

УДК 621.01

В.І. Лусь

Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова

## ДО ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ЧУТЛИВОСТІ ВЛАСНОГО СПЕКТРУ ЧАСТОТ ПРЕСО-РІЗЬБОВОГО З'ЄДНАННЯ

Досліджено теоретичні питання вивчення і аналізу впливу змін параметрів на властивості системи аналітичним шляхом. На прикладі динамічної моделі з'єднання представлена структурна модель пресо-гвинтового з'єднання для визначення власних поперечних частот вузла, як динамічної консервативної системи. Одержана система диференціальних рівнянь, розв'язання якої за приведеним алгоритмом і запропонованими варіантами розрахункової схеми, дозволяє одержати результати розрахунку власних частот з'єднань.

**Ключові слова:** конструкція, пресо-різьбове з'єднання, параметри системи, динамічна модель, коефіцієнт чутливості, власна частота, структурна модель, диференціальне рівняння, алгоритм розв'язання, коефіцієнт жорсткості, коефіцієнт інерції, частота і форма коливань.

**Постановка проблеми.** В будь-якій збірній конструкції параметри системи в процесі складання можуть відрізнитись від розрахункових значень і змінюватись в процесі експлуатації. Для того щоб передбачити наслідки цього, необхідно знати реакцію системи на ці зміни. При цьому в багатьох випадках практично неможливо дати оцінку експериментально впливу параметрів на поведінку системи. Тому і виникає необхідність вивчення і аналізу впливу змін параметрів на властивості системи аналітичним шляхом.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Переважна більшість вібраційних параметрів, що характеризують ті або інші аспекти технічного стану системи, змінюють свої значення в дуже широкому діапазоні величин [4, 12]. Висока чутливість має дуже велике значення для даних завдань, оскільки це дозволяє у більшості випадків методами вібродіагностики починати відстежувати зміни в системі з самої ранньої стадії зародження в ній дефектів [8, 9]. Для розв'язку поставленої задачі найбільш прийнятними є методи теорії чутливості [7, 11].

**Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми.** Для переважної більшості первинних параметрів технічного стану системи існують відповідні вібраційні параметри, що мають однозначний кількісний взаємозв'язок між собою. Більше того, часто існує можливість оцінювати один і той же первинний параметр декількома вібраційними параметрами внаслідок того, що іноді один і той же первинний дефект в системі породжує декілька незалежних вібраційних процесів. Це дозволить додатково збільшити достовірність вимірів за допомогою визначення коефіцієнта чутливості власного спектру частот з'єднання.

**Мета статті.** Головною метою цієї роботи є визначення матриці чутливості об'єкта. Для цього необхідно розглянути його структурну модель. Ця модель відображає основні закономірності фізичних і механічних процесів, які виникають в об'єкті в процесі його роботи та дозволяє більш ретельно провести вибір компонентів вектора, що описує конструкцію і вибір типу оператора функціональної моделі.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо динамічну модель з'єднання. Структурна модель пресо-гвинтового з'єднання для визначення власних поперечних частот вузла представляє собою динамічну консервативну систему, рис. 1.

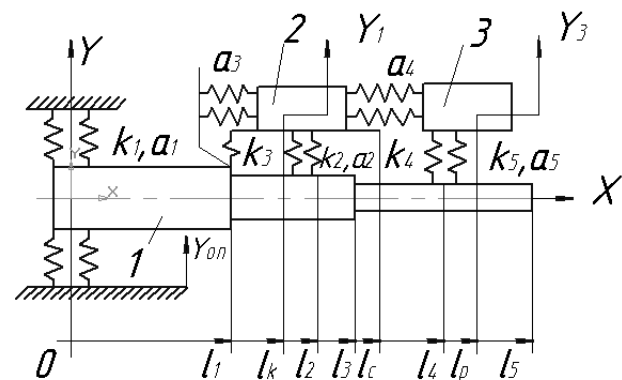


Рис. 1. Динамічна модель пресо-різьбового з'єднання.

