бюджет), а аналогом сили притягання — трафік чи товарообіг між ними. Було показано, що різні характеристики взаємодій f_{ij} між містами i та j можна описати залежністю

$$f_{ij} = \frac{m_i m_j}{d_{ij}^\alpha}, \quad (18)$$

де m_i є аналогом маси міста i , d_{ij} позначає відстань між ними, а α — показник степеня.

На рис. 17 показано емпіричні результати [90], які ми отримали в межах ініціативи D4DChellenge. Аналогом маси міста вважали загальну кількість вхідних дзвінків до чи вихідних дзвінків від абонентів у межах населеного пункту. Використовуючи інформацію про дзвінки з прив'язкою до кожної антени мобільного оператора, дослідили питання соціальної гравітації в межах найбільшого населеного пункту — міста Абіджан (5 мільйонів індивідуальних переміщень та 109 мільйонів дзвінків між 298 антенами в межах міста, що відповідає 31% від усіх дзвінків та 50% від усіх переміщень у базі даних). Досліджено два типи взаємодій між населеними пунктами (точками): фізичне

переміщення (кількість переміщень m_{ij} між точками i та j) та спілкування (кількість дзвінків c_{ij} між цими точками).

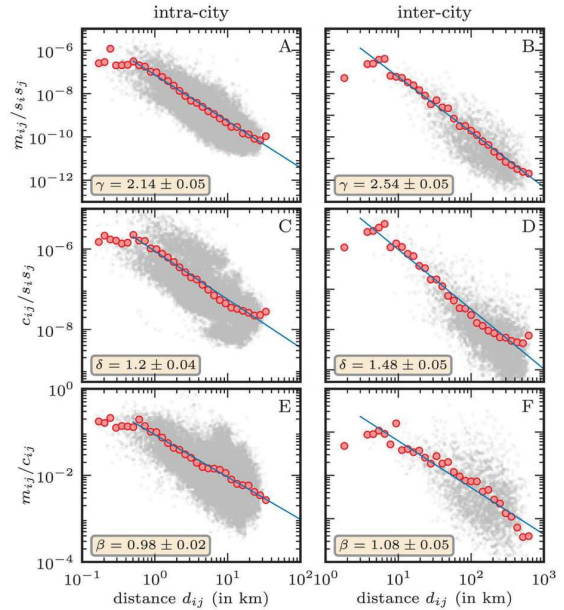


Рис. 17. Графік (кількість переміщень) між точками i та j , нормований на добуток мас точок $m_{ij}/(s_i s_j)$ (верхній рядок), нормований мобільний трафік (кількість дзвінків) $c_{ij}/(s_i s_j)$ (середній рядок) та кількість переміщень із розрахунку на один дзвінок між точками i та j як функція відстані між точками d_{ij} . Рисунок з лівого боку відповідають гравітації між містами, з правого — між різними точками в межах населеного пункту. Рисунок узято з роботи [90].

Як видно з рис. 17 (верхній рядок) середній трафік, нормований на добуток мас точок, досить добре описується степеневу функцією (18) з показником³ γ , значення якого дещо більше за 2. Спостережено, що цей показник більший для міжміської (inter-city), ніж для міської (intra-city) гравітації. Аналогічну картину отримано для мобільного трафіку (див. рис. 17, середній рядок). Кількість дзвінків між двома містами чи точками в межах міста c_{ij} , нормована на добуток відповідних мас, описується степеневим загасанням із відстанню з показником δ , дещо більшим за одиницю. Показник δ є дещо більшим для міжміської, ніж для міської системи.

Повертаючись до поставленого завдання, а саме, поліпшення добробуту, бачимо, що прояви закону соціальної гравітації можуть мати застосування для оцінки й передбачення трафіку між різними точками. Показано (рис. 17, нижній рядок), що якість такої оцінки можна поліпшити, використовуючи дані мобільного спілкування і зробивши поправку на відстань між ними.

³Тут показник степеня позначено γ для того, щоб розрізнити дві різні характеристики: переміщення (γ) та мобільний трафік (δ).

