УДК 624.042 **DOI 10.33042/2522-1809-2019-1-147-215-219**

Н.О. Махінько

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

ОСОБЛИВОСТІ ІМОВІРНІСНОГО РОЗРАХУНКУ ПОЗАЦЕНТРОВО-СТИСНУТИХ ЕЛЕМЕНТІВ

В статті розв'язана задача визначення коефіцієнта критичного фактору для елементів сталевих ємностей зберігання, які працюють на позацентровий стиск з урахуванням різних законів розподілу випадкової величини узагальненого зусилля. Запропоновано апроксимований вираз для представлення залежності коефіцієнта стійкості при позацентровому стиску від умовної гнучкості та приведеного відносного ексцентриситету.

Ключові слова: *надійність, коефіцієнт критичного фактору, коефіцієнт стійкості при позацентровому стиску.*

Постановка проблеми

Будівельні конструкції мають відповідати вимогам надійності та безпеки, а також мати оптимальне економічне вирішення. Даного поєднання складно досягти при розрахунках в контексті методу граничних стані з визначеними розрахунковими значеннями зовнішніх впливів та міцності. Потрібно враховувати, що ці величини мають випадковий характер з певними законами розподілу та статистичними характеристиками. В такому разі, для вирішення поставлених задач, необхідно залучати методи теорії імовірності та математичної статистики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Дане дослідження ґрунтується на наукових розробках в області теорії надійності та теорії стійкості будівельних конструкцій. Вивчення роботи позацентрово стиснутих стрижнів входить до класичного курсу металевих конструкцій та добре висвітлено в літературі [1-3]. Теоретичні та практичні питання імовірнісного розрахунку та їх застосування в інженерній практиці також являються предметом вивчення багатьох вчених [4-10].

Формулювання мети статті

Оцінка надійності будівельної конструкції чи окремого її елемента базується на розрахунках міцності та стійкості, відповідно яких визначається кількісна міра між зовнішніми впливами та міцнісними характеристиками, виражена певною граничною нерівністю. При цьому досить зручно використовувати безрозмірне значення коефіцієнта критичного фактору (ККФ), що відповідає відношенню узагальненого зусилля до міцності і не має перевищувати одиниці. В рамках даної статті покладалося за мету визначення імовірнісних характеристик критичного фактору елементів сталевих ємностей зберігання, що працюють на позацентровий стиск. При цьому головною складністю є врахування залежності коефіцієнта стійкості при позацентровому стиску від умовної гнучкості та приведеного відносного ексцентриситету. В разі виконання детермінованого розрахунку елементів ці співвідношення відображені в табличній формі в нормах проектування [11]. Користуватися даними таблицями для вирішення імовірнісних розрахункових задач неможливо, оскільки в цьому разі необхідна аналітична залежність, яка б поєднувала зазначені величини або її апроксимоване вираження.

Виклад основного матеріалу

В загальному випадку задачу імовірнісного розрахунку позацентрово стиснутих елементів ємності зберігання будемо вважати вирішеною при знаходженні статистичних характеристик та диференціальної $f_K(\cdot)$ й інтегральної $F_K(\cdot)$ функції розподілу коефіцієнту критичного фактору K_R. При цьому обмежимося стиснутими елементами симетричного суцільного перерізу, що вигинаються в одній з головних площин, не розглядаючи питання просторової втрати стійкості. Узагальнене зусилля $\tilde{S}$ та узагальнена міцність $\tilde{R}$ являються випадковими величинами з заданими законами розподілу. Закон розподілу величини $\tilde{R}$ будемо вважати нормальним, а для величини $\tilde{S}$ врахуємо два варіанти: нормальний розподіл, який використовується для опису тиску сипучого матеріалу на стінку ємності та подвійний експоненціальний розподіл Гумбеля, що застосовується для опису максимумів снігового та вітрового навантажень.