Деталі вузла представлені як інерційні елементи, вибір типу яких відображає їх особливості: вісь **1** розглядається як тіло з розподіленими параметрами (стержень), короткі втулка **2** і гайка **3**, які мають подовжній розмір не більший поперечного, – як дискретні, зосереджені елементи. Динамічна модель відображає збірний вузол, виконана посадка з натягом внутрішнього

кільця шарикопідшипника на ступінчасту вісь ротора. Додатково положення кільця на осі фіксується за допомогою гайки.

В розрахунковій схемі взаємодія деталей представлена у виді без інерційних зосереджених пружних елементів, які відповідають усім можливим взаємним переміщенням деталей: як поступальним, так і кутовим. Положення їх в стиках визначається точками прикладення рівнодіючих зусиль при взаємодії деталей по контактним поверхням.

Очевидно, що характер структурної моделі залежить від конкретних особливостей вузла, зокрема, від числових значень і співвідношення геометричних розмірів. Для довгих втулок і гайок можливо складення схеми типу стержень-стержень, де взаємодія між деталями і віссю представляється у виді пружної прокладки, що, в свою чергу, позначиться на виді диференційних рівнянь руху і їх розв'язанню.

Для виявлення залежності власних частот вузла від параметрів стану – силових параметрів – необхідним є облік контактних деформацій в стиках суміжних деталей. Як відомо, жорсткість будь-якого вузла конструкції визначається сукупністю трьох видів пружних деформацій [5, 6]:

1. Пружних деформацій усього тіла деталі, які розглядаються у вигляді стержня або оболонки і визначаються по відповідним формулам опору матеріалів або теорії пружності.

2. Пружних деформацій обмеженої зони деталі, яка примикає до зони контакту із суміжною деталлю, які визначаються при розв'язанні контактних задач теорії пружності.

3. Контактних пружних деформацій стиків, які пов'язані з деформацією мікронерівностей контактуючих поверхонь деталей.

Перші два види деформацій називаються власними деформаціями. Як показали дослідження [2, 3, 10], при геометричному дотику по поверхні і малих навантаженнях, що має місце в прецизійних конструкціях, в тому числі і в вузлі, який ми розглядаємо, контактні деформації стиків деталей часто превалюють над власними деформаціями.

Диференційне рівняння поперечних коливань осі буде мати такий вид [1]:

$$\rho F(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x} \left( EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = f(x, t), \quad (1)$$

де  $\rho$  – щільність матеріалу;  $F$  – площа поперечного перерізу стержня;  $y$  – поперечне переміщення точок подовжньої осі стержня;  $EJ$  – жорсткість поперечного перерізу стержня при згині;  $f$  – питоме збуджувальне навантаження.

При складанні цього рівняння не було враховано вплив поперечних сил і сил інерції при

повороті перерізів, а також дія подовжньої сили враховуючи її мале значення порівняно з Ейлеровою силою.

Враховуючи, що жорсткість стержня по ділянках – величина постійна, а зусилля прикладені по кордонах ділянок, одержимо

$$\rho F_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} + EJ_i \frac{\partial^4 y_i}{\partial x_i^4} = 0, \quad (2)$$

де  $i = 1, 2, \dots, 5$  – номер ділянки.

Щоб одержати диференціальні рівняння руху сконцентрованих тіл і визначити граничні зусилля, що діють на вісь, розглянемо вираз кінетичної енергії для цих тіл і потенціальної енергії пружних елементів:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 m_j \dot{Y}_j^2, \quad j = 1, \dots, 4;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & c_2 [Y_1 - y_{21} + Y_2 (l_2 - l_k)]^2 + a_2 (Y_2 - y'_{21})^2 + \\ & c_3 [Y_1 - y_{11} + Y_2 (l_1 - l_k)]^2 + a_3 (Y_2 - y'_{11})^2 + \\ & c_4 [Y_1 - Y_3 + Y_2 (l_c - l_k) - Y_4 (l_c - l_p)]^2 + \\ & a_4 (Y_2 - Y_4)^2 + c_5 [Y_3 - y_{41} + Y_4 (l_4 - l_p)]^2 + \\ & + a_5 (Y_4 - y'_{41})^2 \end{aligned} \right. \quad (3)$$