ХІІ. НАУКОМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ ПРИВАБЛИВОСТІ ЖУРНАЛЬНИХ СТАТЕЙ

Однією з наукометричних задач, якою ми займалися спільно з науковцями університетів Ковентрі (Англія) та Лотарингії (Нансі, Франція), було вивчення “привабливості” наукових публікацій шляхом аналізу статистики їх завантажуваності онлайн [91]. На основі даних про специфічну активність користувачів у мережі Інтернет розраховуються різноманітні індикатори, покликані характеризувати визнаність ученого, авторитет установи, популярність тематичного напрямку тощо. Такі показники названі альтметриками [92], хоча за своєю природою вони не можуть виступати альтернативою цитат-показників, а скоріше є їх доповненням при спробі якомога всеохопніше охарактеризувати об’єкт. Так, статистика завантажень статей з веб-сторінки (її ще відносять до показників використовуваності) є індикатором зацікавлення потенційного читача ще до їх прочитання, тому нічого не говорить безпосередньо про наукову їхню значущість.

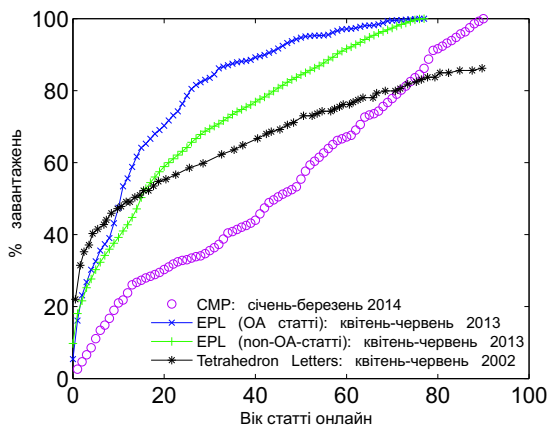


Рис. 18. Відносний кумулятивний розподіл завантажень відповідно до віку статей у журналах EPL, Tetrahedron Letters (дані з роботи [93]) та Condensed Matter Physics (CMP) на основі даних за вибрані три місяці.

Використовуючи дані про завантаження повних текстів статей журналу Europhysics Letters (EPL) з офіційної веб-сторінки, опублікованих протягом більше 6.5 років, ми описали статистичну картину привабливості видання загалом та окремих його компонент. Пам’ятаючи про те, що частина статей у згаданому виданні є у відкритому доступі, а решта може завантажуватись лише за передплатою, ми з самого початку розділили ці дві категорії публікацій. База даних, отже, налічувала 4986 статей, доступних за передплатою, та 377 — так званих Open Access (OA) статей.

На рис. 18 зображено кумулятивні розподіли завантажень статей відповідно до їх віку онлайн (кількість місяців після оприлюднення) для EPL та двох інших видань. Для побудови цього малюнка брали дані, що стосувалися виключно завантажень, здійснених в межах вибраного 3-місячного часового вікна. Припус-

тімо, що функціональні форми наведених кривих є своєрідними характеристиками кожного з видань та, гіпотетично, залежать від дисципліни, домінанти типу публікацій (короткі повідомлення, регулярні статті, огляди, тощо) та правил доступу до них. Для побудови таких розподілів потрібно спиратися на статистику, зібрану за достатньо тривалий час. З іншого боку, маючи в розпорядженні дані навіть за кілька років, можна здійснити екстраполяцію за допомогою простої моделі. На рис. 19 показано, як густина завантажень ρ (середнє число сумарних завантажень на статтю) розподілена між публікаціями різного “віку”. Можна побачити, що існують два різні режими: протягом перших 5 чи 6 місяців швидкість завантажень є вищою, а пізніше відчутно спадає. Можна припустити, що різні швидкості процесу зумовлені різними мотиваціями користувачів до завантаження файлів: спочатку це зацікавлення новими матеріалами, а пізніше — інтереси архівування чи поточний пошук.

