

УДК 534.1

В.П. Шпачук, А.И. Рубаненко, Ю.И. Ващенко

Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.М. Бекетова, Харьков

**ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ И КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТЕРЖНЯ С ГАСИТЕЛЕМ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Рассматривается задача о свободных поперечных колебаниях шарнирно опертого по краям стержня с упруго присоединенной массой в качестве гасителя колебаний. Определены собственные частоты поперечных колебаний стержня с гасителем. Исследованы особенности спектра частот для различных параметров жесткостей стержня и гасителя, а также координат точки крепления гасителя к несущему стержню.

**Ключевые слова:** динамический гаситель колебаний, свободные поперечные колебания стержня, собственная частота.

**Постановка проблемы.** Проблема уменьшения уровня колебаний конструкций и их элементов, оказывающих существенное влияние на прочность, надежность и долговечность, возникает в различных областях техники: промышленном и гражданском строительстве, машиностроении, приборостроении, транспорте и т.д. Одним из средств уменьшения вибраций является применение динамических гасителей колебаний. Для эффективной работы гасителя необходимо знать параметры возмущающего воздействия и основные характеристики собственных колебаний защищаемой системы. Типичными расчетными схемами высотных сооружений и элементов конструкций являются стержневые модели с распределенными параметрами [1].

**Анализ последних исследований и публикаций.** Теоретические и экспериментальные исследования свободных и вынужденных колебаний, а также оценка эффективности динамических гасителей колебаний в системах с распределенными параметрами приведены в работах [1-12]. Однако в известных работах не рассмотрены особенности спектра собственных частот с учетом механических и конструктивных параметров несущего стержня и присоединенного гасителя.

**Формулировка цели статьи.** Целью статьи является исследование спектра частот свободных поперечных колебаний стержня с упруго присоединенной массой в качестве гасителя при варьировании ее механических и конструктивных характеристик.

**Изложение основного материала.** Расчетная схема механической системы, состоящей из шарнирно опертого по краям стержня и упруго присоединенной массы, приведена на рис. 1. Здесь:  $m_0$ ,  $c_0$  – соответственно масса и жесткость гасителя;  $l$  – длина

стержня;  $x_1$  – координата точки крепления гасителя к стержню.

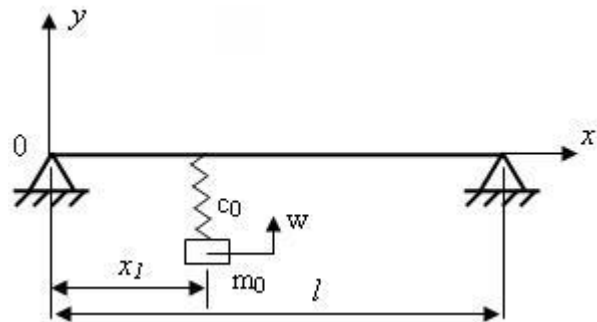


Рис. 1. Расчетная схема стержня с гасителем колебаний

Система дифференциальных уравнений свободных поперечных колебаний стержня с гасителем имеет вид [1, 3, 13]:

$$\begin{cases} a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} [c_0(w - y_1)] \cdot \delta(x - x_1), \\ m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_0(w - y_1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a^2 = \frac{EI}{\rho F}$ ;  $E$ ,  $\rho$  – модуль упругости и плотность материала стержня;  $I$ ,  $F$  – момент инерции и площадь поперечного сечения стержня соответственно;  $y = y(x, t)$  – перемещение (прогиб) произвольного сечения стержня;  $y_1 = y(x_1, t)$ ,  $w = w(t)$  – перемещения сечения стержня с координатой  $x = x_1$  и присоединенной массы  $m_0$  соответственно;  $\delta(x - x_1)$  – дельта-функция.