де  $m_j$  – узагальнені інерційні характеристики тіл ( $m_1, m_2$  і  $m_3, m_4$  – маса і момент інерції втулки і гайки відповідно);  $Y_j$  – узагальнені координати ( $Y_1, Y_2$  і  $Y_3, Y_4$  – координати, які відповідають поступальному і кутовому переміщенню втулки і гайки відповідно);  $\dot{Y}_j$  – узагальнені значення швидкості;  $a, c$  – коефіцієнти жорсткості поступальних і кутових зв'язків відповідно;  $y_{10}, y_{11}$  – прогини стержня на лівому і правому кордонах відповідно;  $y'_{10}, y'_{11}$  – відповідні кути повороту перерізів стержня.

Використавши рівняння Лагранжа другого роду і провівши елементарні перетворення, одержимо рівняння руху для дискретних тіл:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{Y}_1 + Y_1 c_{11} + Y_2 c_{12} - Y_3 c_{13} - Y_4 c_{14} - y_{11} a_{11} - y_{21} n_{12} &= 0; \\ m_2 \ddot{Y}_2 + Y_1 c_{21} + Y_2 c_{22} - Y_3 c_{23} - Y_4 c_{24} - y_{11} a_{21} - y_{21} a_{22} - \\ - y_{11}' a_{21}' - y_{21}' a_{22}' &= 0; \\ m_3 \ddot{Y}_3 - Y_1 c_{31} - Y_2 c_{32} + Y_3 c_{33} + Y_4 c_{34} - y_{41} a_{34} &= 0; \\ m_4 \ddot{Y}_4 - Y_1 c_{41} - Y_2 c_{42} - Y_3 c_{43} + Y_4 c_{44} - y_{41} a_{44} - y_{41}' a_{44}' &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

де  $c_{jk}$  – узагальнені значення жорсткостей по відповідним узагальненим координатам  $Y_j (c_{jk}=c_{kj})$ ;  $a_{jk}, a'_{jk}$  – узагальнені значення жорсткості по

відповідним поперечним і кутовим переміщенням граничних перерізів стержня.

Так як весь збірний вузол, що описується системами рівнянь (2) і (4), являє собою єдину лінеаризовану коливальну систему, то розв'язок її визначається в одночастотній формі:

$$\begin{aligned} y_i(x, t) &= y_i(x) \cos \omega t; \\ y_j(t) &= y_j \cos \omega t. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут частоти  $f = \omega/2\pi$  є параметрами діагностичного сигналу. Підстановка цього рішення в рівняння руху осі (2) приведе до рівнянь власних форм, загальний розв'язок яких можна виразити через функції Крилова:

$$y_i(x) = A_i S(k_i x) + B_i T(k_i x) + C_i V(k_i x) + D_i W(k_i x),$$

де  $k_i = \sqrt[4]{\rho F_i \omega^2 / EJ}$  – коефіцієнт форми для  $i$ -ї ділянки.

Щоб визначити значення власних частот коливальних системи і відповідні їм власні форми, використаємо рівняння, які враховують умови роботи стержня на кордонах ділянок:

$$\begin{aligned} x = 0 \\ EJ y_{10}''' &= c_1 (Y_{11} - y_{10}); \\ EJ_1 y_{10}''' &= a_1 (-Y_{a0} + y_{10}'); \\ x = l_5 \quad y_{51}'' &= y_{51}''' = 0; \\ M_{i,1} &= M_{i+1,0} + M_i; \quad Q_{i,1} = Q_{i+1,0} - Q_i. \end{aligned} \quad (6)$$

В цих виразах величини  $M_i, Q_i$  враховують дію гайки і втулки на стержень і визначаються як окремі похідні від потенціальної енергії зв'язків системи (3) по відповідним переміщенням осі.

$$M_i = -\partial \Pi / \partial y'_{i,1}; \quad Q_i = -\partial \Pi / \partial y_{i,1}. \quad (7)$$

Рівняння (4) з врахуванням рівнянь (5) і разом з (6) утворюють систему диференціальних рівнянь з характерним визначником 24-го порядку.

