

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ

Рішення зворотної задачі гравіметрії залишається актуальним завданням в сучасних умовах. Вона зводиться до вирішення інтегрального рівняння Фредгольма (ІРФ) першого роду, яке, як відомо, є некоректним завданням. Стаття присвячена деяким математичним аспектам рішення двовимірної задачі гравіметрії.

Решение обратной задачи гравиметрии остается актуальной задачей в современных условиях. Она сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма (ИУФ) первого рода, которое, как известно, является некорректной задачей. Статья посвящена некоторым математическим аспектам решения двумерной задачи гравиметрии.

Solution of the inverse gravimetry problem remains an urgent task even now. It is reduced to solving the Fredholm integral equation (FIE) of the first kind, which is known to be an ill-posed problem. The article is devoted to some mathematical aspects of the solution of two-dimensional problem of gravimetry.

Проблема и ее связь с научными и практическими задачами. Обратная задача гравиметрии заключается в определении формы возмущающего тела, плотность которого отлична от плотности окружающей среды по аномалии силы тяжести, определенной на поверхности земли. Математические методы, лежащие в основе гравиразведки, относятся к обратным некорректным задачам, методы решения которых бурно развиваются в настоящее время. Как известно [1], в математической физике (МФ) принято различать прямую и обратную задачу. Обратными задачами обычно называют задачи восстановления структуры объектов по косвенным данным. Такие задачи возникают в тех случаях, когда внутреннее строение физического объекта недоступно прямому исследованию, в то время как косвенная информация о структуре объекта может быть получена, например, в виде измеренных физических полей, собственных или представляющих собой отклик объекта на заданное внешнее воздействие. На физическом уровне прямая задача МФ состоит в определении физических величин поля по заданным первичным источникам поля. Примером такой задачи может служить расчет электромагнитного поля в среде с известными характеристиками, расчет гравитационного поля по известному распределению плотностей и т.п. Обратная задача, чаще всего, состоит в определении первичных источников по известным физическим

параметрам поля. Важными примерами обратных задач весьма богата геофизика, например, задача магниторазведки, то есть задача определения геометрии и глубины залегания рудного магнитного тела по известным значениям напряженности магнитного поля. Важным примером является близкая ей задача гравиразведки – определение геометрии рудного тела по изменению силы тяжести вблизи тела. Другие примеры обратных задач: МЕДИЦИНСКАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ, КОМПЬЮТЕРНАЯ ТОМОГРАФИЯ, СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ, задачи по НЕРАЗРУШАЮЩЕМУ КОНТРОЛЮ. Обратные задачи почти всегда являются некорректно поставленными задачами. Из трёх условий КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ (существование решения, единственность решения и его УСТОЙЧИВОСТЬ) в обратных задачах наиболее часто нарушается условие устойчивости решения. Как правило, решение обратных задач сводится к решению целого ряда прямых задач с непрерывно изменяющимися параметрами.

Анализ предыдущих исследований. На современном этапе математического моделирования многие прямые задачи гравиметрии получили удовлетворительное алгоритмическое и программное решение, хотя нельзя считать эту область исчерпанной [2]. Теперь имеется возможность перейти на качественно новый уровень сложности решаемых задач – к систематическому решению обратных задач гравиметрии. Потенциал современной вычислительной математики позволяет говорить о возможности все более глубокой обработки результатов измерений в рамках усложняющихся физических и математических моделей и извлечении принципиально качественно новой информации [3]. Это относится, прежде всего, к исследованиям структуры и состояния объектов по косвенной (измеряемой) информации. Проблема обработки данных с такой целью математически формулируется в виде обратных задач математической физики, которые ставятся в рамках той или иной физической модели. В рамках функционального анализа эти задачи сводятся к решению операторных уравнений первого рода. Решение таких задач представляет собой значительные математические и вычислительные трудности [4]. Существование, единственность и устойчивость решения конкретных физических задач исследованы далеко не во всех случаях [1, 2]. Особенность обратных задач гравиметрии состоит в том, что они, как правило, некорректно поставлены в естественных классах. Вместе с тем, в ряде случаев для таких задач удается найти более узкие классы – единственности и устойчивости – определяемые некоторыми условиями. Существование таких классов позволяет отнести некорректную задачу к числу условно корректных. Конструктивный учет дополнительных условий в применении к решению таких задач приводит к получению регуляризирующих алгоритмов их решения, не выводящих решения за пределы указанных классов.