Граничные условия рассматриваемой схемы определяются соотношениями [13]:

$$\begin{cases} y|_{x=0} = 0, & y|_{x=l} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, & \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

С использованием метода Фурье получено частотное уравнение стержня с гасителем, которое имеет вид

$$\Delta = sh(kl) \sin(kl) - \frac{\gamma_G}{2k^3} \Psi(x_1) = 0, \quad (3)$$

где  $\Psi(x_1) = sh(kl) \sin(kx_1) \sin[k(l-x_1)] - \sin(kl) s h(kx_1) s h[k(l-x_1)]$ ;

$$\gamma_G = \frac{1}{EI} \frac{c_0 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad k^4 = \frac{\omega^2}{a^2}; \quad \omega - \text{частота колебаний}$$

системы;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{m_0}}$  - парциальная частота гасителя.

Проведены численные расчеты для механической системы с параметрами:  $E=2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\rho=8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $l=8$  м;  $b=6$  см,  $h=8$  см, где  $b$  и  $h$  - ширина и высота прямоугольного поперечного сечения стержня;

$$D_m = \frac{M}{m_0} = 10, \quad \text{где } D_m - \text{безразмерный параметр,}$$

определяющий отношение масс стержня  $M$  и гасителя  $m_0$ .

Основные результаты расчета частот стержня без и с гасителем колебаний приведены в табл. 1. Здесь в строке 1 указаны собственные частоты  $\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0$  стержня без гасителя, в строках 2-6 - собственные частоты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  стержня с гасителем; парциальная частота гасителя  $\omega_0$  выделена в таблице пунктиром;  $D_c = \frac{c_0 l^3}{EI}$  - безразмерный параметр,

который выражает отношение жесткостей гасителя и стержня;  $\xi = \frac{x_1}{l}$  - безразмерный параметр, определяющий точку крепления гасителя.

Анализ результатов показывает, что присоединение к стержню гасителя приводит к появлению в спектре частот системы «стержень - гаситель» новой собственной частоты (в диапазоне значений параметра  $D_c$ , приведенного в табл. 1, такой будет частота  $\omega_3$ ), близкой к парциальной частоте

$\omega_0$ . В общем случае собственные частоты стержня с гасителем, которые меньше частоты  $\omega_0$ , лежат ниже,

а частоты, большие  $\omega_0$  - выше собственных частот  $\omega_i^0$  ( $i=1, 2, 3$ ) стержня без гасителя (строки 2-5 табл. 1):  $\omega_1 < \omega_1^0$ ,  $\omega_2 < \omega_2^0$ ,  $\omega_4 > \omega_3^0$ .

Однако в частных случаях, когда точка присоединения гасителя находится в узловой точке формы колебаний стержня без гасителя, собственная частота, которая соответствует этой форме, остается неизменной и для стержня с гасителем. Например, в случае крепления гасителя к середине стержня ( $\xi=1/2$ ) такой будет частота  $\omega_2 = \omega_2^0 = 71,23$  рад/с (строка 6 табл. 1), которая соответствует одноузловой форме колебаний стержня без гасителя. Аналогичной особенностью обладают и более высокие частоты, которые соответствуют формам колебаний с узлом в точке крепления гасителя.

Расчеты показывают, что при определенных параметрах системы наблюдаются эффекты наложения частот. Так, одна из частот системы «стержень - гаситель» может оказаться равной парциальной частоте гасителя. Например, при значениях параметров  $\xi=3/7$  и относительной жесткости гасителя и стержня  $D_c=127,81$  вторая частота системы равна парциальной частоте гасителя:  $\omega_2 = \omega_0 = 64,50$  рад/с, а при  $D_c=492,56$  - третья частота:  $\omega_3 = \omega_0 = 126,63$  рад/с; при  $\xi=1/2$  (точка крепления гасителя - середина стержня) и  $D_c=155,85$  будут равными частоты:  $\omega_2 = \omega_0 = 71,23$  рад/с. Физически это означает, что при данных параметрах системы гаситель не будет выполнять свою основную функцию гашения колебаний.