Власні частоти динамічної системи, яку ми розглядаємо будуть визначатися із умови перетворення характерного визначника в нуль, тобто

$|\Delta(\omega)| = 0$ . Враховуючи високий порядок визначника і його трансцендентність, задача по визначенню власних частот розв'язувалась по складеному алгоритму блок-схема якого показана на рис. 2.

Враховуючи особливості розв'язування задач за допомогою ПЕОМ, розрахунок проводився по заданим значенням усіх параметрів, які описують з'єднання, в тому числі і параметрів вектора стану.

Коливальна система, яку ми розглядаємо, як система з розподіленими параметрами має нескінченну множину власних частот, які будуть

задовольняти характеристичне рівняння. Із них практичне значення мають тільки декілька перших частот.

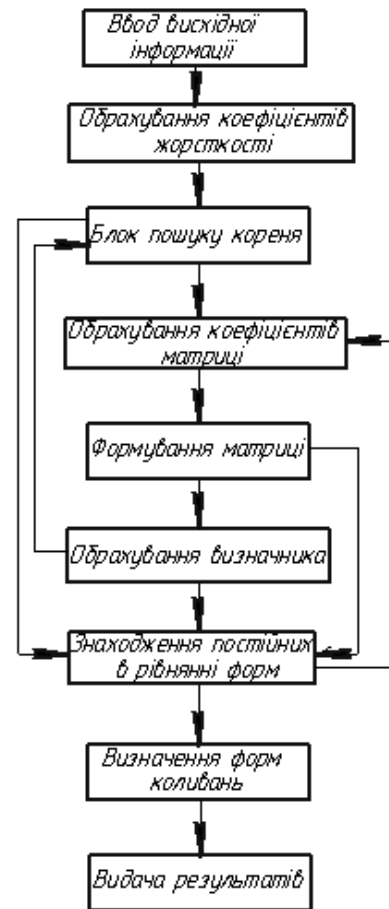


Рис. 2. Блок-схема програми розрахунку власних частот і форм коливань вузла

Алгоритм пошуку частот полягає в тому, що визначається інтервал частот, в якому проходить зміна знаку визначника і знаходиться шукане значення частоти. Для цього необхідно задати послідовно з постійним кроком значення частот, для яких вираховуються члени визначника, формується матриця і визначається знак визначника. На знайденому інтервалі значення шуканої частоти уточнюється методом поділу відрізка пополам до досягнення заданого ступеня точності. Після знаходження одного значення резонансної частоти розрахунок повторюється від знайденої точки. Цей пошук ведеться до тих пір, поки не буде пройдений весь заданий діапазон частот.

Щоб не пропустити двійні, кратні або пари близько лежачих коренів, програмою передбачено визначення і аналіз знака першої і другої похідної визначника по частоті.

На кінцях інтервалу з такими коренями знаки визначника однакові, знаки першої похідної протилежні, знаки другої похідної і визначника також протилежні. Умова протилежності знаків

визначника і його другої похідної дозволяє відбракувати із рішень, які одержані із попередніх умов, звичайні екстремуми функцій.

Найбільший інтерес виконання розрахункової схеми представляють три слідуочі варіанти:

1. Якщо допустити в рівняннях (4)  $m_3 = m_4 = 0$ ;  $c_3 = c_4 = a_5 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ , то інші коефіцієнти жорсткості визначаються по тим же виразам. В цьому випадку одержуємо розрахункову схему пресового з'єднання.

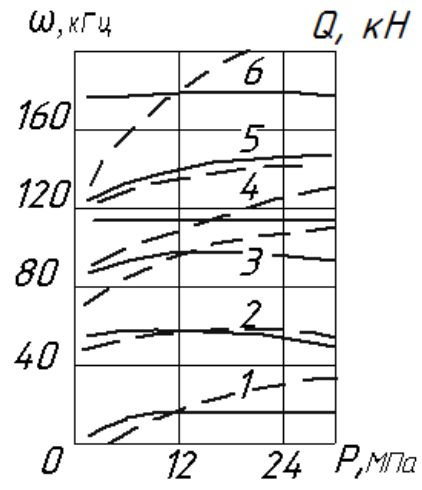
2. Якщо розірвати зв'язки між віссю і зосередженими тілами, тобто при  $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = a_{34} = a_{44} = a'_{21} = a'_{22} = a'_{44} = 0$  (при цьому значення других коефіцієнтів жорсткості залишаються незмінними), тоді одержимо розрахункову схему «чистої» консолі. Якщо значення коефіцієнтів інерції твердих тіл не дорівнюють нулю, додатково до власних частот стержня одержимо парціальні частоти системи твердих тіл. Додатково прийнявши  $c_{12} = c_{13} = c_{14} = c_{23} = c_{24} = c_{34} = 0$ , одержимо парціальні частоти коливань твердих тіл по окремим ступеням свободи.