Наиболее общий подход к задаче гравиметрии [2] приводит к уравнениям относительно пространственно распределенных источников во всей области гравитационных аномалий. Уравнения в таком случае наиболее

естественно формулируются относительно плотности источников поля, либо расчетных векторов, по которым можно просто определить вектора поля. В общем виде решение прямой задачи гравиметрии в трехмерном случае [2] в точке наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от заданного материального тела D дается интегральным представлением потенциала:

$$V(x_0, y_0, z_0) = G \iiint_D \rho(x, y, z) \cdot dV / R \quad (1)$$

и его первых производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0} &= G \iiint_D (x - x_0) \cdot dV / R^3, \\ \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0} &= G \iiint_D (y - y_0) \cdot dV / R^3, \\ \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} &= G \iiint_D (z - z_0) \cdot dV / R^3. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь G - гравитационная постоянная, $\rho(x, y, z)$ - известная плотность среды, $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ - расстояние между текущей точкой $M(x, y, z)$ и точкой наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$, D - область локализации источников гравитационных аномалий. Физически (2) - проекции силы тяжести в точке наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от области D . Иногда ищутся значения и вторых производных гравитационного потенциала. Очевидно, в силу принципа суперпозиции, прямая задача гравиметрии может быть решена путем численного интегрирования для всех источников поля области D . Для простейших тел правильной формы получены аналитические выражения в элементарных функциях при условии постоянной или линейно меняющейся плотности $\rho(x, y, z)$ объема D [2]. Поэтому для прямой задачи гравиразведки наиболее актуальным является вопрос эффективных алгоритмов вычисления (1) и (2), прежде всего параллельных алгоритмов.

В некоторых случаях рассматривается двумерное гравитационное поле, не зависящее от одной из координат, как правило, координаты y , например, поле, создаваемое длинным цилиндром с плотностью масс не меняющейся в направлении образующей цилиндра. Такие носители масс являются удобными абстракциями, приближенно описывающими поле реальных трехмерных гравитационных аномалий. В этом случае решение прямой задачи гравиметрии в точке наблюдения $M_0(x_0, z_0)$ от заданного материального тела S дается интегральным представлением потенциала:

$$V(x_0, z_0) = 2G \iint_S \rho(x, z) \cdot \ln(1/R) \cdot dS$$

и его первых производных:

$$\frac{\partial V(x_0, z_0)}{\partial x_0} = 2G \iint_S \rho(x, z) \cdot (x - x_0) / R^2 \cdot dS,$$

$$\frac{\partial V(x_0, z_0)}{\partial z_0} = 2G \iint_S \rho(x, z) \cdot (z - z_0) / R^2 \cdot dS. \quad (3)$$

Здесь $\rho(x, z)$ - известная плотность среды, $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$ - расстояние между текущей точкой $M(x, z)$ и точкой наблюдения $M_0(x_0, z_0)$, S - плоская область локализации источников гравитационных аномалий.

Постановка задачи. Обратная задача гравиметрии заключается в определении формы возмущающего тела, плотность которого отлична от плотности окружающей среды по аномалии силы тяжести, порождаемой им на поверхности земли.

