

УДК 338.28

В.Б. Гринев, Т.Н. Алешечкина, В.В. Виноградов

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, г. Харьков

**ОБ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ
МАЧТ МОБИЛЬНОЙ СВЯЗИ**

В статье рассматривается упрощенная модель мачты с одним уровнем закрепления вант. Главное внимание в работе занимает рассмотрение методов минимизации перемещений верхней части мачты путем распределения заданного объема материала по высоте. В работе изучено влияние параметров закрепления вант на оптимальные распределения геометрических характеристик по высоте мачты. Показаны конкретные варианты оптимальных распределений площади, подсчитанные для случаев непрерывного и дискретного изменения варьируемых величин.

Ключевые слова: мачты с одним уровнем закрепления вант, минимизация перемещений, оптимизация распределения площади, распределение геометрических характеристик, варьируемые величины.

Постановка проблемы

Мачты мобильной связи являются особым относительно новым типом высотных сооружений, которые впервые появились в нашей стране в начале 90-х годов одновременно с внедрением современной мобильной связи. В технической литературе содержится недостаточное количество рекомендаций, обращенных к проектировщикам мачт мобильной связи, отсутствуют обязательные нормативные документы по проектированию. При проектировании и эксплуатации мачт мобильной связи отмечается высокий уровень перерасхода материала и высокой его повреждаемости. Данные обстоятельства обуславливают необходимость совершенствования методов расчета, диагностики и развития эффективного перераспределения объема материала. В силу их функциональности к мачтам мобильной связи предъявляются требования необходимой несущей способности, жесткости, устойчивости, надежности и долговечности с учетом обеспечения минимальной массы, а также технологичности изготовления и монтажа.

Цель работы

На примере упрощенной модели мачты с одним уровнем закрепления вант проанализировать влияние параметров закрепления на законы оптимального распределения геометрических характеристик по высоте мачты. В исследовании рассматривается задача минимизации перемещения верхнего обреза мачты путем перераспределения заданного объема (веса) материала по высоте мачты.

Виклад основного матеріалу

Общая схема рассматриваемой модели показана на рис.1а. Упругая растяжимая нить (ванта) площадью поперечного сечения F_b и модулем упругости E_b закреплена в точках x_1, A . Нить подвергается воздействию нагрузки, горизонтальная проекция которой q_b постоянна по координате y . Эта нагрузка может моделировать действие собственного веса, снеговой нагрузки и т.п. Нить натянута в точке А с некоторым предварительным усилием T_A . Как показано в работе [5] распор (горизонтальная реакция от воздействия ванты на мачту), H в точке x_1 выражается формулой

$$H = \left(T_A + \frac{q_b \cdot l \sin \alpha}{2} - \frac{q_b^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha}{8 \cdot T_A} \right) \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

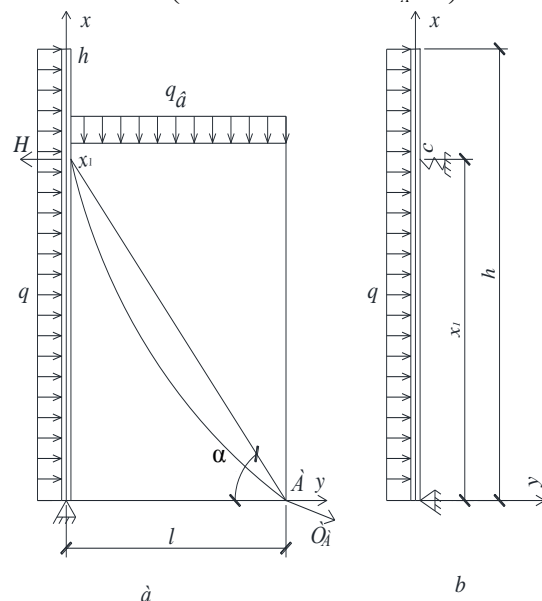


Рис.1 - Расчетная система для мачты

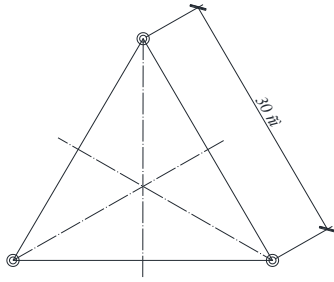


Рис 2 – Схема поперечного сечения

Здесь, в соответствии с рис. 1а, величина l представляет собой проекцию ванты на ось y (горизонтальную плоскость). Вантовое крепление можно характеризовать как упругую относительно смещений, перпендикулярных оси мачты, опору. При этом опора будет нелинейной относительно указанных смещений δ , причем характер нелинейности определяется зависимостью $H(\delta)$ [5]. Начальное сопротивление β_0 определяется величиной $\frac{d}{d\delta}H$ при $\delta = 0$, $H = H_0$ [5],

