УДК 62-50

Мусаев В.Г.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Азербайджанский Технический Университет, г. Баку, Азербайджан

Известно, что для расчета и исследования динамических процессов в системах с распределенными параметрами выражение для γ, содержащее коэффициент затухания, раскладывается в ряд Тейлора и берется два члена ряда. В связи с этим в данной работе рассматривается оценка погрешности, получаемой при этом допущении. Отметим, что при разложении в ряд выражения для γ, от реальной системы с распределенными параметрами переходим к сбалансированной системе и коэффициент αT в зависимости от специфики конкретных объектов, получает разные значение. Проведенные исследования показывают, что чем больше значение αT, тем больше в установившемся режиме значение функции отклоняется от значения ω, соответствующего установившемуся режиму несбалансированного звена. Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод о том, что разложеные в ряд выражения для коэффициента γ справедливо только при малых значениях αT. В работе проф. Я.Б. Кадымова посредством аппроксимации бесконечного ряда Бесселевых рядов функций первого рода нулевого порядка, при переходе от изображения к оригиналу (при x=0), получено такое решение телеграфного уравнения в виде решетчатых функций, которое позволяет рассчитывать переходные процессы в электроприводах и системах автоматического регулирования, включающих звенья с распределенными параметрами, при учете потерь с погрешностью, не превышающей 5%. Однако в ряде практических задач при решении проблемы динамики объектов с распределенными параметрами возникает необходимость исследовать переходные процессы исходной системы в любой точке в любой момент времени. Исходя из вышеизложенного, в данной работе предлагается численный метод расчета переходных процессов в любой точке систем с распределенными параметрами, описываемых телеграфными уравнениями. Предложенный метод вычисления переходных процессов в системах с распределенными параметрами является дискретным.

Ключевые слова: распределенный параметр, телеграфные уравнения, магистральные трубопроводы, сбалансированное звено.

Постановка проблемы

Известно, что динамические процессы в системах с распределенными параметрами, яркими примерами которых являются магистральные трубопроводы [1,2], длинные линии электропередачи, штанги глубиннонасосных установок и т.д., в общем виде описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных [1]:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x} = k_1 \dfrac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} + k_3 \omega(x,t); \\ -\dfrac{\partial \omega(x,t)}{\partial x} = k_2 \dfrac{\partial P(x,t)}{\partial t} + k_4 P(x,t), \end{cases} \qquad (1)$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 – вещественные коэффициенты, зависящие от свойства системы.

Анализ последних исследований и публикаций

В работе [3] посредством аппроксимации бесконечного ряда Бесселевых рядов функций первого рода нулевого порядка, при переходе от изображения к оригиналу (при x=0), получено такое решение телеграфного уравнения в виде решетчатых функций, которое позволяет рассчитывать переходные процессы в электроприводах и системах автоматического регулирования, включающих звенья с распределенными параметрами, при учете потерь с погрешностью, не превышающий 5%. Однако в ряде практических задач при решение проблемы динамики объектов с распределенными параметрами (трубопроводов, длинных стержней, линий электропередачи и др.) возникает необходимость исследовать переходные процессы исходной системы в любой точке в любой момент времени.

Формулирование целей статьи (постановка задачи)

Поэтому в данной работе развивается и обобщается метод [3] для исследования переходных процессов в системах с распределенными параметрами, описываемых телеграфными уравнениями, в любой точке в любой момент времени.

Проведенные исследование показывают, что результаты расчета нестационарных процессов, полученные путем численного решения методом, основанным на теории импульсных систем, с учетом влияния приводного двигателя показывают, что этот метод позволяет получить результаты, весьма близкие к экспериментальным, предложенный метод дает возможность определить изменение давления или расхода в любой точке трассы в любой момент времени и не представляет особых трудностей как при составлении и отладке программы, так и при расчете.

Изложение основного материала исследования

Следует отметить, что выражения для γ, содержащее коэффициент затухания (потерь) разлагается в ряд Тейлора и берется два члена ряда. При этом, выражение для γ после разложения получается:

$$\gamma = (s + \alpha)\frac{\tau}{\ell}. \tag{2}$$

Однако выражение для коэффициента распространения и волнового сопротивления в общем случае имеет вид:

$$2\gamma\ell = T\sqrt{(s+\alpha)^2 + \beta^2}\,,\ \ b = \sqrt{\frac{sk_1 + k_3}{sk_2 + k_4}}\,, \tag{3}$$

где
$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{k_3}{k_1} + \frac{k_4}{k_2}\right),\ \ \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{k_3}{k_1} - \frac{k_4}{k_2}\right). \tag{4}$$

В связи с этим в данной работе рассматривается оценка погрешности, получаемой при этом допущении.