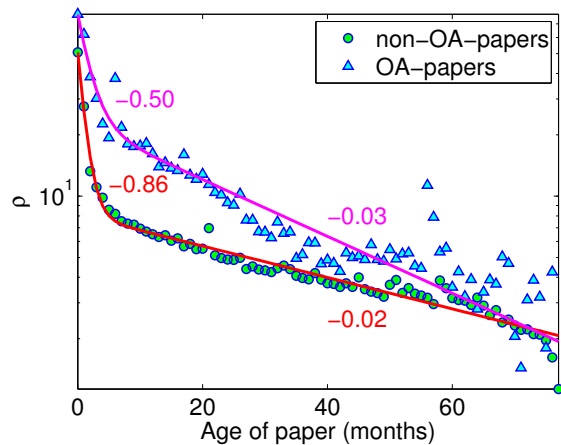


Рис. 19. Густина завантажень ρ як функція “віку” статті. Суцільні криві — передбачення моделі (19), вказані також значення констант загасання.

Отримані дані добре пояснюються так званою двофакторною моделлю [93]:

$$\rho(t) = \rho_0 [A \exp(-b_1 t) + (1 - A) \exp(-b_2 t)], \quad (19)$$

$$0 \leq A \leq 1, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0,$$

де A та $(1 - A)$ — відносні ваги двох факторів (різних мотивацій), а ρ_0 позначає густину завантажень, що відповідає найновішим статтям (опублікованим і завантаженим протягом одного місяця). Параметри b_1 та b_2 відповідають двом різним експонентам загасання. Використовуючи цю модель, можна передбачити, як виглядатиме процес завантажуваності в довшій часовій перспективі. Зокрема можна сказати, що в межах передплати статті наберуть 50% своїх завантажень за 25 місяців життя онлайн. Для OA-статей для цього вистачить 10 місяців. Подібно були ідентифіковані групи публікацій, що характеризуються різними формами динаміки процесу їх завантаження.

Автори мають приємність подякувати академікові НАН України Ігореві Мриглодові за пропозицію написати оглядовий розділ для книжки про наукову діяльність Інституту фізики конденсованих систем НАН України. Частина підготованих для книжки матеріалів увійшла в цю статтю. М. К. і Ю. Г. дякують за підтримку ДФФД України (проект №76/105-2017 “Концепція складних мереж у задачах квантової фі-

зики та космології”). О.М. дякує за підтримку НАН України (№ держреєстрації 0118U003620 “Журналометрія: кількісний підхід до аналізу впливу (іmpact) журнальних публікацій”) та МОН України (проект “Систематизація фахових журналів вищої школи на основі наукометричних досліджень: розробка стратегії і рекомендацій щодо їхнього функціонування та оптимізації”).