$$\beta_0 = \frac{1}{\frac{l^3 \cdot q^2 \cdot b \cdot \cos^2 \alpha}{12H_b^3} + \frac{l}{E_b \cdot F_b \cdot \cos^3 \alpha}} \quad (2)$$

На практике достаточно часто используются опоры, образованные тремя оттяжками. На рис.2 показана общая схема поперечного сечения мачты в точке x_1 для случая трех оттяжек.

Как показано в [5] начальная (монтажная) жесткость опоры с тремя оттяжками будет иметь вид

$$c = \beta_0 \cdot \frac{3}{2} \quad (3)$$

Рассмотрим вначале упрощенную схему, показанную на рис.1в. Она представляет собой балку с линейной опорой в точке x_1 имеющей жесткость c , совпадающую с монтажной жесткостью (3). Данная модель описывается линейной краевой задачей для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dv}{dx} = \varphi; \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI}; \quad \frac{dM}{dx} = Q; \quad \frac{dQ}{dx} = -q \quad (4)$$

с граничными условиями

$$v(0) = M(0) = 0; \quad M(h) = Q(h) = 0 \quad (5)$$

и условиями перехода через опору в точке x_1

$$v(x_1^-) = v(x_1^+); \quad \varphi(x_1^-) = \varphi(x_1^+);$$

$$M(x_1^-) = M(x_1^+); \quad Q(x_1^-) + c \cdot v(x_1) = Q(x_1^+) \quad (6)$$

Здесь переменные состояния v, φ, M, Q , представляют собой перемещение, угол поворота, изгибающий момент и перерезающую силу в конкретном сечении [3], а величины x_1^-, x_1^+ есть значения координаты X соответственно слева и справа от точки x_1 .

Характеристики поперечного сечения, площадь $F(x)$ и момент инерции $I(x)$, меняются по высоте мачты. Как будет показано далее, в рамках данной задачи можно принять, что момент инерции является линейной функцией площади, $I(x) = \gamma \cdot F$, где γ - заданный параметр. Будем считать, что варьируемым будет закон изменения площади поперечного сечения по высоте мачты $F(x)$, причем

$$F_1 \leq F(x) \leq F_2 \quad (7)$$

где F_1, F_2 - постоянные величины.

Будет рассматриваться следующая задача оптимизации: при заданном объеме материала

$$V = \int_0^l F \cdot dx = const, \quad (8)$$

найти в рамках ограничений (7) распределение площади $F(x)$, минимизирующее перемещение верхнего обреза мачты,

$$|v(h)| = \min. \quad (9)$$

Подобная задача был рассмотрена в работе [1], где для нее были получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума [3, 4]. В данном случае они будут представлены исходной краевой задачей (4)-(6), сопряженной краевой задачей для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{v}}{dx} = \bar{\varphi}; \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dx} = -\frac{\bar{M}}{EI}; \quad \frac{d\bar{M}}{dx} = \bar{Q}; \quad \frac{d\bar{Q}}{dx} = 0 \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\bar{v}(0) = \bar{M}(0) = 0; \quad M(h) = 0; \quad Q(h) = P_v \quad (11)$$

$$\bar{v}(x_1^-) = \bar{v}(x_1^+); \quad \bar{\varphi}(x_1^-) = \bar{\varphi}(x_1^+); \quad \bar{M}(x_1^-) = \bar{M}(x_1^+);$$

$$Q(x_1^-) - c \cdot v(x_1) = Q(x_1^+), \quad (12)$$

(единичная сосредоточенная сила P_v определяется законом перемещения $v(h)$, $P_v = \text{sign}(v(h))$), которые замыкаются условием максимума на оптимальной функции $F(x)$ гамильтониана и условиями перехода через точку x_1 . Гамильтониан имеет вид

$$H = -\frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot \gamma \cdot F} - \lambda \cdot \bar{H}. \quad (13)$$

Параметр λ является неопределимым множителем Лагранжа для учета условия постоянства объема (8).