В задачах динамики магистральных трубопроводов коэффициент, учитывающий на единицу длины k_4=0. При этом, как в частном случае, получается объект с распределенными параметрами, когда α=β.

Из теории исследования звеньев с распределенными параметрами известно, что в сбалансированных звеньях с распределенными параметрами коэффициент β=0, при этом имеет место следующее соотношение параметров

$$\frac{k_3}{k_1} = \frac{k_4}{k_2}\,. \tag{5}$$

Коэффициент b оказывается равным тому значению, что и для звена без потерь $b=\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$, а коэффициент распространения $\gamma=(s+\alpha)\frac{\tau}{\ell}$.

Отметим, что, как при разложении в ряд выражения для γ, от реальной системы с распределенными параметрами переходим к сбалансированной системе и коэффициенту αT в зависимости от специфики конкретных объектов, в частности, магистральных трубопроводов, получаем разные значения, необходимо показать, при каких пределах значения коэффициента αT достоверен этот подход.

Как известно, при нулевых начальных условиях операторное выражение для ω в сбалансированном звене имеет следующий вид [3]:

$$\bar{\omega}(s) = \frac{P_1}{b}\,\frac{e^{-(s+x)\frac{\tau}{\ell}x} + e^{\phi_1 - 2s\tau}\cdot e^{(s+\alpha)\frac{\tau}{\ell}x}}{1 - e^{\phi_1}e^{-2s\tau}}\,, \tag{6}$$

где $e^{\varphi_1} = e^{\varphi}\cdot e^{-\alpha T}$, $\alpha=\frac{k_3}{k_1}$.

При $e^{\varphi}=-1$ решение уравнения (6) в области оригиналов для начальной точки (x=0) имеет вид:

$$\omega[n,\varepsilon] = \frac{P_1}{b}\,\frac{1}{1+e^{-\alpha T}}\left[1 - e^{-\alpha T} + 2e^{-\alpha T(n+\varepsilon+1)}\cos An\right]. \tag{7}$$

Задавая значения n=0,1,2,..., (при этом ε получает значение $0\le\varepsilon\le1$), при различных значениях αT можно получить графики изменения функции (7).

Проведенные исследования показывает, что чем больше значение αT, тем больше в установившемся режиме значение функции отклоняется от значения ω, соответствующего установившемуся режиму несбалансированного звена.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод о том, что разложеные в ряд выражения для коэффициента γ справедливы только при малых значениях αT.

Необходимо отметить, что в данной работе при выборе периода повторения решетчатой функции T используется параметр λ, который получает различные значении от 1 до n. При этом новый период повторения выбирается из условия $T^{/}=T/\lambda$. Выбором параметра $\lambda^{/}$, можно получить различные периоды повторения решетчатой функции и значения параметра αT, не превышающие допустимого.

Исходя из вышеизложенного в данной работе предлагается численный метод расчета переходных процессов в любой точке систем с распределенными параметрами, описываемых телеграфными уравнениями.

Так, например, решение телеграфного уравнения при принятых начальных и граничных условиях в общем виде (P≠const) в операторной форме относительно функции w при $e^{\varphi'}=-1$ имеет вид:

$$\bar{\omega}(\delta,s)=\frac{e^{-2\gamma\ell\delta}-e^{-2\gamma\ell(1-\delta)}}{1+e^{-2\gamma\ell}}\frac{\bar{P}(s)}{\bar{b}(s)}, \tag{8}$$

где δ=x/2l.