ККФ виражений через нормовані величини узагальненої міцності та узагальненого зусилля визначиться як

$$\tilde{K}_R(\tilde{\gamma}_S,\tilde{\gamma}_R)=\frac{\tilde{S}}{\tilde{R}}=\frac{m_S\cdot(1+\tilde{\gamma}_S V_S)}{m_R\cdot(1+\tilde{\gamma}_R V_R)}; \quad , \qquad \tilde{K}_R(\tilde{\gamma}_S,\tilde{\gamma}_R)=\frac{V_R}{V_S}\,p_S\,\frac{1+\tilde{\gamma}_S V_S}{1+\tilde{\gamma}_R V_R}. \tag{1}$$

де m_S, m_R, σ_S, σ_R – математичні очікування та середньоквадратичне відхилення величин $\tilde{R}$ і $\tilde{S}$; $V_S=\frac{\sigma_S}{m_S}$, $V_R=\frac{\sigma_R}{m_R}$, $p_S=\frac{\sigma_S}{\sigma_R}$ – коефіцієнти варіації та відношення середньоквадратичних відхилень відповідних величин.

Визначення цих показників може бути виконано шляхом застосування наступних виразів

$$m_K=\frac{V_R p_S}{V_S}. \tag{2}$$

$$\sigma_K\approx p_S\frac{V_R}{V_S}\sqrt{V_S^2+V_R^2}. \tag{3}$$

$$V_K\approx\sqrt{V_S^2+V_R^2}. \tag{4}$$

В загальному випадку щільність розподілу ККФ визначиться як [8, 9]

$$f(K_R)=\int_0^{\infty} f_R(R)\,f_S(K_R R)RdR-\int_{-\infty}^{0} f_R(R)\,f_S(K_R R)RdR, \tag{5}$$

де $f_R(\cdot)$, $f_S(\cdot)$ – закони розподілу випадкових величин $\tilde{R}$ і $\tilde{S}$.

Другою складовою даної формули можна знехтувати, оскільки всі складові визначені винятково в додатній області.

В разі застосування нормального закону розподілу для обох величин $\tilde{R}$ і $\tilde{S}$ формула (5) набуває вигляду

$$f_K(K_R)=\frac{1}{2\pi p_S V_R}\int_{-1/V_R}^{\infty}(1+K_R V_R)\times \exp\left[-A_K(K_R)x^2-2B_K(K_R)x-C_K(K_R)\right]dx, \tag{6}$$

де $A_K(\cdot)$, $B_K(\cdot)$ и $C_K(\cdot)$ – безрозмірні функції, формульне вираження яких в даному дослідженні не наводиться.

Якщо ж узагальнене зусилля підпорядковане подвійному експоненціальному розподілу Гумбеля, щільність розподілу ККФ, обчислена за загальною формулою (5) матиме вигляд

$$f_K(K_R)=\frac{1}{K_R\sqrt{2\pi}}\int_{Z_0}^{1}D_K(K_R,Z)\times \exp\left\{-0.5\left[D_K(K_R,Z)-\frac{1}{V_R}\right]^2\right\}dZ. \tag{7}$$

Якщо визначення статистичних характеристик за формулами (2)-(4) не викликає значних труднощів, то отримання аналітичних рішень виразів (6) і (7) вимагає застосування спеціальних математичних пакетів для обчислення інтегральних виразів, і навіть в цьому випадку, не гарантується отримання абсолютно точного розв'язку.