В частных же случаях добавляется ситуация, когда могут накладываться друг на друга две частоты системы. Например, при значениях параметров  $\xi=1/2$  и  $D_c=134,77$  равны между собой вторая и третья частоты системы:  $\omega_2 = \omega_3 = 71,23$  рад/с; при  $\xi=1/3$  (точка крепления гасителя - одна треть длины стержня) и  $D_c=638,79$  будут равными третья и четвертая частоты системы:  $\omega_3 = \omega_4 = 160,26$  рад/с.

Важной характеристикой, определяющей чувствительность системы «стержень - гаситель» к изменению частоты внешнего воздействия, является величина интервала между частотой настройки гасителя (его парциальной частотой) и собственной частотой системы.

Таблица 1. Спектр собственных частот стержня без гасителя и с гасителем колебаний

№	система	$\zeta$	$D_c$	спектр собственных частот, рад/с
1	стержень без гасителя	-	-	
2	стержень с гасителем	3/7	150	
3		3/7	300	
4		3/7	410	
5		3/7	800	
6		1/2	150	

Влияние положения точки крепления гасителя на величину интервала  $\Delta\omega$  между парциальной частотой гасителя и ближайшей к ней частотой системы представлено на рис. 2, где  $\Delta = \Delta\omega / \omega_0 \cdot 100\%$ ;  
 $\Delta\omega = \min(|\omega_{i+1} - \omega_0|, |\omega_0 - \omega_i|)$ ;  $\omega_i, \omega_{i+1}$  – смежные частоты системы, для которых выполняются

неравенства:  $\omega_i < \omega_0 < \omega_{i+1}$ . Значения относительного параметра жесткости  $D_c$  (рис. 2а, б, в, г) соответствуют областям первых четырех резонансных частот стержня без гасителя.

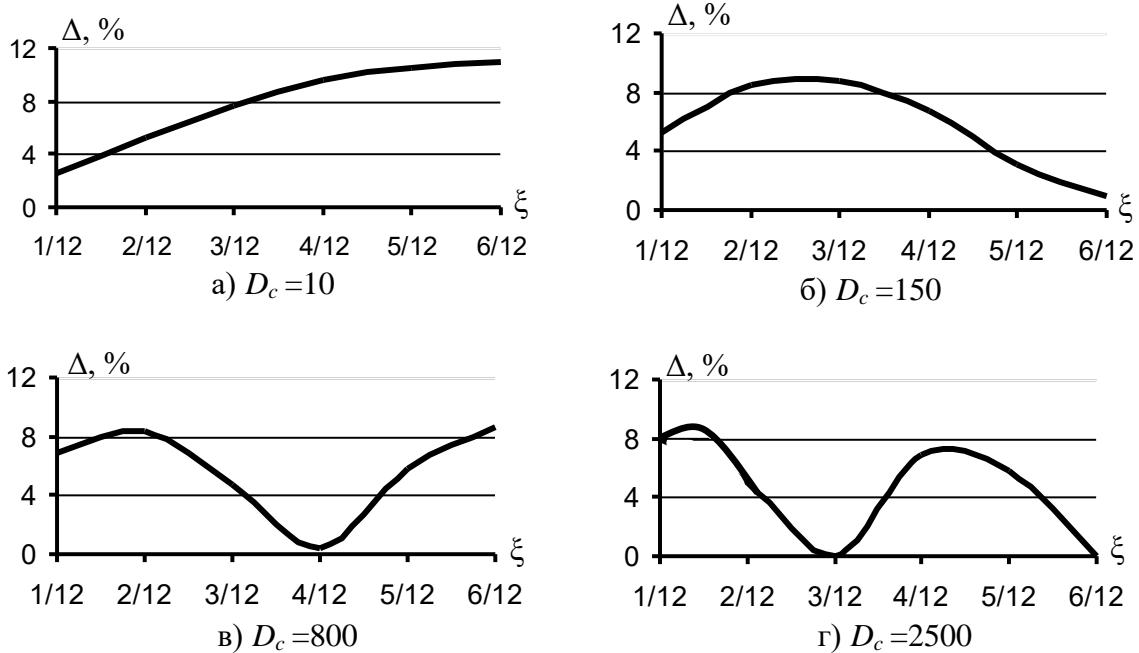


Рис. 2. Влияние положения точки крепления гасителя колебаний на величину интервала между парциальной частотой гасителя и ближайшей частоты системы «стержень – гаситель»