Выражение (8) можно представить в виде:

$$\frac{1}{s}(1+e^{-2\gamma\ell})\bar{\omega}(\delta,s)=$$
$$=\frac{1}{s}\frac{1}{b(s)}\left[e^{-2\gamma\ell\delta}-e^{-2\gamma\ell(1-\delta)}\right]\bar{P}(s)\cdot \tag{9}$$

Обозначая в выражении (9) $\bar{k}_1(s)=\frac{1}{2}e^{-2\gamma\ell}$, $\bar{k}_2(s)=\frac{1}{s\bar{b}(s)}e^{-2\gamma\ell\delta}$, $\bar{k}_3(s)=\frac{1}{s\bar{b}(s)}e^{-2\gamma\ell(1-\delta)}$, получим:

$$\bar{\omega}(\delta,s)=\left(\frac{1}{s}+\bar{k}_1(s)=\left(\bar{k}_2(s)-\bar{k}_3(s)\right)\right)\bar{P}(s). \tag{10}$$

Выражение (10) в области оригиналов, согласно теоремы свертки [4,5], имеет вид:

$$\omega[\delta,\pi]=\sum_{\omega=\lambda\delta}^{\pi}k_2[m]P[n-m]-$$
$$-\sum_{m=\lambda(1-\delta)}^{n}k_3[m]P[n-m]-$$
$$-\sum_{m-\lambda}^{n}k_1[m]\omega[n-m,\delta]-\sum_{m=0}^{n-1}\omega[m,\delta]\cdot \tag{11}$$

где $k_2^{'}[n]=\begin{cases}0,\text{при } n\le\lambda\delta;\\ e^{-\alpha T\delta}+\alpha T\delta\sum\limits_{m=\lambda\delta}^{n}e^{-\frac{\alpha T}{\lambda}m}\times\\ \times\dfrac{I_1\left(\dfrac{\alpha T}{\lambda},\sqrt{m^2-(\lambda\delta)^2}\right)}{\sqrt{m^2-(\lambda\delta)^2}},\\ \text{при } n\rangle\lambda\delta;\end{cases}$

$$k_2[n]=e^{\frac{\alpha T}{\lambda}n}I_0\left(\frac{\alpha T}{\lambda}\sqrt{n^2-(\lambda\delta)^2}\right);$$

$$k_3[n]=e^{-\frac{\alpha T}{\lambda}n}I_0\left(\frac{\alpha T}{\lambda}\sqrt{n^2-\left[(1-\delta)\lambda\right]^2}\right),$$

где $I_1(\alpha,t)$ – бесселевые функции первого порядка от вещественного аргумента.

Аналогичным образом функции $\bar{P}(\delta,s)$ в общем виде можно представить:

$$\bar{P}(\delta,s)=\frac{e^{-2\gamma\ell\delta}+e^{-2\gamma\ell(1-\delta)}}{1-e^{-2\gamma\ell}}\bar{P}(s). \tag{12}$$

В области оригиналов:

$$P[\delta,n]=\sum_{m=\lambda\delta}^{n}k_2^{'}[m]P[n-m]-$$
$$-\sum_{m=\lambda(1-\delta}^{n}k_1^{'}[m]P[n-m]-$$
$$-\sum_{m=\lambda}^{n}k_1^{'}[m]P[n-m,\delta]-\sum_{m=0}^{n-1}P[m,\delta], \tag{13}$$

$$k_2^{'}[n]=\begin{cases}0,\text{при } n\le\lambda\delta;\\ e^{-\alpha T\delta}+\alpha T\delta\sum\limits_{m=\lambda\delta}^{n}e^{-\frac{\alpha T}{\lambda}m}\times\\ \times\dfrac{I_1\left(\dfrac{\alpha T}{\lambda},\sqrt{m^2-(\lambda\delta)^2}\right)}{\sqrt{m^2-(\lambda\delta)^2}},\\ \text{при } n\rangle\lambda\delta;\end{cases}$$

где

$$k_2'[n] = \begin{cases} 0, \text{при } n \le \lambda\delta; \\ e^{-\alpha T\delta} + \alpha T\delta \sum_{m=\lambda\delta}^{n} e^{-\frac{\alpha T}{\lambda}m} \times \\ \times \dfrac{I_1\left(\dfrac{\alpha T}{\lambda}, \sqrt{m^2-(\lambda\delta)^2}\right)}{\sqrt{m^2-(\lambda\delta)^2}}, \\ \text{при } n \rangle \lambda\delta; \end{cases}$$

$$k_1'[n] = k_1[n];$$

$$k_3'[n] = \begin{cases} 0, \text{при } m \le (1\text{-}\lambda\delta); \\ e^{-\alpha T(1-\delta)} + \alpha T(1-\delta) \times \\ \times \sum_{m=\lambda(1-\delta)}^{n} e^{-\frac{\alpha T}{\lambda}} \dfrac{I_1\left(\dfrac{\alpha T}{\lambda}\sqrt{m^2-\left[(1-\delta)\lambda\right]^2}\right)}{\sqrt{m^2-\left[(1-\delta)\lambda\right]^2}}, \\ \text{при } m \rangle (1\text{-}\lambda\delta). \end{cases}$$