Автором було запропоновано інший підхід до вирішення даної задачі, коли розглядається не сама функція розподілу, а лише її «хвіст» – область значень аргументу при ординатах близьких до одиниці. На початковому етапі було здійснено чисельне моделювання вибірки випадкових величин $\gamma_{R,i}$ і $\gamma_{S,i}$, де $i=1,2,\ldots,N$, зі своїми законами розподілу. В цьому разі вибірка значень ККФ

$$K_{R,i}=\frac{m_S\left(1+\gamma_{S,i}V_S\right)}{m_R\left(1+\gamma_{R,i}V_R\right)}=m_K\cdot\gamma_{K,i}; \qquad \gamma_{K,i}=\frac{1+\gamma_{S,i}V_S}{1+\gamma_{R,i}V_R}. \tag{8}$$

На основі аналізу побудованого полігона та функції розподілу $\gamma_{K,i}$ (відповідно апроксимованого виразу для заданого діапазону зміни імовірностей), в області великих значень аргументу, для ККФ запропонований вираз

$$K_R=m_K\cdot\left(A_K y^2+B_K y+C_K\right), \tag{9}$$

де A_K, B_K і C_K – коефіцієнти, що знаходяться методом найменших квадратів. Чисельні значення даних коефіцієнтів залежать від обраних законів розподілу випадкових величин γ_R і γ_S та їх коефіцієнтів варіації.

Область застосування (9) обмежується елементами конструкцій, що працюють на розтяг або стиск. Для стрижнів, що завантажені осьовою силою з моментом необхідно врахувати детерміністичні залежності закладені в нормах [11].

Залежність коефіцієнта стійкості при позацентровому стиску φ_e від умовної гнучкості $\bar{\lambda}$ і приведеного відносного ексцентриситету m_{ef} була відображена в роботах С.Ф. Пічугіна [10] у вигляді логарифмічної функції

$$\varphi_e=\left(0{,}70-0{,}62\cdot\lg\bar{\lambda}\right)\times\left[1-\lg m_{ef}\left(0{,}943-\frac{0{,}075}{0{,}70-0{,}62\cdot\lg\bar{\lambda}}\right)\right]. \tag{10}$$

де $\bar{\lambda} = \lambda\sqrt{\frac{R_y}{E}}$ – умовна гнучкість елементу;

$m_{ef} = \eta\frac{e}{\rho}$ – приведений відносний ексцентриситет;

e – абсолютний ексцентриситет; ρ – ядрова відстань поперечного перерізу; η – коефіцієнт форми перерізу; E – модуль пружності матеріалу.

Формула (10) дозволяє знаходити коректні значення у досить вузькому діапазоні $\bar{\lambda}$ і m_{ef}. Що є не зовсім зручно для імовірнісних розрахунків.

Тому пропонується використати альтернативний вигляд залежності коефіцієнта позацентрового стиску φ_e від величини умовної гнучкості $\bar{\lambda}$ та значень приведеного відносного ексцентриситету m_{ef}

$$\varphi_e = \exp\left(-0{,}4\frac{\bar{\lambda}^2}{\pi^2} - 0{,}4m_{ef}^{0.7}\right). \qquad (11)$$

На рис. 1 виконане графічне порівняння залежності (11) та табульованих значень за [11].