Следует учесть, что исходная система показанная на рис.1в является статически определенной, как и сопряженная система, определяемая краевой задачей (10)-(12). Это означает что функции $M(x)$, $\bar{M}(x)$ в гамильтониане (13) будут одними и теми же для любых распределений площади $F(x)$. Опуская элементарные выкладки, из условий равновесия можно получить выражения:

для $x \in [0, x_1]$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \left(qh - \frac{qh^2}{2x_1}\right) \cdot x; \quad \bar{M}(x) = P_v \left(1 - \frac{h}{x_1}\right) \cdot x$$

для $x \in [x_1, h]$ (14)

$$M(x) = q \left(hx - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{qh^2}{2}; \quad \bar{M}(x) = P_v(x-h)$$

Положим, что расположение опоры и ее жесткость таковы, что перемещение верхнего обреза мачты $v(h) > 0$, что отвечает $P_v = 1$. Запишем гамильтониан (13) в форме

$$H = -\frac{f(x)}{F} - \lambda \cdot \bar{H} \tag{15}$$

Из выражений (14) видно, что $f(x) \geq 0$. В этом случае $\frac{\partial^2 H}{\partial F^2} \leq 0$ (что свидетельствует о том, что гамильтониан выпуклая вверх функция F) и гамильтониан достигает максимального значения либо в точке F_* , где $\frac{\partial H}{\partial F} = 0$ (локальный максимум), либо в ближайшей к точке F_* границе интервала $[F_1, F_2]$.

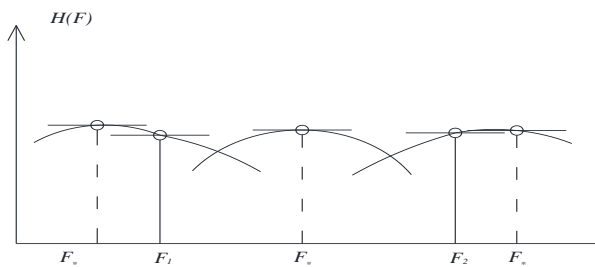


Рис 3 – Максимизация гамильтониана.

Эта ситуация иллюстрируется рис. 3. С учетом выражения (15) находится

$$F_* = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot f \right)^{1/2} \tag{16}$$

Таким образом оптимальная функция $F(x)$ будет подчиняться требованию

$$F = \begin{cases} F_2, & F_* \geq F_2, \\ \left(\frac{1}{\lambda} \cdot f \right)^{1/2}, & F_1 < F_* < F_2, \\ F_1, & F_* \leq F_1. \end{cases} \tag{17}$$

Выражение (17) определяет однопараметрическое семейство функций $F(x, \lambda)$. Неопределенный множитель Лагранжа λ должен быть подобран из условия сохранения объема материала.

Проводя исследование функции $M(x)$ согласно рис.1.в имеем следующее решение:

$x \in [0, x_1]$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + (qH - \frac{qH^2}{2x_1})x$$

$x \in [x_1, H]$

$$M(x) = q(Hx - \frac{x^2}{2}) - \frac{qH^2}{2}$$

Поиск точки x_* экстремума $M(x)$

$$M'(x) = -qx + qH - \frac{qH^2}{2x_1} = 0$$

Корень этого уравнения

$$x_* = H \left(1 - \frac{H}{2x_1} \right)$$

Легко видеть что для $x_1 < \frac{H}{2}$ имеем $x_* < 0$; для $x_1 \approx H$ $x_* \approx \frac{H}{2}$.

Таким образом функция $f(x)$, описанная в тексте, имеет указанный характер только тогда, когда рассматривается опора с координатой $x_1 < \frac{H}{2}$. В случае $x_1 > \frac{H}{2}$ данное решение уже неверно.

Положим $x_1 < \frac{H}{2}$. Из выражений (14) видно, что функция $f(x)$ монотонно возрастает на участке $[0, x_1]$, и монотонно убывает на $[x_1, h]$, достигая максимума в точке x_1 . Обозначим через V_* величину объема материала, для которого $F(x_1) = F_2$. Тогда оптимальные распределения $F(x)$, в зависимости от величины фиксированного объема материала, будут иметь качественный характер, показанный на рис.4.