Как следует из рис. 2, интервал между частотами будет наибольшим, если гаситель помещен в пучностях соответствующей формы колебаний стержня без гасителя. Для первой (безузловой) формы колебаний это будет точка с относительной координатой  $\xi = 6/12 = 1/2$  (рис. 2а), для второй (одн узловой) формы – точка с координатой  $\xi = 3/12 = 1/4$  (рис. 2б), для третьей (двухузловой) – точки с координатами  $\xi = 2/12 = 1/6$  и  $\xi = 6/12 = 1/2$  (рис. 2в), для четвертой (трехузловой) – точки с координатами  $\xi = 1,5/12 = 1/8$  и  $\xi = 4,5/12 = 3/8$  (рис. 2г). Если же гаситель помещен в узле формы колебаний, то парциальная частота гасителя и ближайшая частота системы практически накладываются друг на друга. Такими будут точки с координатами  $\xi = 6/12 = 1/2$  (рис. 2б),  $\xi = 4/12 = 1/3$  (рис. 2в),  $\xi = 3/12 = 1/4$  и  $\xi = 6/12 = 1/2$  (рис. 2г).

**Выводы.** Присоединение к стержню гасителя колебаний приводит к появлению в спектре частот системы «стержень – гаситель» новой собственной частоты, близкой к парциальной частоте гасителя  $\omega_0$ . При этом, в зависимости от параметров системы, новая частота может быть меньше, больше и даже равна парциальной частоте гасителя.

В частных случаях, когда гаситель помещен в узловую точку формы колебаний стержня без гасителя, собственная частота, соответствующая этой форме, остается неизменной и для системы «стержень – гаситель». При определенных параметрах системы в

этих случаях наблюдается также эффект наложения двух собственных частот стержня с гасителем.

Установлено, что величина интервала между частотой настройки гасителя (его парциальной частотой) и собственной частотой стержня с гасителем, определяющего чувствительность системы к изменению частоты внешнего воздействия, будет наибольшей, если гаситель помещен в пучностях соответствующей формы колебаний стержня без гасителя.

Решение поставленной задачи даёт возможность учесть особенности распределения частот стержня с гасителем, что особенно важно при применении численных методов определения собственных характеристик системы для оценки эффективности работы гасителей, в частности, в задачах с другими граничными условиями или для стержней переменного поперечного сечения.

### Литература

1. Корнев, Б.Г. Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения [Текст] / Б.Г. Корнев, Л.М. Резников. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
2. Деревянко, Ю.С. Взаимодействие параметрически возбуждаемого гибкого стержня с динамическим гасителем [Текст] / Ю.С. Деревянко, К.В. Аврамов // Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПИ», 2008. – № 36. – С. 70–74.
3. Елисеев, В.В. О локализации динамического гашения колебаний в пространстве и по частоте [Текст] / В.В. Елисеев, Е.А. Оборин // Теория механизмов и машин. – 2014. – № 1 (23). – Т. 12. – С. 20–26.

