МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

Зеленяк О.П.

Анотація. У статті на прикладі авторської міжпредметної задачі розглядається ефективне застосування комп'ютера на уроках інформатики і математики. Дослідження і розв'язування знайомить старшокласників з інтегрованим застосуванням інформатики, геометрії, математичного аналізу. Динамічна геометрична конфігурація моделюється у комп'ютерній системі інтерактивного моделювання — Geometer's Sketchpad 4.0, середовищі програмування Turbo Pascal 7.0, середовищі табличного процесора Microsoft Excel.

Ключові слова: моделювання, дослідження, динамічна конфігурація, обчислювальна геометрія.

Стаття продовжує роботи [1–4], міжпредметні задачі для яких вибирались з розділів курсу алгебри і математичного аналізу. Широке поле для використання комп'ютера надають й інші предмети — геометрія, фізика, хімія, біологія. Час, який минув після написання вказаних статей, переконав нас у правильності наведених там висновків: шкільні курси потрібно інтегрувати, щоб навчати в глибину, а не в ширину. Двадцятирічний досвід реалізації міжпредметних зв'язків математики й інформатики впевнює в ефективності такого підходу.

«Аналіз літератури показує поширення дисертаційно-декларативних висловлень про те, що використання засобів ІКТ в освіті «поліпшує», «забезпечує підвищення», «надає можливість» і т. ін. Це пояснюється превалюванням у дослідженнях позитивних результатів використання ІКТ у навчальному процесі, короткостроковістю досліджень і впливом сформованості в широких колах освітян «позитивістського» підходу до трактування результатів впровадження ІКТ, що досягають сьогодні міфологічного рівня» [5, с. 4].

Абсолютно погоджуючись з автором, зазначимо, що використання в освіті засобів ІКТ, комп'ютерно орієнтованих методичних систем навчання і відповідних програм для шкільних предметів на часі. Відбувається стихійне проникнення елементів технологій у навчальний процес, а організовані масштабні дослідження запізнюються. Цю системну роботу повинні організовувати вчителі?

Наведемо кілька думок, які стверджують винятковий вплив комп'ютерної науки на сучасну математику.

«Проблеми, що межують між ясною симетрією і чистим хаосом, викликають появу нового типу математики. Щоб досягти прогресу в ній, необхідні радикальні теоретичні ідеї, так само як і нові шляхи поєднання математики з комп'ютерами... Треба покращити методи викладання та обміну ідеями» [6, с. 5].

«Одним з основних зовнішніх впливів на математику є, звичайно, вплив комп'ютерної науки. Усе, пов'язане з цією областю, буде являти центральне значення для математики протягом майбутнього століття або всього розвитку нашої цивілізації ...» [7, с. 5].

«Комп'ютери інтенсивно використовуються не тільки у математичних застосуваннях, але і у чистій науці, щоб перевірити гіпотезу, щоб провести експеримент, щоб відтворити складні геометричні конструкції у більш наочній формі, щоб провести без помилок складні алгебраїчні обчислення. Але жодне з цього не замінює строге математичне доведення» [8, с. 7].

Отже, розглянемо приклади з **геометрії**, яка зараз відчуває вплив комп'ютерної науки.

«Влияние «Начал» Евклида было столь фундаментальным, что никаких других формулировок геометрии не было предложено вплоть до Декарта. Введение последним координат позволило выразить геометрические задачи алгебраически, вымостив путь к изучению плоских кривых и ньютоновскому анализу. Координаты позволили резко повысить вычислительные возможности, соединив две великие области математики и дав начало конструктивистского мышления. Появилась возможность получать новые геометрические объекты, решая связанные с ними алгебраические уравнения» [9, с. 11].

Під час розв'язування багатьох геометричних задач виникає **конфігурація, що містить рівнобічну трапецію, яка є вписаною в коло й описаною навколо кола**. Необхідною і достатньою умовою її існування є рівність двох відрізків — середньої лінії і бічної сторони. У стереометрії ця планіметрична конфігурація зустрічається в осьових перерізах повного і зрізаного конусів, піраміди, тіл обертання, в основах і перерізах многогранників тощо. Багато відомих важливих і цікавих її властивостей пов'язані з рівностями і нерівностями (відрізків, кутів, трикутників, площ), подібністю (середньопропорційними відрізками), симетрією (симетричними і співпадаючими точками) тощо. Взаємне розміщення вказаних фігур дозволяє ілюструвати класичні нерівності і тригонометричні співвідношення [10].

Нові ж властивості можна відшукати, вивчаючи конфігурацію в динаміці, розглядаючи сім'ю описаних рівнобічних трапецій, положення точок перетину окремих відрізків, траєкторії руху окремих точок тощо.