Из выражений для $k_1[n]$, $k_2'[n]$, $k_3'[n]$ видно, что при m=λ, m=λδ, m=(1-δ)λ на фронте волны имеет соответственно $k_1[n]=e^{-\alpha T}$, $k_2'[n]=e^{-\alpha T\delta}$, $k_3'[n]=e^{\alpha T(1-\delta)}$.

В частном случае, при P=const выражения (8) и (12) примут вид:

$$\bar{\omega}(\delta, s) = \frac{1}{\bar{b}(s)} \frac{e^{-2\gamma\ell\delta} - e^{-2\gamma\ell(1-\delta)}}{1-e^{-2\gamma\ell}} \frac{P_0}{s}; \qquad (14)$$

$$\bar{P}(\delta, s) = \frac{P_0}{s} \frac{e^{-2\gamma\ell\delta} + e^{-2\gamma\ell(1-\delta)}}{1+e^{-2\gamma\ell}}. \qquad (15)$$

Выражения (14) и (15) в области оригиналов имеют вид:

$$\omega[\delta, n] = \sum_{m=\lambda\delta}^{n} k_2[m] - \sum_{m=\lambda(1-\delta)}^{n} k_3[m] - \sum_{m=0}^{n-1} \omega[m, \delta] - \sum_{m=\lambda}^{n-1} k_1[n-m]\,\omega[m, \delta]; \qquad (16)$$

$$P[\delta, n] = \sum_{m=\lambda\delta}^{n} k_2'[m] - \sum_{m=\lambda(1-\delta)}^{n} k_3'[m] - \sum_{m=\lambda}^{n} k_1'[m] - \sum_{m=0}^{n-1} P[m, \delta] \cdot 1[n-m]. \qquad (17)$$

Задавая значения $x = 0 \div \ell$ согласно выражениям (11), (13), (16), (17), можно рассчитать переходные процессы в системах с распределенными параметрами при произвольных и скачкообразных возмущающих воздействиях в любой точке при учете потерь.

Выводы

Предложенный метод вычисления переходных процессов в системах с распределенными параметрами является дискретным.

Описанная методика, исключающая операции приведения систем с распределенными параметрами к замкнутой импульсной системе, существенно упрощает математические выкладки по определению передаточных функций и сокращает объем вычислений. Методика позволяет свести решение сложной задачи по переходным процессам в системе с распределенными параметрами к достаточно простым алгоритмам легко реализуемых на современных вычислительных системах, при этом используются стандартные программы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусаев В.Г.* Идентификация и управление сложными системами с распределенными параметрами (на примере магистральных нефтепроводов) // Информационные технологии моделирования и управления. – Воронеж, 2013. – № 3 (81). – С.268-277.

2. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975. – 296 с.

3. *Кадымов Я.Б.* Переходные процессы в системах с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1968. – 192 с.

4. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 465 с.

5. *Musayev V.H., Huseynov N.E.* Analysis of the operation of the systems with distributed parameters with the adjusting system objects // International Transaction of Electrical and Computer Engineers System. – 2015. – Vol. 3. – No. 1. – p.30-33.

Поступила в редакцию 02.10.2017

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В СИСТЕМАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Мусаєв В.Г.