3. При рівності нулю усіх інерційних елементів (зосереджених тіл) вихідна розрахункова схема вироджується в підсилену консоль, в якій три поперечних перерізи ( $x = l_1, x = l_2, x = l_4$ ) пов'язані через відповідні дискретні зв'язки. Жорсткість усього стержня, а також частоти зростають порівняно з «чистою» консоллю. Із цього виходить, що типова розрахункова схема стержень – тіло тільки частково враховує збільшення жорсткості з'єднання при фіксації втулки і гайки.

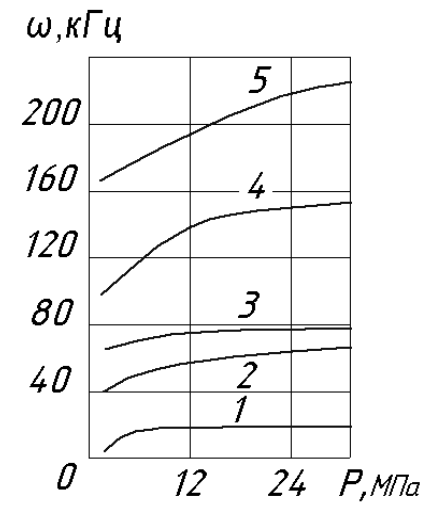
На рис. 3 показані залежності резонансних частот від силових параметрів як для пресо-різьбового з'єднання (перші шість частот), так і з'єднань з натягом (перші п'ять частот). Тут  $\omega$  – власні частоти;  $P$  і  $Q$  – відповідно тиск напесовки і зусилля осьового стискання. Результати розрахунку приведені для шести власних форм пресо-різьбового з'єднання і п'яти власних форм для з'єднання з натягом. Із графіків видно, що для обох силових параметрів, які характеризують стан з'єднання, спостерігається насичення. Так, в пресо-різьбовому з'єднанні (рис. 3а) це явище спостерігається для більшості власних форм при значеннях тиску напесовки, який перевищує 10 МПа (криві 1 - 6). Відмітимо також різну ступінь впливу параметрів стану на різні частоти. Для більшості резонансних частот (рис. 3а) вплив осьового зусилля більш значимий (штрихова лінія), чим вплив тиску напесовки (суцільна лінія). Це можна пояснити малою довжиною втулки і впливом осьової сили.

Порівняння частот і форм коливань показують, що 1-а частота пресо-різьбового з'єднання визначається в основному 1-ю власною частотою

коливань стержня, 6-а частота вузла – 3-ю частотою стержня і 4-ю частотою парціальної системи. Проміжні частоти залежать як від 2-ї частоти коливань стержня, так і від перших трьох частот парціальної системи.



а)



б)

Рис.3. Чутливість резонансних частот системи до зміни параметрів стану

Для з'єднання з натягом (рис.3б) розподіл частот аналогічний: 1-а частота (крива 1) обумовлена першою формою коливань стержня; на 2-й частоті (крива 2) з'єднання значно визначається вплив моменту інерції втулки; 3-я, 4-а і 5-а форми коливань є найбільш чутливими до зміни тиску напесовки.