-
- [1] S. Thurner, *Visions for Complexity* (World Scientific, Singapore, 2016).
- [2] P. W. Anderson, *Science* **177**, 393 (1972).
- [3] D. Sherrington, *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **368**, 1175 (2010).
- [4] G. Parisi, *Physica A* **263**, 557 (1999).
- [5] Yu. Holovatch, R. Kenna, S. Thurner, *Eur. J. Phys.* **38**, 023002 (2017).
- [6] M. Mitzenmacher, *Internet Math.* **1**, 226 (2004).
- [7] M. E. J. Newman, *Contemp. Phys.* **46**, 323 (2005).
- [8] M. V. Simkin, V. P. Roychowdhury, *Phys. Rep.* **502**, 1 (2011).
- [9] C. Domb, *The Critical Point* (Taylor & Francis, London, 1996).
- [10] D. Sornette, *Critical Phenomena in Natural Sciences* (New York, Springer-Verlag, 2011).
- [11] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381 (1987).
- [12] B. Mandelbrot, in *Communication Theory*, edited by W. Jackson (Woburn, MA: Butterworth, 1953), p. 486.
- [13] B. Corominas-Murtra, R. Hanel, S. Thurner, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **112**, 5348 (2015).
- [14] R. Albert, A.-L. Barabasi, *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 47 (2002); S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, *Evolution of Networks: From Biological Networks to the Internet and WWW* (Oxford University Press, 2003); M. E. J. Newman, *SIAM Rev.* **45**, 167 (2003); Yu. Holovatch *et al.*, *J. Phys. Stud.* **10**, 247 (2006); A. Barrat, M. Barthelemy, A. Vespignani, *Dynamical Processes on Complex Networks* (Cambridge University Press, 2008); M. Newman, *Networks: An Introduction* (Oxford University Press, 2010).
- [15] M. Mézard, G. Parisi, M. A. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond* (World Scientific, Singapore, 1987).
- [16] *Order, Disorder and Criticality. Advanced Problems of Phase Transition Theory. Vol. 1–5*, edited by Yu. Holovatch (World Scientific, Singapore, 2007–2017).
- [17] R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors’kii, *Phys. Usp.* **46**, 169 (2003) [*Усп. физ. наук* **173**, 175 (2003)].
- [18] D. Ivaneyko, J. Ilnytskyi, B. Berche, Yu. Holovatch, *Physica A* **370**, 163 (2006).
- [19] D. Ivaneyko, B. Berche, Yu. Holovatch, J. Ilnytskyi, *Physica A* **387**, 4497 (2008).
- [20] O. Kapikranian, B. Berche, Yu. Holovatch, *Phys. Letts. A* **366**, 150 (2007).
- [21] M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, *J. Magn. Magn. Mat.* **294**, 305 (2005).
- [22] B. Delamotte, M. Dudka, D. Mouhanna, S. Yabunaka, *Phys. Rev. B* **93**, 064405 (2016).
- [23] O. Kapikranian, B. Berche, Yu. Holovatch, *Eur. Phys. J. B* **56**, 93 (2007).
- [24] P.-G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics* (Cornell University Press, Ithaca, 1979).
- [25] http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1991/
- [26] C. von Ferber, Yu. Holovatch, *Phys. Rev. E* **56**, 6370 (1997).
- [27] C. von Ferber, Yu. Holovatch, *Phys. Rev. E* **59**, 6914 (1999).
- [28] O. Kalyuzhnyi, Ja. Ilnytskyi, Yu. Holovatch, C. von Ferber, *J. Phys.: Cond. Matt.* **28**, 505101 (2016).
- [29] V. Blavats’ka, C. von Ferber, R. Folk, Yu. Holovatch, in: *Statistics of Linear Polymers in Disordered Media*, edited by Bikas K. Chakrabarti (Elsevier, Amsterdam, 2005), p.103.
- [30] V. Blavatska, C. von Ferber, Yu. Holovatch, *Phys. Rev. E* **64**, 041102 (2001).
- [31] V. Blavatska, C. von Ferber, Yu. Holovatch, *Phys. Rev. E* **74**, 031801 (2006).
- [32] A. Quetelet, *A Treatise on Man and the Development of His Faculties* (Scholars Facsimilies & Reprint, 1842).
- [33] S. Galam, *Sociophysics: A Physicist’s Modeling of Psycho-political Phenomena (Understanding Complex Systems)* (Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2012).
- [34] C. von Ferber, Yu. Holovatch, V. Palchykov, *Condens. Matter Phys.* **8**, 225 (2005).
- [35] C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, V. Palchykov, *Eur. Phys. J. B* **68**, 261 (2009).
- [36] B. Berche, C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, *Eur. Phys. J. B* **71**, 125 (2009).
- [37] Yu. Holovach, V. Palchykov, *J. Phys. Stud.* **11**, 22 (2007).
- [38] P. Mac Carron, R. Kenna, *Europhys. Lett.* **99**, 28002 (2012).
- [39] R. Kenna, P. Mac Carron, *J. Phys.: Conf. Ser.* **681**, 012002 (2016).
- [40] P. Sarkanych, Yu. Holovatch, R. Kenna, P. Mac Carron, *J. Phys. Stud.* **20**, 4801 (2016).
- [41] O. Mryglod, B. Fuchs, M. Szell, Yu. Holovatch, S. Thurner, *Physica A* **419**, 681 (2015).
- [42] O. Mryglod, Yu. Holovatch, I. Mryglod, *Scientometrics* **91**, 101 (2012).
- [43] O. Mryglod, R. Kenna, Yu. Holovatch, B. Berche, *Scientometrics* **95**, 115 (2013).
- [44] O. Mryglod, R. Kenna, Yu. Holovatch, B. Berche, *Scientometrics* **97**, 767 (2013).
- [45] O. Mryglod, R. Kenna, Yu. Holovatch, B. Berche, *Scientometrics* **102**, 2165 (2015); O. Mryglod, R. Kenna, Yu. Holovatch, B. Berche, *Scientometrics* **104**, 1013 (2015).
- [46] O. Mryglod, Yu. Holovatch, R. Kenna, B. Berche, *Scientometrics* **99**, 1013 (2015).