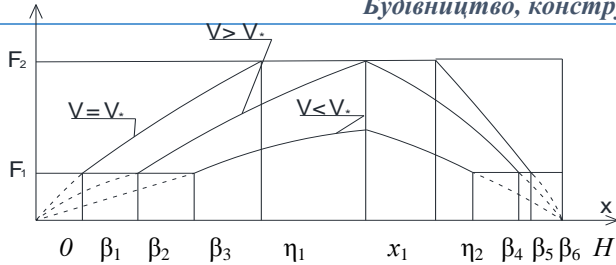


Рис 4 – Качественный характер оптимальных распределений площади по высоте

Последовательность конкретизации оптимальных очертаний мачты для этой модельной задачи состоит в следующем. Вначале подсчитывается λ_* , отвечающее объему V_* . Для этого записывается уравнение

$$\left(\frac{1}{\lambda_*} f(x_1)\right)^{\frac{1}{2}} = F_2$$

откуда

$$\lambda_* = \frac{f(x_1)}{F_2^2}$$

Далее из условий (рис.4)

$$\left(\frac{1}{\lambda_*} f(\beta_2)\right)^{\frac{1}{2}} = F_1, \quad \beta_2 \in [0, x_1];$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_*} f(\beta_5)\right)^{\frac{1}{2}} = F_1, \quad \beta_5 \in [x_1, H],$$

находятся значения точек переключения β_2, β_5 . Как видно из выражения для $f(x)$, для этого необходимо использовать численную процедуру нахождения корня функции одного переменного. При известных λ_* , β_2, β_5 характерный объем V_* подсчитывается по формуле

$$V_* = F_1\beta_2 + F_1(H - \beta_5) + \int_{\beta_2}^{\beta_5} \left(\frac{1}{\lambda_*} f\right)^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

Обозначим через $V_1 = F_1 l$, $V_2 = F_2 l$ минимальный и максимальный объем материала мачты вследствие ограничений (7). Если задан объем материала $V_1 \leq V \leq V_*$, то оптимальное распределение $F(x)$ будет иметь вид

$$F(x) = \begin{cases} F_1, & x \in [0, \beta_3], \quad x \in [\beta_4, H] \\ \left(\frac{1}{\lambda} f(x)\right)^{\frac{1}{2}}, & x \in [\beta_3, \beta_4] \end{cases}$$

Точки переключения β_3, β_4 выражаются через λ с помощью соотношений

$$\left(\frac{1}{\lambda} f(\beta_3)\right)^{\frac{1}{2}} = F_1; \quad \left(\frac{1}{\lambda} f(\beta_4)\right)^{\frac{1}{2}} = F_2.$$

Окончательно при заданной величине объема $V \in [V_1, V_*]$ будет иметь место следующее уравнение для нахождения λ :

$$V = F_1\beta_3 + F_1(H - \beta_4) + \int_{\beta_3}^{\beta_4} \left(\frac{1}{\lambda} f(x)\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

Найденное λ позволяет конкретизировать функцию $F(x)$.

Если фиксируется объем материала V в диапазоне $[V_* \leq V \leq V_2]$, то можно записать соотношения

$$\left(\frac{1}{\lambda} f(\eta_1)\right)^{\frac{1}{2}} = F_2; \quad \left(\frac{1}{\lambda} f(\eta_2)\right)^{\frac{1}{2}} = F_2;$$

$$\left(\frac{1}{\lambda} f(\beta_1)\right)^{\frac{1}{2}} = F_1; \quad \left(\frac{1}{\lambda} f(\beta_6)\right)^{\frac{1}{2}} = F_1$$

позволяющие выразить “точки переключения” $\beta_1, \beta_6, \eta_1, \eta_2$ через λ . Величина λ , конкретизирующая оптимальное решение, находится из уравнения

$$V = F_1\beta_1 + F_1(H - \beta_6) + F_2(\eta_2 - \eta_1) + \int_{\beta}^{\eta_1} \left(\frac{1}{\lambda} f(x)\right)^{\frac{1}{2}} + \int_{\eta_2}^{\beta_6} \left(\frac{1}{\lambda} f(x)\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