І. Нерівність у динамічній геометричній конфігурації (ДГК)

Рівнобічна трапеція $ABCD$ ($AD>BC$) описана навколо круга з центром I, радіусом IK ($K \in AB$), площа якого дорівнює S. O — центр описаного навколо трапеції кола. $U=AC\cap IK$, $V=AC\cap OB$, $W=OB\cap IK$. Довести, що площа трикутника UVW менше сотої частини площі круга: $S_{UVW}<0{,}01S$.

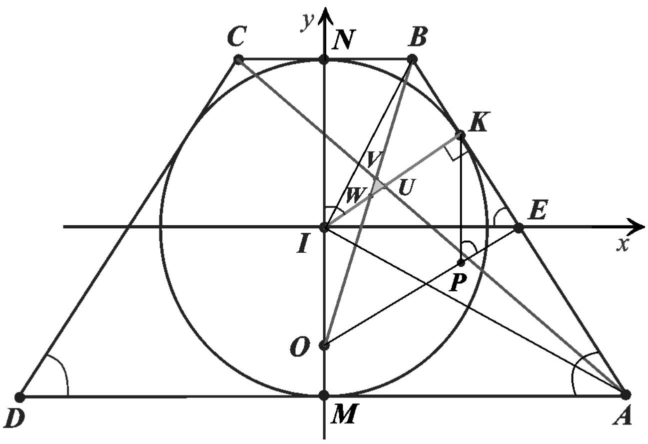

Рис. 1

За розділами, до яких можна віднести цю задачу, у спеціальній літературі закріпилися назви «Геометричне моделювання» або «Обчислювальна геометрія» [9, с. 5]. Конфігурація не статична, а динамічна. При фіксованому радіусові круга існує безліч трапецій і, відповідно, трикутників UVW.

Повне математичне розв'язання задачі складне. Воно вимагає інтегрованого застосування засобів алгебри, геометрії і математичного аналізу. До того ж, авторське розв'язання координатним методом [11] вимушено звертається до обчислювальних методів і наближених обчислень. Отже, застосування комп'ютера і моделювання у процесі дослідження й обчислень виправдано й ефективно.

Перед моделюванням для знавців математики наведемо можливі плани дослідження і доведення з використанням методу координат, пропонуючи їм самостійно завершити строге доведення.

План математичного дослідження

Простежимо утворення конфігурації і її «еволюцію». Зафіксуємо коло з діаметром MN і радіусом r. На дотичній прямій від точки дотику N відкладемо рівні відрізки малої довжини a, $0<a<r$. З їх кінців проведемо ще дві дотичні до кола, на яких відкладемо рівні між собою відрізки так, щоб з'єднавши їх кінці, утворити рівнобічну трапецію. Очевидно, що описане коло також існує. Основи трапеції є його паралельними хордами. Конфігурацію утворено.

Якщо $a\to 0$, то гострий кут α утвореної трапеції — нескінченно малий, бічна сторона, більша основа, діагоналі — нескінченно великі, центр описаного кола O належить променю NM і прямує до нескінченності, центр I вписаного кола є фіксованою точкою — серединою відрізка NM.

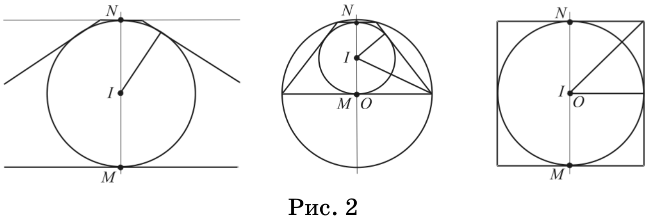

Рис. 2

Отже, при $a\to 0$: $a\to 0$, $\sin\alpha\to 0$, $1+\sin^2\alpha\to 1$.

Збільшуючи a від 0 до r або α від 0° до 90° одержимо неперервну сім'ю рівнобічних трапецій.

При $\alpha=45^\circ$ відношення висоти трапеції до R дорівнює $\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

При $\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 51{,}8^\circ$ центр описаного кола співпадає з серединою більшої основи.

При $\alpha=\arcsin\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{17}}}{8}\approx 53{,}2^\circ$ висота трапеції дорівнює R.

При $\alpha\geq 75^\circ$ точки U, V, W «співпадають» (у програмах динамічної геометрії їх координати співпадають вже щонайменше з точністю до десятих).

Нарешті, якщо $\alpha=90^\circ$, то $a=r$, $R=r\sqrt{2}$, співпадуть центри кіл, точки I, O і утвориться квадрат.

Таким чином, сім'я рівнобічних описаних трапецій еволюціонує від точки до квадрата.

План математичного доведення

Нехай $I(0;0)$, $IK=r=1$, $IK\perp AB$, прямі IE, IO належать осям абсцис і ординат відповідно. Тоді $S=\pi$.