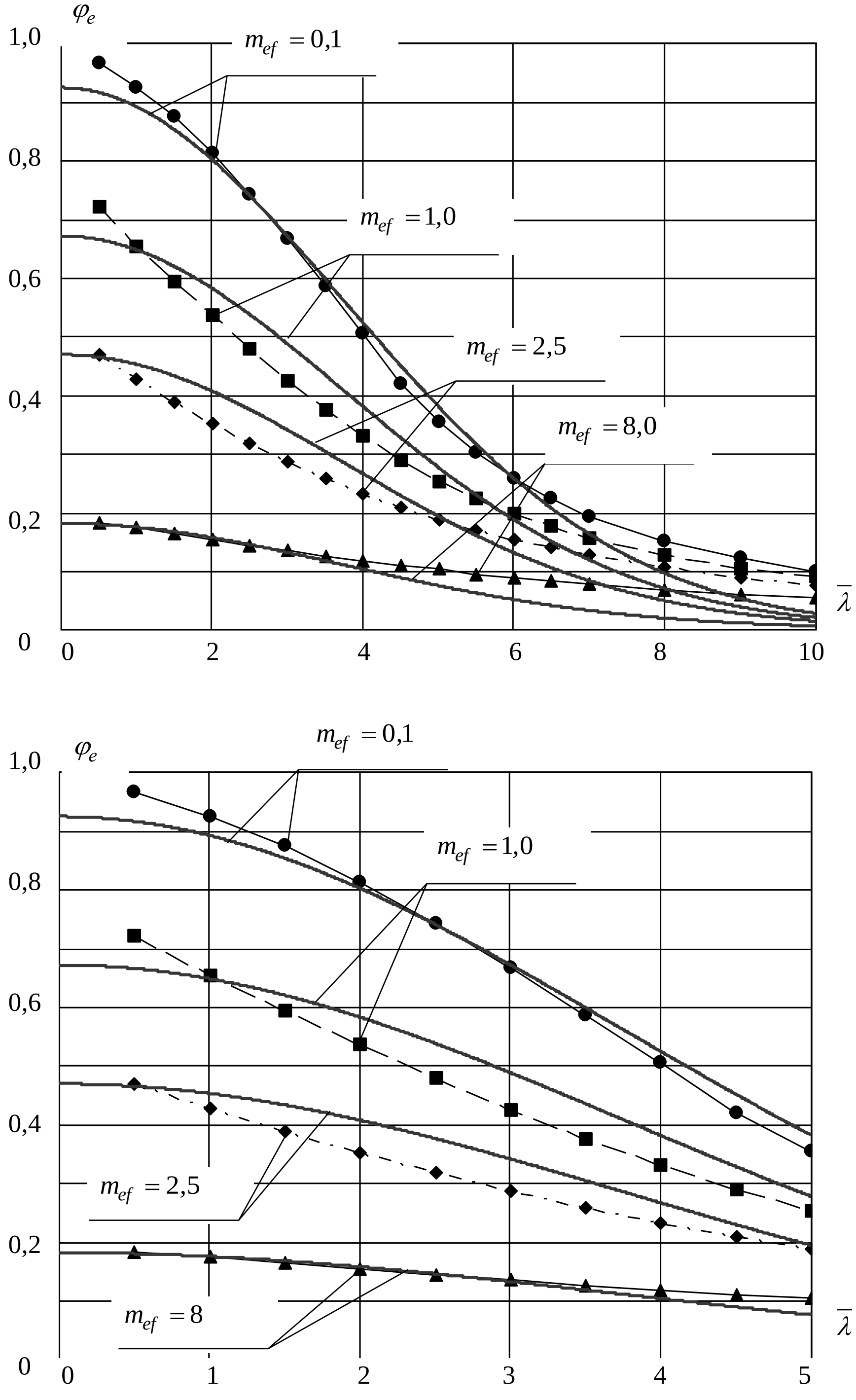

Рис. 1. До апроксимації значень коефіцієнта стійкості при позацентровому стиску(11): марковані криві відповідають табульованим значенням згідно [11]; нижній рисунок – збільшений масштаб

Аналіз графіків вказує на досить точний характер зміни коефіцієнта стійкості при позацентровому стиску (похибка не більше 10%)

Застосувавши (11), напишемо вираз для ранжованої змінної ККФ (8). При цьому будемо використовувати припущення, що поздовжнє зусилля та згинальний момент в елементі спровокований дією одного навантаження. Це може бути радіальне або кільцеве ребро жорсткості конічної покрівлі циліндричної ємності під дією снігового навантаження або вертикальне ребро жорсткості від дії вітрового. В цьому разі значення параметрів e та m_{ef} є детермінованими.