При найденном λ оптимальное решение будет иметь вид:

$$F = \begin{cases} F_1, & x \in [0, \beta_1], \quad x \in [\beta_6, H]; \\ F_2, & x \in [\eta_1, \eta_2]; \\ \left(\frac{1}{\lambda} f(x)\right)^{\frac{1}{2}}, & x \in [\beta_1, \eta_1], \quad x \in [\eta_2, \beta_6]; \end{cases}$$

В качестве объекта для расчетного эксперимента выберем мачту высотой 60 м. Конструктивно мачта представляет собой сборную конструкцию из двухметровых решетчатых секций. Пояса выполнены из трубы, решетка из круглой стали (рис.2). В пределах одной секции могут быть использованы разные варианты трубчатых сечений. В таблице 1 приведены номера по сортаменту, отвечающие им варианты трубчатых сечений с указанием диаметра и толщины стенки, а также соответствующие площади и моменты инерции. Данные таблицы задают пределы изменения площади поперечного сечения согласно ограничениям (7). При этом в зависимости $I = \gamma F$ можно приближенно принять $\gamma = 629$.

Таблица 1 – Набор возможных вариантов сечений

№ по сортаменту	1	2	3	4	5	6	7
Параметры трубы диаметр x толщина см	4.8x0.2	4.8x0.22	4.8x0.25	4.8x0.28	4.8x0.3	4.8x0.32	4.8x0.35
$F, \text{см}^2$	11.561	12.662	14.294	15.904	16.956	18.015	19.572
$I, \text{см}^4$	7256.3	7947	8971	9980.7	10646	11305	12281

Следует обратить внимание на то, что реальной варьируемой переменной является толщина трубчатых поясов, которая меняется дискретным образом и входит в варьируемую функцию $F(x)$ опосредовано. И хотя теоретические построения можно было бы проводить непосредственно для дискретного варианта варьируемой функции, более наглядно использовать непрерывный вариант функции $F(x)$.

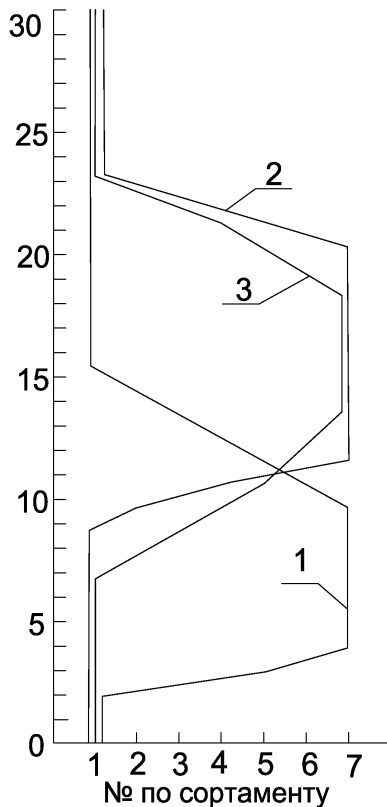


Рис 5 - Оптимальное распределения $F(x)$

На рис.5 показаны оптимальное распределения $F(x)$, минимизирующее перемещения верхнего обреза мачты для фиксированного объема, отвечающего постоянной площади для номера 3 по таблице 1. Кривые 1 и 2 соответствуют положению опоры для $x_1 = 10 \text{ м}$ и $x_1 = 30 \text{ м}$. Эти решения получаются на основе аналитических построений, приведенных ранее. Кривая 3 отвечает $x_1 = 50 \text{ м}$. Для этой ситуации решение получалось численно, на основе подходов, описанных в [3]. Наглядно видно, что накопление материала происходит не в окрестности опор, как для кривых 1 и 2, а близко к середине интервала $[0, x_1]$.

На рис. 6 оптимальное очертание мачты $F(x)$, данное на рис. 5 под номером 2, представлено в виде распределения по высоте номеров сортамента в соответствии с таблицей. Пунктиром показана мачта постоянного поперечного сечения того же объема.