Якщо α — аргумент функції $S_{UVW}(\alpha)$, $\alpha\in(0^\circ, 90^\circ)$, то

$$K(\sin\alpha;\cos\alpha),\ B\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};1\right),\ C\left(\frac{\cos\alpha-1}{\sin\alpha};1\right),$$

$$A\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha};-1\right),\ O\left(0;-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right).$$

Рівняння прямих AC, OB, IK: $y_{AC}=-\sin\alpha\cdot x+\cos\alpha$,

$$y_{OB}=\frac{\cos\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}x-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},\ y_{IK}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot x.$$

Обчислюючи координати точок перетину цих прямих, вершин U, V, W трикутника, і його площу за формулою $S_{UVW}(\alpha)=0{,}5|(x_w-x_v)(y_v-y_u)-(x_v-x_u)(y_w-y_v)|$, одержимо:

$$S_{UVW}(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{\cos^6\alpha\cdot(\cos\alpha-1)}{\sin\alpha\cdot(\cos^3\alpha-2\cos^2\alpha+2)\cdot(\cos^3\alpha-2\cos\alpha-1)}\right|.$$

Шуканим є найбільше значення одержаної функції на проміжку $(0^\circ, 90^\circ)$, яке необхідно знайти засобами математичного аналізу, щоб порівняти з величиною $0{,}01S$.

II. Раціональне моделювання ДГК у спеціалізованому середовищі

Динамічну модель найшвидше і найпростіше можна створити в одному із спеціалізованих середовищ інтерактивного моделювання — GRAN-2D, DG, «Математический конструктор», Cabri 2D, GeoGebra, Geometer's Sketchpad тощо.

Оберемо віртуальний конструктор Geometer's Sketchpad (GSP), який має чудові вбудовані засоби анімації. Його російська версія «Живая математика 4.3» підготовлена Інститутом нових технологій Російської Федерації (http://www.int-edu.ru). Навчально-методичний комплект має довідкову систему, комп'ютерні альбоми з прикладами і задачами, які містять більше 3000 малюнків. Окремі альбоми створено до підручників з геометрії відомих авторів О. Погорєлова і Л. Атанасяна.

GSP має лаконічне меню, зручне і наочне створення і відображення математичних текстів, дозволяє будувати і масштабувати графіки функцій, використовувати декілька декартових систем координат на одній сторінці, геометричні перетворення, параметри, ітерації тощо.

Наведемо два можливих алгоритми (табл. 1) побудови моделі ДГК — загальний, команди якого реалізуються відповідно в обраному середовищі, і для середовища GSP (позначення див. на рис. 1, 2): N — середина меншої основи трапеції BC, M — середина більшої основи AD, I — інцентр, O — центр описаного кола, IK, OB — радіуси вписаного й описаного кіл).

У запису алгоритма для GSP стилізовано розрізняються **Инструмент**/**Построение** і **Меню**/**Команда**.

Після вибору **Инструмент** одну з множини можливих побудов виконує користувач, а після звернення до **Меню** визначена в ньому команда виконується автоматично. Слід звернути увагу і на важливу роль у процесі виконання побудов клавіші **Esc** (виділення, відміна виділення, завершення анімації, стирання слідів, а, головне, активізація основного інструменту **Стрелка**).

Звертайтесь також до послуги **Инструмент пользователя**/**Создать новый инструмент**/**Показать сценарий**. У вікні сценарію відображаються дані і кроки виконаного алгоритму побудови.

Створивши динамічну модель, визначимо площу трикутника UVW. Щоб радіус круга дорівнював одиниці вимірювання довжини, а площа p, викона-

Таблиця 1

Загальний алгоритм

Кроки	Команди
1	Побудувати коло радіуса *r* з центром *I*
2	Обрати незалежну точку *N* на колі
3	Побудувати промінь *NI*
4	Позначити точку перетину *M* променя *NI* і кола
5	Побудувати два перпендикуляри *MX* і *NY* до діаметра кола *MN*
6	Вибрати незалежну точку *K* на півколі
7	Побудувати радіус *IK*
8	Побудувати пряму *KZ*, перпендикулярну до *IK*
9	Позначити точку перетину *KZ* і *MX* через *A*
10	Позначити точку перетину *KZ* і *NY* через *B*
11	Побудувати точку *C* симетричну точці *B* відносно центра *N*
12	Побудувати точку *D* симетричну точці *A* відносно центра *M*
13	Побудувати бічну сторону *CD*
14	Позначити точку *E* – середину *AB*
15	Побудувати перпендикуляр *EF* до *AB*
16	Позначити точку перетину *EF* і *MN* через *O*
17	Побудувати діагональ *AC*
18	Побудувати радіус *OB*
19	Позначити точку перетину *AC* і *IK* через *U*
20	Позначити точку перетину *AC* і *OB* через *V*
21	Позначити точку перетину *OB* і *IK* через *W*
22	Виконати анімацію точки *K*