Відомо, що для розрахунку і дослідження динамічних процесів в системах з розподіленими параметрами виразу для γ, який містить коефіцієнт згасання, розкладається в ряд Тейлора і береться два члена ряду. У зв'язку з цим в даній роботі розглядається оцінка похибки, одержуваної при цьому допущенні. Відзначимо, що при розкладанні в ряд виразу для γ, від реальної системи з розподіленими параметрами переходимо до збалансованої системи і коефіцієнта αT в залежності від специфіки конкретних об'єктів, отримує різні значення. Здійснені дослідження показують, що чим більше значення αT, тим більше в сталому режимі значення функції відхиляється від значення ω, що відповідає сталому режиму незбалансованої ланки. Виходячи з вищесказаного, можна зробити висновок про те, що розкладання в ряд виразу для коефіцієнта γ справедливо тільки при малих значеннях αT. В роботі проф. Я.Б. Кадимова за допомогою апроксимації нескінченного ряду Беселевих рядів функцій першого роду нульового порядку, при переході від зображення до оригіналу (при x=0), отримано таке рішення телеграфного рівняння у вигляді ґратчастих функцій, яке дозволяє розраховувати перехідні процеси в електроприводах і системах автоматичного регулювання, що включають ланки з розподіленими параметрами, при обліку втрат з похибкою, що не перевищує 5%. Однак в низці практичних задач при розв'язанні проблеми динаміки об'єктів з розподіленими параметрами виникає необхідність дослідити перехідні процеси вихідної системи в будь-якій точці в будь-який момент часу. Виходячи з вищевикладеного, в даній роботі пропонується чисельний метод розрахунку перехідних процесів в будь-якій точці систем з розподіленими параметрами, які описуються телеграфними рівняннями. Запропонований метод обчислення перехідних процесів в системах з розподіленими параметрами є дискретним.

Ключові слова: розподілений параметр, телеграфні рівняння, магістральні трубопроводи, збалансована ланка.

MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC PROCESSES IN SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

Musayev V.H.

Azerbaijan Technical University, Baku, Republic of Azerbaijan

In this paper, a discrete method is developed and generalized for the study of transient processes in systems with distributed parameters described by telegraph equations, at any point at any time. In this connection, in this paper, we consider the estimation of the error obtained with this assumption. We note that when we expand the expressions for γ, from a real system with distributed parameters we pass to a balanced system, and the coefficient αT, depending on the specifics of particular objects, in particular, the main pipelines, gets different values. The conducted research shows that the higher the value αT is, the more the function value deviates in the steady state from the value ω corresponding to the steady state of the unbalanced link. Proceeding from the foregoing, we can conclude that the expansion in a series of expressions for the coefficient γ is valid only for small values of αT. In the work of prof. Y.B. Kadimov, by approximating an infinite series of Bessel series of functions of the first kind of zero order, when passing from the transform to the original (at x=0), a solution of the telegraph equation in the form of lattice functions is obtained. It makes possible to calculate transient processes in electric drives and automatic control systems, including links with distributed parameters, with allowance for losses, with an error not exceeding 5%. However, in a number of practical tasks when solving the problem of the dynamics of objects with distributed parameters, it becomes necessary to investigate the transient processes of the initial system at any point at any time. Proceeding from the foregoing, in this paper, we propose a numerical method for calculating transient processes at any point of systems, with distributed parameters described by telegraph equations. The proposed method for calculating transient processes in systems with distributed parameters is discrete.

Keywords: distributed parameter, telegraph equations, main pipelines, balanced link.

REFERENCES

1. Musaev V.G. Identifikatsiya i upravlenie slozhnyimi sistemami s raspredelennyimi parametrami (na primere magistralnyih nefteprovodov) [Identification and management of complex systems with distributed parameters (for example, oil trunklines)]. *Informatsionnyie tehnologii modelirovaniya i upravleniya*, Voronezh, 2013, № 3 (81), pp. 268-277. (*in Russian*).

2. Charnyiy I.A. Neustanovivsheesya dvizhenie realnoy zhidkosti v trubah [Unsteady motion of a real liquid in pipes]. Nedra, Moscow, 1975. 296 p. (*in Russian*).

3. Kadyimov Ya.B. Perehodnyie protsessyi v sistemah s raspredelennyimi parametrami [Transients in systems with distributed parameters]. Nauka, Moscow, 1968. 192 p. (*in Russian*).

4. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu [Handbook of operational calculus].Vyisshaya shkola, Moscow, 1965. 465 p. (*in Russian*).

5. Musayev V.H., Huseynov N.E. Analysis of the operation of the systems with distributed parameters with the adjusting system objects. *International Transaction of Elektrikal and Computer Engineers System*, 2015, vol. 3, no. 1, pp. 30-33.