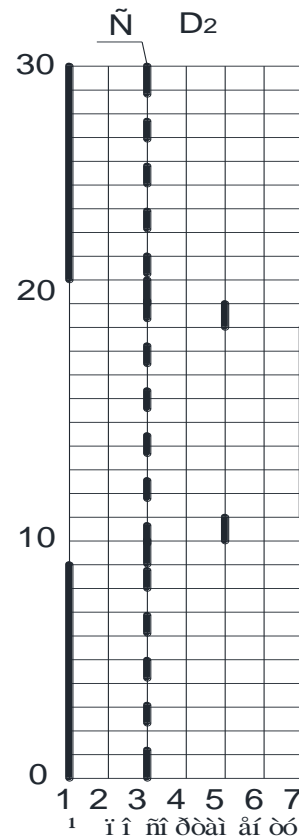


Рис. 6 – Оптимальное очертание мачты $F(x)$, под номером 2

Следует отметить, что в силу статической определенности исходной модели оптимальное распределение $F(x)$ может быть найдено без подсчета перемещений. Однако в случае нескольких опор или необходимости оценить численно эффект по перемещениям следует учитывать нелинейный характер деформирования опор [5], а так же учитывать нелинейность, порожденную необходимыми условиями оптимальности [3].

Выводы

В статье разработана методика нахождения распределения площади поперечного сечения по высоте мачты, минимизирующее перемещения верхнего обреза мачты при условии, что объем использованного материала задан. Найден ряд аналитических решений позволяющих дать качественную оценку влияния на оптимальные варианты очертания мачт координаты закрепления вант. Полученные результаты могут быть использованы для проверки достоверности решений более сложных оптимизационных задач для мачт с несколькими уровнями крепления оттяжек.

Література

1. Гринев В.Б. Некоторые особенности задач оптимизации статически нагруженных балок. // Научный вестник будівництва. - Харків: ХДТУБА. -2011. – Вип. 62.- с.88 - 96 .
2. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. – К.: Наукова думка, 1975. -293с.
3. Гринев В.Б., Алешечкина Т.Н. Расчет одномерных элементов конструкций. – Харьков: Издательство Иванченко И.С., 2013. – 177с.

4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384с.

5. Дривинг А.Я Устойчивость мачт на оттяжках. – М.: Издательство литературы по строительству, 1964. 112с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой металевих та дерев'яних конструкцій В.В. Фурсов, Харківський національний університет будівництва та архітектури, Харків.

Автор: ГРИНЕВ Владимир Борисович
Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков, доктор технических наук, профессор.

Автор: АЛЁШЕЧКИНА Татьяна Николаевна
Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков, преподаватель.
E-mail – alyoshechkina_t@mail.ru

Автор: ВИНОГРАДОВ Виталий Владимирович
Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков, аспирант.
E-mail – vitaliy.vinogradov@yandex.ru

ПРО ОДНУ МОДЕЛЬНУ ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ ЩОГОЛ МОБІЛЬНОГО ЗВ'ЯЗКУ

В.Б. Гриньов, Т.М. Альошечкіна, В.В. Виноградов

У статті розглядається спрощена модель щогли з одним рівнем закріплення вант. Головна увага в роботі займає розгляд методів мінімізації переміщень верхньої частини щогли шляхом розподілу заданого обсягу матеріалу по висоті. У роботі вивчено вплив параметрів закріплення вант на оптимальність розподілу геометричних характеристик по висоті щогли. Показані конкретні варіанти оптимальних розподілів площі, підраховані для випадків безперервної і дискретної зміни варіюваних величин.

Ключові слова: щогли з одним рівнем закріплення вант, мінімізація переміщень, оптимізація розподілу площі, розподіл геометричних характеристик, варіювані величини.

OF ONE MODEL TASK OF OPTIMIZATION OF MASTS OF MOBILE COMMUNICATION

V.B. Grinyov, T.M. Alyoshechkina, V.V. Vinogradov

This article describes simplified model of mast with the same level of cable fixation. The work is focused on investigation of methods of mast's top movements minimization by sharing the specified volume of material over height. It presents research results for how parameters of cable fixation influence optimal distribution of geometrical characteristics by height of mast. Also work shows specific variants of optimal area distributions calculated for cases of permanent and discrete changing of values that vary.

Keywords: mast with one level of consolidation guys, minimizing movement, optimization of distribution areas, the distribution of the geometric characteristics, varying magnitude.