Резерв несучої здатності $\tilde{R}$ позацентрово-стиснутого елементу буде характеризуватися величиною добутку границі текучості та коефіцієнту позацентрового стиску $\varphi_e \cdot R_y$. Звідси коефіцієнт критичного фактору буде дорівнювати

$$K_{R,i} = \frac{m_S}{m_R} \cdot \frac{1+\gamma_{S,i} V_S}{1+\gamma_{R,i} V_R} \cdot \exp\left(0.4 m_{ef}^{0.7}\right) \times \exp\left[0.4 \frac{\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{m_R}{E} \cdot (1+\gamma_{R,i} V_R)\right]. \quad (12)$$

Математичне очікування коефіцієнта критичного фактору

$$m_K = \frac{m_S}{m_R} \cdot \exp\left(0.4 \cdot \frac{\lambda^2}{\pi^2} \cdot \frac{m_R}{E}\right) \times \times \exp\left(0.4 m_{ef}^{0.7}\right). \quad (13)$$

Кількісний аналіз числових значень експонент в (12) показав, що діапазон значень цих параметру мало відрізняється від одиниці. В результаті отримуємо виправдану тотожність $\exp(\cdot) \approx 1.0$, яка приводить до виразу (8) з визначенням математичного очікування відповідно (13). Графічне порівняння «хвостів» інтегральних функцій розподілу показало їх гарну узгодженість в області великих імовірностей.

Таким чином, зазначені функціональні залежності дозволять вирішити задачу імовірнісного розрахунку стиснуто-зігнутих елементів сталевих конструкцій буде вирішуватися повністю в аналітичній формі.

Висновки

1. Запропоновано задачу імовірнісного розрахунку позацентрово-стиснутих елементів представляти шляхом визначення імовірнісних характеристик коефіцієнту критичного фактору.

2. Отримано вирази для обчислення математичного очікування, дисперсії та коефіцієнту варіації ККФ, а також його щільності розподілу відповідно до класичного підходу. Аргументовано можливість застосування для інженерного розрахунку.

3. Представлено альтернативну залежність коефіцієнта стійкості при позацентровому стиску від умовної гнучкості і приведеного відносного ексцентриситету.

4. Виконане графічне порівняння табульованих нормативних значень, відповідно до норм проектування та апроксимованого виразу, свідчить про досить точний характер зміни коефіцієнта стійкості при позацентровому стиску.

5. На основі отриманих залежностей отриманий аналітичний вираз для обчислення коефіцієнта критичного фактору та його математичного очікування.

Література

1. Timoshenko, S.P. & Gere, J.M. (2009). *Theory of Elastic Stability (Dover Civil and Mechanical Engineering).* Mineola, USA : Dover Publications.

2. *Стрелецкий, Н.С. Работа сжатых стоек (материалы к курсу стальных конструкций) [Текст] / Н.С. Стрелецкий. - Москва: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. – 1959.*

3. *Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем в 2 ч. [Текст] : Учебное пособие для бакалавриата и магистратуры. / А.С. Вольмир. - Москва: ЮРАЙТ. – 2018.*

4. *Lemaire, M.* (2009) *Structural Reliability*. London, UK: ISTE Ltd.

5. Thoft-Christensen, P. & Baker, M.J. (1982). *Structural Reliability Theory and Its Applications*. New York, USA : Springer.

6. *Аугуети, Г.Вероятностные методы в строительном проектировании. [Текст] / Г. Аугуети, А. Баратти, Ф. Кашиати. - Москва: Стройиздат. – 1989.*

7. *Болотин, В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. [Текст] / В.В. Болотин. - Москва: Стройиздат. – 1982.*

8. *Вентцель, Е.С. Теория вероятностей [Текст] : учеб. для вузов. / Е.С. Вентцель. - Москва: Высшая школа. – 2001.*

9. *Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - Москва: Высшая школа. – 2000.*

10. *Пичугин, С.Ф. Надежность стальных конструкций производственных зданий [Текст] : дис ... доктора техн. наук : 05.23.01 / С.Ф. Пичугин. – К. : КГТУСА. – 1994.*

11. *Системи забезпечення надійності і безпеки будівельних конструкцій. Навантаження і впливи. Норми проектування. ДБН В.1.2-2:2006 [Текст] – Київ: Мінбуд України. – 2006.*

References

1. Timoshenko, S.P. & Gere, J.M. (2009). *Theory of Elastic Stability (Dover Civil and Mechanical Engineering).* Mineola, USA : Dover Publications.