- tometrics **106**, 1151 (2016).
- [47] R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, Phys. Rev. B **61**, 15114 (2000).
- [48] A. Perumal, V. Srinivas, V. V. Rao, R. A. Dunlap, Phys. Rev. Lett. **91**, 137202 (2003).
- [49] R. Folk, Y. Holovatch, T. Yavors'kii, Phys. Rev. B **62**, 12195 (2000).
- [50] Yu. Holovatch, V. Blavats'ka, M. Dudka, C. von Ferber, R. Folk, T. Yavors'kii, Int. J. Mod. Phys. B **16**, 4027 (2002).
- [51] R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser, Phys. Rev. E **78**, 041124 (2008).
- [52] M. Dudka, R. Folk, Y. Holovatch, G. Moser, Condens. Matter Phys. **15**, 43001 (2012).
- [53] B. Delamotte, D. Mouhanna, M. Tissier, Phys. Rev. B **69**, 134413 (2004).
- [54] Yu. Holovatch, D. Ivaneiko, B. Delamotte, J. Phys. A **37**, 3569 (2004).
- [55] *I. Lyuksyutov, A. G. Naumovets, V. L. Pokrovsky, Two-Dimensional Crystals* (Academic Press, London, 1992).
- [56] R. Baxter, Exactly Solved Models in Statistical Mechanics (Academic Press, New York, 1982.)
- [57] V. S. Dotsenko, Phys. Usp. **38**, 457 (1995).
- [58] A. Weinrib, B. I. Halperin, Phys. Rev. B **27**, 413 (1983).
- [59] M. Dudka, A. A. Fedorenko, V. Blavatska, Yu. Holovatch, Phys. Rev. B **93**, 224422 (2016).
- [60] J. Honkonen, M. Y. Nalimov, J. Phys. A **22**, 751 (1989).
- [61] C. N. Likos, H. M. Harreis, Condens. Matter Phys. **5**, 173 (2002).
- [62] B. Duplantier, J. Stat. Phys. **54**, 581 (1989).
- [63] J. Feder, *Fractals* (Plenum Press, New York and London, 1988).
- [64] V. Blavatska, C. von Ferber, Yu. Holovatch, Phil. Mag. **88**, 4085 (2008).
- [65] B. H. Zimm, W. H. Stockmayer, J. Chem. Phys. **17**, 1301 (1949).
- [66] V. Blavatska, C. von Ferber, Yu. Holovatch, Condens. Matter Phys. **15**, 33603 (2012).
- [67] H. P. Hsu, W. Nadler, P. Grassberger, Macromolecules **37**, 4658 (2004).
- [68] K. Haydukivska, V. Blavatska, J. Chem. Phys. **144**, 084901 (2016).
- [69] A. Baumgärtner, J. Chem. Phys. **76**, 4275 (1982).
- [70] J. J. Prentis, J. Phys. A: Math. Gen. **17**, 1723 (1984).
- [71] K. Haydukivska, V. Blavatska, J. Chem. Phys. **141**, 094906 (2014).
- [72] V. Blavatska, R. Metzler, J. Phys. A: Math. Theor. **48**, 135001 (2015).
- [73] H. E. Stanley, P. Meakin, Nature **335**, 405 (1988).
- [74] B. B. Mandelbrot, J. Fluid Mech. **62**, 33 (1974).
- [75] T. A. Witten, L. M. Sander, Phys. Rev. Lett. **47**, 1400 (1981).
- [76] D. Stauffer, A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor and Francis, London, 1992).
- [77] C. von Ferber, V. Blavatska, R. Folk, Yu. Holovatch, Phys. Rev. E **70**, 035104(R) (2004).
- [78] V. Blavatska, W. Janke, Phys. Rev. Lett. **101**, 125701 (2008).
- [79] J. Hoshen, R. Kopelman, Phys. Rev. E **14**, 3438 (1976).
- [80] P. Grassberger, Phys. Rev. E **56**, 3682 (1997).
- [81] C. N. Yang, T. D. Lee, Phys. Rev. **87**, 404 (1952).
- [82] T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. **87**, 410 (1952).
- [83] M. E. Fisher, in: *Lecture Notes in Theoretical Physics, Vol. 7c* (University of Colorado Press, Boulder, 1965), p. 1.
- [84] S. H. Lee, M. Ha, H. Jeong, J. D. Noh, H. Park, Phys. Rev. E **80**, 051127 (2009).
- [85] M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna, Eur. Phys. Lett. **111**, 60009 (2015).
- [86] M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna, J. Phys. A **49**, 135001 (2016).
- [87] D. Lazer *et al.*, Science **323**, 721 (2009).
- [88] Challenge 4 development, <http://www.d4d.orange.com/>.
- [89] H. C. Carey, *Principles of social science. Vol. 3* (JB Lippincott & Company, 1867); G. A. Carrothers, J. Am. Inst. Plan. **22**, 94 (1956); J. E. Anderson, Annu. Rev. Econ. **3**, 133 (2011).
- [90] V. Palchykov *et al.*, Sci. Rep. **4**, 6174 (2014).
- [91] O. Mryglod, R. Kenna, Yu. Holovatch, Europhys. Lett. **108**, 50011 (2014).
- [92] J. Priem, D. Taraborelli, P. Groth, C. Neylon, *Altmetrics: A manifesto* <http://altmetrics.org/manifesto/> (2010).
- [93] H. F. Moed, J. Am. Soc. Inf. Sci. Tec. **56**, 1088 (2005).