Пусть среда, находящаяся под поверхностью земли ($z=0$), состоит из масс с плотностями ρ_1 и ρ_2 , разделенных границей $u(x)$ (рис. 1). Будем считать, что $u(x)=-H$ всюду, кроме промежутка $a \leq x \leq b$, где уравнение линии разделяющей две среды: $-H+u(x)$. Возмущающее тело создает на поверхности земли аномалию напряжения силы тяжести $\Delta g = -\frac{\partial V}{\partial z}$, где V - потенциал масс с плотностью $\rho_2 - \rho_1$, заполняющих область S (рис. 1):

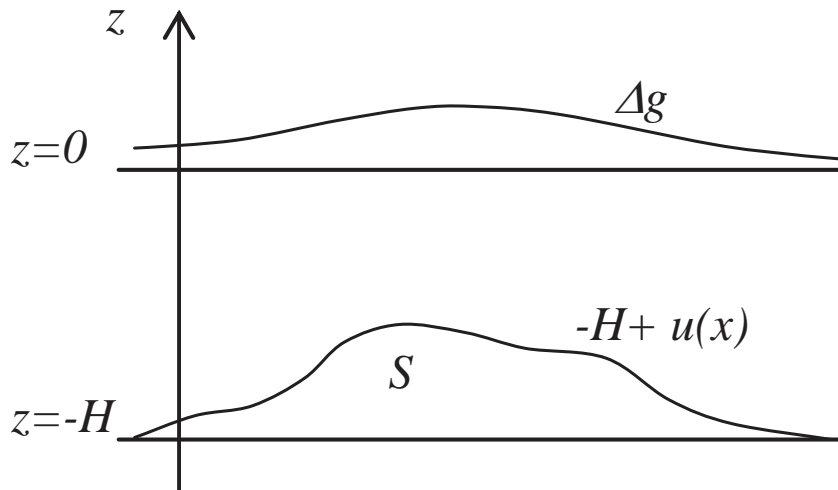


Рис. 1. Обратная задача гравиметрии рассматривается обычно в двух различных вариантах:

- а) линейное приближение в предположении, что $|u(x)| \ll |H|$;
- б) без предположения о малости $u(x)$

Рассмотрим обратную двумерную задачу гравиметрии в линейном приближении. Она может быть сформулирована в виде одномерного ИУФ первого рода:

$$\Delta g(x) = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\pi} \int_a^b \frac{H}{(x - \xi)^2 + H^2} u(\xi) d\xi, \quad (4)$$

Здесь Δg – наблюдаемая на поверхности земли аномалия силы тяжести.

Численное решение такого уравнения представляет определенные трудности [3]. Для преодоления этих затруднений применим метод регуляризации Тихонова [3] к общему ИУФ I рода, уравнение (4) - частный случай (5):

$$Ay = \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (5)$$

Алгоритм метода регуляризации по Тихонову для общего случая может быть описан таким образом [3]. Будем полагать, что $K(x, s)$ есть вещественная непрерывная в области $\{a \leq s \leq b; c \leq x \leq d\}$ функция. Пусть, далее, $f(x) \in L_2$, $y(s) \in W_2^1$, а вместо точных $f(x)$ и $K(x, s)$ известны их приближенные значения $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{K}(x, s)$ такие, что

$$\|\tilde{f}(x) - f(x)\|_{L_2} \leq \delta, \quad \|\tilde{K}(x, s) - K(x, s)\| \leq \xi.$$

Введем сглаживающий функционал

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = \int_a^b [\tilde{A}y - \tilde{f}(x)]^2 dx + \alpha \Omega[y], \quad (6)$$

где стабилизирующий функционал

$$\Omega[y] = \int_a^b \{y^2(s) + q[y'(s)]^2\} ds, \quad q \geq 0, \quad (7)$$

причем

$$\tilde{A}y = \int_a^b \tilde{K}(x, s) y(s) ds, \quad c \leq x \leq d.$$

Из условия минимума Φ_α следует уравнение Тихонова:

$$\alpha \left[y_\alpha(t) - q y_\alpha''(t) \right] + \int_a^b R(t, s) y_\alpha(s) ds = F(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (8)$$