4. Карамышкин, В.В. Динамическое гашение колебаний [Текст] / В.В. Карамышкин. – Л.: Машиностроение, 1988. – 108 с.
5. Макаров, С.Б. Мультирезонансный динамический гаситель [Текст] / С.Б. Макаров, Н.В. Панкова, М.Д. Перминов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – №2. – С. 70–74.
6. Мартин, В.Є. Застосування різного типу маятникових динамічних гасників коливань [Текст] / В.Є. Мартин, Б.М. Дівеєв, І.Р. Дорош // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Прикладная механика. – 2014. – 5/7 (71). – С. 15–19.
7. Тулкина, А.Н. Определение частот и форм колебаний стержневой системы, содержащей нанообъект, на основе теории С.П. Тимошенко [Текст] / А.Н. Тулкина // Вестник СПбГУ (Серия 1). – СПбГУ, 2011. – Вып. №1. – С. 144–154.
8. Latas W. Distributed Dynamic Vibration Absorber in Beam [Text] / W. Latas // Journal of Vibrations in Physical Systems. – 2014. – Vol. 26. – P. 137–144.
9. Noori, B. Optimum design of dynamic vibration absorbers for a beam, based on  $H_{\infty}$  and  $H_2$  optimization / B. Noori, A. Farshidianfar // Archive of Applied Mechanics. – 2013. – Vol. 83, No. 12. – P. 1773–1787.
10. Norhaslina, Jaini. Vibration analysis of a beam structure attached with two dynamic vibration absorbers. Masters thesis [Text] // Universiti Tun Hussein Onn Malaysia. – 2014. – 118 p.
11. Wong, W.O. Design of a dynamic vibration absorber for vibration isolation of beams under point or distributed loading [Text] / W.O. Wong, S.L. Tang, Y.L. Cheung, L. Cheng // Journal of Sound and Vibration. – 2007. – Vol. 301. – P. 898–908.
12. Zainulabidin, M.H. Transverse Vibration of a Beam Structure Attached With Dynamic Vibration Absorbers: Experimental Analysis / M.H. Zainulabidin, N. Jaini // International Journal of Engineering & Technology. – 2012. – Vol. 12, No. 6. – P. 82–86.
13. Бабаков, И.М. Теория колебаний [Текст] / И.М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

### References

1. Korenev, B.G. Dinamicheskie gasiteli kolebaniy: Teorija i tekhnicheskie prilozheniya [Tekst] / B.G. Korenev, L.M. Reznikov. – М.: Nauka, 1988. – 304 s.
2. Derevianko, Y.S. Vzaimodeystvie parametricheskiy vzbuzhdaemogo gibkogo sterzhnia s dinamicheskim gasitelem [Tekst] / Y.S. Derevianko, K.V. Avramov // Visnyk NTU «KPI». Seriya: Dynamika i mitsnist mashin. – К.: NTU «KPI», 2008. – № 36. – С. 70–74.
3. Eliseyev, V.V. O lokalizatsii dinamicheskogo gasheniya kolebaniy v prostranstve i po chastote [Tekst] / V.V. Eliseyev, E.A. Oborin // Teoriya mekhanizmov i mashin. – 2014. – № 1 (23). – Т. 12. – С. 20–26.
4. Karamyshkin, V.V. Dinamicheskoe gashenie kolebaniy [Tekst] / V.V. Karamyshkin. – Л.: Mashinostroenie, 1988. – 108 s.

5. Makarov, S.B. Multirezonsnyy dinamicheskiy gasitel [Tekst] / S.B. Makarov, N.V. Pankova, M.D. Perminov // Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii. – 2012. – №2. – С. 70–74.
6. Martyn, V.E. Zastosuvannya riznogo typu mayatnykovykh dynamichnykh gasnykiv kolyvan [Tekst] / V.E. Martyn, B.M. Diveyev, I.R. Dorosh // Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh technologi. Prikladnaya mekhanika. – 2014. – 5/7 (71). – С. 15–19.
7. Tulkina, A.N. Opredeleniye chastot i form kolebaniy sterzhnevoy sistemy, soderzhashchey nanoobyekt, na osnove teorii S.P. Timoshenko [Tekst] / A.N. Tulkina // Vestnik SPbGU (Seriya 1). – SPbGU, 2011. – Вып. №1. – С. 144–154.
8. Latas W. Distributed Dynamic Vibration Absorber in Beam [Text] / W. Latas // Journal of Vibrations in Physical Systems. – 2014. – Vol. 26. – P. 137–144.
9. Noori, B. Optimum design of dynamic vibration absorbers for a beam, based on  $H_{\infty}$  and  $H_2$  optimization / B. Noori, A. Farshidianfar // Archive of Applied Mechanics. – 2013. – Vol. 83, No. 12. – P. 1773–1787.
10. Norhaslina, Jaini. Vibration analysis of a beam structure attached with two dynamic vibration absorbers. Masters thesis [Text] // Universiti Tun Hussein Onn Malaysia. – 2014. – 118 p.
11. Wong, W.O. Design of a dynamic vibration absorber for vibration isolation of beams under point or distributed loading [Text] / W.O. Wong, S.L. Tang, Y.L. Cheung, L. Cheng // Journal of Sound and Vibration. – 2007. – Vol. 301. – P. 898–908.
12. Zainulabidin, M.H. Transverse Vibration of a Beam Structure Attached With Dynamic Vibration Absorbers: Experimental Analysis / M.H. Zainulabidin, N. Jaini // International Journal of Engineering & Technology. – 2012. – Vol. 12, No. 6. – P. 82–86.
13. Babakov, I.M. Teoriya kolebaniy [Tekst] / I.M. Babakov. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