STATISTICAL PHYSICS OF COMPLEX SYSTEMS IN THE WORLD AND IN LVIV

Yurij Holovatch^{1,2}, Maxym Dudka^{1,2},
Viktoria Blavatska^{1,2}, Vasyl Palchykov^{1,2}, Mariana Krasnytska^{1,2}, Olesya Mryglod^{1,2}

¹*Institute for Condensed Matter Physics of the NAS of Ukraine,
1 Svientsitskii St., Lviv, UA-79011, Ukraine*

² \mathbb{L}^4 *Collaboration & Doctoral College for the Statistical Physics of Complex Systems,
Leipzig-Lorraine-Lviv-Coventry, Europe*

We present a brief essay about the statistical physics of complex systems — a research direction that now acquires features of a well established field of science with its object of study, conceptual background, and methods of analysis. A complex system consists of many interacting parts (agents) and manifests collective behaviour non-trivially following from the behaviour of its individual components. Examples of complex systems are found in condensed matter, ecological and biological systems, human society, stock markets and economy. The concept of a complex system refers to many traditional disciplines of science and forms a new, inter-disciplinary branch of knowledge. Peculiar features of complex systems are self-organization, emergence of new functionalities, adaptive nature of interactions, high sensitivity to small changes in the initial conditions, governing power laws (“fat-tailed” distributions). In our paper, we concentrate on applying methods and concepts of statistical physics in a complex

system analysis. We discuss how such approach allows for conceptual understanding and interpretation of a wide range of phenomena in various systems, not necessarily of physical origin.

Together with the general description of the properties of complex systems, we give a brief overview of some studies performed in this field at the Institute for Condensed Matter Physics of the NAS of Ukraine (Lviv, Ukraine). In particular, these studies cover critical behaviour of complex magnets, scaling behaviour of complex polymer macromolecules, phase transition of spin system on complex networks, sociophysical approaches to studying human activities, scientometrics.