где

$$R(t, s) = R(s, t) = \int_c^d \tilde{K}(x, t) \tilde{K}(x, s) dx, \quad (9)$$

$$F(t) = \int_c^d \tilde{K}(x,t) \tilde{f}(x) dx, \quad (10)$$

причем краевые условия выбраны в виде

$$y'_\alpha(a) = y'_\alpha(b) = 0.$$

В результате вместо некорректного уравнения первого рода (5) нужно решать уравнение второго рода (8), ИУФ II рода при $q=0$ или интегродифференциальное уравнение при $q \neq 0$. При этом значение величины q связывают с порядком регуляризации: если $q=0$, то говорят о регуляризации 0-го порядка, а если $q \neq 0$, то говорят о регуляризации 1-го порядка. ИУФ первого рода (5) удалось свести к ИУФ второго рода. В простейшем случае, при $q=0$ и регуляризации 0-го порядка, задача определения формы границы области свелась к решению семейства ИУФ второго рода (5) с одинаковыми ядром и правой частью. Решение ИУФ второго рода является гораздо более простой изученной задачей, чем решение ИУФ первого рода [3], и не представляет собой никаких теоретических трудностей.

Ядро интегрального уравнения Фредгольма первого рода задано аналитически, однако оно получено в результате упрощающих предположений, поэтому с полным основанием его можно считать приближенным. В аномалии силы тяжести Δg присутствуют значительные погрешности измерения. Поэтому в результате численного интегрирования при вычислении (9) и (10) погрешности задания ядра и правой части существенно сглаживаются.

Функции (9) и (10) могут быть вычислены с высокой точностью с помощью бикубических сплайнов. Выбор параметра регуляризации α в (6) производится с помощью численной минимизации сглаживающего функционала (6), для чего решение задачи (8) аппроксимируется кубическими сплайнами, что позволяет эффективно вычислить как невязку решения интегрального уравнения (5), так и величину стабилизирующего функционала.

Выводы и дальнейшее направление исследований.

1) Предложенный метод позволяет эффективно находить решения обратной задачи гравиразведки двумерной задачи путем сведения к ИУФ второго рода.

2) Предложен алгоритм выбора параметра регуляризации α с помощью численной минимизации сглаживающего функционала, для чего решение ИУФ второго рода аппроксимируется кубическими сплайнами.

Список литературы

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. –М.: URSS, 2009. –480 с.
2. Гравиразведка. Справочник геофизика // Под редакцией Е.А.Мудрецовоу –М.: Недра, 1990. –608 с.
3. Тихоноу А.Н., Самарский А.А. Методы решения некорректных задач. –М.: Наука, 1986. –288 с.
4. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. –Киев.: Наукова думка, 1986. –544 с.

УДК 621.311

І.О. СІНЧУК, канд. техн. наук, доц., Т.М. БЕРІДЗЕ, канд. техн. наук, доц., А.М. ЯЛОВА, асп., М.А. БАУЛІНА, асп.

ДО ОЦІНКИ ВПЛИВУ СЕЗОННОСТІ НА РІВНІ СПОЖИВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ ПІДЗЕМНИМ ЗАЛІЗОРУДНИМ КОМБІНАТОМ

В статті доведена практична значимість впливу сезонних змін на споживання електроенергії та на витрати споживання електроенергії з метою забезпечення ефективного управління залізорудними підприємствами.

В статье доказана практическая значимость влияния сезонных изменений на потребление электроэнергии и на расходы потребления электроэнергии с целью обеспечения эффективного управления железорудными предприятиями.

The well-proven practical meaningfulness of influence of seasonal changes is on the consumption of electric power and influence of seasonality on the charges of consumption of electric power in the article. A research aim is providing of effective management iron-ore enterprises.

Проблема та її зв'язок з науковими та практичними завданнями. Гірничо-металургійна промисловість України щорічно споживає більше 30% від всього загальноспоживаного обсягу електричної енергії (ЕЕ) [3]. Між тим, важливим фактором, котрий необхідно оцінити та врахувати як прогноз, це коливання обсягів споживання ЕЕ в залежності від сезонності року.

Аналіз досліджень та публікацій. Сезонні коливання - сезонний компонент часового ряду, який часто накладається на основну тенденцію, зміни показників, які повторюються з року в рік у певні проміжки часу. Спостерігаючи їх протягом ряду років у кожному кварталі чи місяці, можна визначити відповідні середні величини (медіани), які є характери-