**Висновки і пропозиції.** Як уже відмічалось, однією з основних цілей визначення структурних моделей являється одержання апріорної інформації для системи діагностування. На основі одержаних розрахункових значень 1-ї резонансної частоти для різних значень силових параметрів проводиться вибір типу апроксимації у виді степеневого ряду з

дробними показниками. Визначення матриці чутливості дозволяє визначити чутливі і незмінні до вектору стану параметри. Ця інформація дає відповідь на питання, які параметри в найбільшій ступені визначають вібраційну картину об'єкта. Крім того, визначення матриці чутливості дозволяє значно спростити динамічну модель системи, залишивши тільки ті параметри, які найбільш значимо визначають вібраційний стан системи.

### Література

1. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1972. -416 с.
2. Демкин Н.Б., Рыжов Э.В. Качество поверхности и контакт деталей машин. М.: Машиностроение, 1981. - 244 с.
3. Демкин Н.Б. Контактное состояние шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. – 227 с.
4. Костюков В.Н., Науменко А.П. Основы диагностики и мониторинга машин: учеб. пособие. - Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011. - 360с.
5. Лусь В.И. К определению коэффициентов продольной жесткости резьбовых соединений, используемых в строительстве. Комунальне господарство міст. Науково-технічний збірник. Випуск 105, серія: Технічні науки та архітектура. Харків: 2012. с.441-446.
6. Лусь В.И. К определению коэффициентов поперечной жесткости резьбового соединения в строительных конструкциях. Комунальне господарство міст. Науково-

технічний збірник. Випуск 110, серія: Технічні науки та архітектура. Харків: 2013. с.28-33.

7. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении / Под ред. Е.Н. Розенвассера, Р.М. Юсупова. Л.: Энергия, 1971. -344 с.
8. Петрухин С. В., Петрухин В. В. Основы вибродиагностики и средства измерения вибрации. Учебное пособие. : Инфра -М. -2010. -176 с.
9. Русов В.А. "Диагностика дефектов вращающегося оборудования по вибрационным сигналам", 2012. -244с.
10. Рыжов Э.В. Контактная жесткость деталей машин. М.: Машиностроение, 1966. -194 с.
11. Томович П., Вукобратович М. Общая теория чувствительности. М.: Сов. Радио, 1992. – 239 с.
12. Учебное пособие «Основы вибродиагностики» BALTECH Center, 2014. - 99с.

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Ю.М. Тормосов, Харківський державний університет харчування та торгівлі, Харків.

**Автор:** ЛУСЬ Володимир Іванович  
кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри Харківський національний університет міського господарства ім. О.М. Бекетова  
E-mail – lus.51@mail.ru

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СОБСТВЕННОГО СПЕКТРА ЧАСТОТ ПРЕССО-РЕЗЬБОВОГО СОЕДИНЕНИЯ

В.И. Лусь

Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А. Н. Бекетова, Харьков

*Исследованы теоретические вопросы изучения и анализа влияния изменений параметров на свойстве системы аналитическим путем. На примере динамической модели соединения представлена структурная модель прессо-винтового соединения для определения собственных поперечных частот узла, как динамической консервативной системы. Полученная система дифференциальных уравнений, решение которой за приведенным алгоритмом и предложенными вариантами расчетной схемы, позволяет получить результаты расчета собственных частот соединений.*

**Ключевые слова:** конструкция, прессо-резьбовое соединение, параметры системы, динамическая модель, коэффициент чувствительности, собственная частота, структурная модель, дифференциальное уравнение, алгоритм решения, коэффициент жесткости, коэффициент инерции, частота и форма колебаний.

## TO THE DEFINITION OF SENSITIVITY FACTOR OF THEIR OWN FREQUENCY SPECTRUM PRESS-THREADED CONNECTION

V. Lus'

O.M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkov

*The theoretical questions of study and analysis of influence of changes of parameters are investigational on property of the system by an analytical way. On the example of dynamic model of connection the structural model of presso of spiral connection is presented for determination of transversal eigenfrequencies of knot, as dynamic conservative system. The got system of differential equalizations, decision of that after the brought algorithm over and offer variants of calculation chart, allows to get the results of calculation of eigenfrequencies of connections.*

**Key words:** construction, presso-threaded connection, parameters of the system, dynamic model, coefficient of sensitivity, eigenfrequency, structural model, differential equalization, algorithm of decision, coefficient of inflexibility, coefficient of inertia, frequency and form of vibrations.