2. Streletskii, N.S. (1959). *Rabota szhatykh stoek (materialy k kursu stalnykh konstruktsii)* Moskva: Gosudarstvennoe izdatelstvo literatury po stroitelstvu, arkhitekture i stroitelnym materialam.

3. Volmir, A.S. (2018). *Ustoichivost deformiruemykh sistem v 2 ch. Uchebnoe posobie dlia bakalavriata i magistratury*. Moskva: IURAIT.
4. Lemaire, M. (2009) *Structural Reliability*. London, UK: ISTE Ltd.
5. Thoft-Christensen, P. & Baker, M.J. (1982). *Structural Reliability Theory and Its Applications.* New York, USA : Springer.
6. Augueti, G., Baratti, A. & Kashiati, F. (1988). *Veroiatnostnye metody v stroitelnom proektirovanii. Moskva: Stroiizdat.*
7. Bolotin, V.V. (1982). *Metody teorii veroiatnostei i teorii nadezhnosti v raschetakh sooruzhenii*. Moskva: Stroiizdat.
8. Venttsel, E.S. (2001). *Teoriia veroiatnostei : ucheb. dlia vuzov. Moskva: Vysshaia shkola.*
9. Venttsel, E.S. & Ovcharov, L.A. (2000). *Teoriia sluchainykh protsessov i ee inzhenernye prilozheniia*. Moskva: Vysshaia shkola.
10. Pichugin, S.F. (1994). *Nadezhnost stalnykh konstruktsii proizvodstvennykh zdanii : dis ... doktora tekhn. nauk : 05.23.01*. Kiyv: KGTUSA.
11. *Systemy zabezpechennia nadiinosti i bezpeky budivelnykh konstruktsii. Navantazhennia i vplyvy*. Normy proektuvannia. DBN B.1.2-2:2006 (2006). Kiyv: Minbud Ukrainy.

Рецензент: д-р техн. наук проф. О.І. Лапенко, Національний авіаційний університет, Україна.

Автор: МАХІНЬКО Наталія Олександрівна
кандидат технічних наук, доцент кафедри
Національний авіаційний університет,
E-mail – pasargada1985@gmail.com
ID ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8120-6374

THE FEATURES OF STOCHASTIC CALCULATON OF THE ECCENTRIC COMPRESSION ELEMENTS

N. Makhinko

National Aviation University, Ukraine

The paper deals with a stochastic calculation of the coefficient of the critical factor. The elements of steel storage capacities, which operate on the eccentric compression, were calculated. It was considered the compressed elements of a symmetrical solid cross-section, which bending in one of the main planes. Two laws of the distribution of the random value of the generalized effort were taken into account. This was the normal distribution, which is used to describe the pressure of the bulk material on the capacity's wall, and the double exponential distribution of the Gumbel, which is used to describe the maximums of the snow and wind loads. The simple expressions were obtained to determine the mathematical expectation, the mean square deviation, and the variation coefficient of the critical factor. It is difficult to determine the density of distribution of this parameter for both variants of the loads' presentation according to the classical theory. It requires the use of special mathematical packages for calculating integral expressions and it could not be an engineering method. A new approach for calculating the coefficient of the critical factor on the basis of numerical simulation and analysis of the distribution function in the area of big values of the argument was proposed. The problem of representing the dependence of the stability coefficient under the eccentric compression from the conditional flexibility and the reduced relative eccentricity was solved. It was proposed the approximated expression for this dependence. The diagrams were made to compare the values of the eccentric compression's coefficients in accordance with the normative document and the author's approach.

The analysis showed a good consistency of the results. On the basis of approximation, it was obtained simple analytical expressions for the coefficient of the critical factor and its expected value. This expression could be used to determine the actual probability of the construction's no-failure work.

Keywords: *reliability, coefficient of the critical factor, stability factor under the eccentric compression*