**Автор:** ШПАЧУК Владимир Петрович  
доктор технических наук, профессор, профессор  
кафедры, Харьковский национальный университет  
городского хозяйства им. А.М. Бекетова  
E-mail – shpachukvp@mail.ru

**Автор:** РУБАНЕНКО Александр Игоревич  
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры  
Харьковский национальный университет городского  
хозяйства им. А.М. Бекетова

**Автор:** ВАЩЕНКО Юлия Ивановна  
студентка магистратуры, Харьковский  
национальный университет городского хозяйства  
им. А.М. Бекетова

## ВПЛИВ МЕХАНІЧНИХ І КОНСТРУКТИВНИХ ПАРАМЕТРІВ СТЕРЖНЯ З ГАСИТЕЛЕМ НА ВЛАСНІ ЧАСТОТИ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ

В.П. Шпачук, О.І. Рубаненко, Ю.І. Ващенко

Харьковский национальный университет городского хозяйства им. О.М. Бекетова, Харьков

*Розглядається задача про вільні поперечні коливання шарнірно обпертого стержня з пружно приєднаною масою у якості гасителя коливань. Визначені власні частоти поперечних коливань стержня з гасителем. Досліджені особливості спектра частот для різних параметрів жорсткостей стержня і гасителя, а також координат точки прикріплення гасителя до несучого стержня.*

**Ключові слова:** динамічний гаситель коливань, вільні поперечні коливання стержня, власна частота.

## INFLUENCE OF MECHANICAL AND STRUCTURAL PARAMETERS OF THE ROD WITH MASS DAMPER ON THE NATURAL FREQUENCIES OF TRANSVERSE VIBRATIONS

V. Shpachuk, A. Rubanenko, Y. Vashchenko

O.M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv

*The problem of free transverse vibrations of the rod with mass damper is considered. The equation of frequencies is obtained using Fourier method. For the given parameters the natural frequencies of transverse vibrations of the rod with mass damper are defined. The features of the spectrum of frequencies for different parameters of stiffness of the rod and the damper, as well as coordinate points of attachment of the damper to the supporting rod, are investigated. It is established that the accession to the rod of the damper leads to the appearance in the frequency spectrum of the system "rod – mass damper" new natural frequencies close to the partial frequency of the damper. Thus, depending on the parameters of the system, the new frequency can be less than, more then and even equal to the partial frequency of the damper. Under certain system parameters there is also the effect of blending two natural frequencies of the rod with mass damper. It is shown that the system will be more resistant to change the frequency of the external influence, if the damper is placed in the loops of the corresponding shapes of the rod without the damper. The solution of the problem takes into account the distribution of frequencies of the rod with the damper, which is particularly important in the application of numerical methods for the assessment of their own performance to assess the effectiveness of the dampers, in particular, in problems with other boundary conditions or for rods with variable cross-section.*

**Keywords:** mass damper, free transverse rod vibrations, natural frequency.