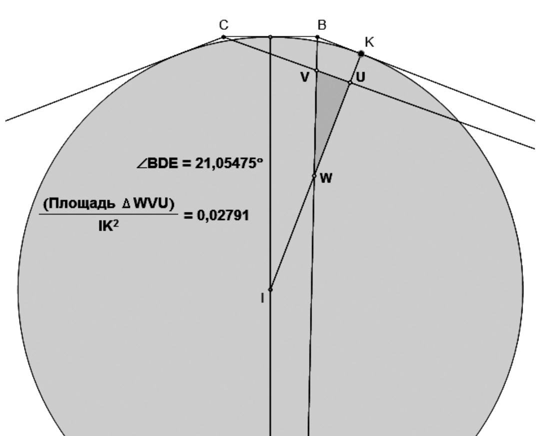

Рис. 3

Алгоритм для GSP

Кроки	**Инструмент/*Меню***	**Построение/*Команда***
1	Циркуль	Окр (*I*, *r*)
2	Точка	*N* на Окр (*I*, *r*)
3	Луч	*NI*
4	Стрелка	Выделить Окр (*I*, *r*)
5	*Построение*	*Пересечение* (*M*)
6	Стрелка	Выделить *MN*
7	*Построение*	*Перпендикуляры* (*MX*,*NY*)
8	Отрезок	*IK*, *K* на Окр(*I*, *r*)
9	Стрелка	Выделить *K*
10	*Построение*	*Перпендикуляр*
11	Стрелка	Выделить *MX*
12	*Построние*	*Пересечение* (*A*)
13	Стрелка	Выделить *NY*,*AK*
14	*Построение*	*Пересечение* (*B*)
15	Стрелка	Выделить *MX*,*K*
16	*Построение*	*Параллельная прямая*
17	Стрелка	Выделить Окр(*I*, *IK*)
18	*Построение*	*Пересечение* (*P*)
19	Отрезок	*IP*
20	Стрелка	Выделить *P*
21	*Построение*	*Перпендикуляр*
22	Стрелка	Выделить *MX*
23	*Построение*	*Пересечение* (D)
24	Стрелка	Выделить *NY*,*DP*
25	*Построение*	*Пересечение* (*C*)
26	Стрелка	Скрыть *MX*,*NY*,*AD*,*BC*,*KP*
27	Отрезок	*AB*, *BC*, *CD*, *AD*
28	Стрелка	Выделить *AB*
29	*Построение*	*Середина* (*E*)
30	Стрелка	Выделить *AB*
31	*Построение*	*Перпендикуляр*
32	Стрелка	Выделить *MI*
33	*Построение*	*Пересечение* (*O*)
34	Стрелка	Скрыть *MI*
35	Отрезок	*AC*,*OB*
36	Стрелка	Выделить *IK*
37	*Построение*	*Пересечение W*
38	Стрелка	Выделить *AC*, *OB*
39	*Построение*	*Пересечение* (*V*)
40	Стрелка	Выделить *AC*, *IK*
41	*Построение*	*Пересечение* (*U*)
42	Стрелка	Выделить *V*,*W*
43	*Построение*	*Внутренняя область*
44	Стрелка	Выделить *K*
45	*Вид*	*Анимация точки*

ємо команди **Измерения/Вычислить** і поділимо значення площі на квадрат радіуса *IK*.

Виконуючи анімацію точки *K*, простежуючи еволюцію конфігурації від точки до квадрата, одержимо, що найбільша площа трикутника *UVW* наближено дорівнює 0,02791, якщо величина її гострого кута наближено дорівнює 21°. Для зручності анімації можна створити кнопку: **Правка/Кнопки/Анимация/Свойства объекта** (направление, скорость).

Маємо: $0{,}02791<0{,}03<\pi/100\approx0{,}03142$. Отже, впевнюємось, що S_{UVW}**<0,01*S*.**

Таким чином, за допомогою створеної моделі ДГК у спеціалізованому середовищі нерівність доведено без складного математичного розв'язання.

III. Навчальне моделювання ДГК у середовищі програмування Turbo Pascal

```
Uses Crt, Graph;
Const xi=320; yi=240; r=180; {вихідні дані}
Procedure Init;
var gd,gm: Integer;
begin
 gd:=Vga; gm:=VgaHi; {ініціалізація графіки}
 InitGraph(Gd,Gm,'d:\tp\bgi');
 SetBkColor(3); SetColor(8); SetFillStyle(9,1)
end; {Init}
Procedure DynamicModel;
var xa,ya,xb,yb,xc,yc,xd,yd,xk,yk,xo,yo,
 xu,yu,xv,yv,xw,yw,Suvw,Smax,a,step: Extended;
 z: String[20];
 Procedure Config;
 var kIK,xe,ye: Extended; {локальні змінні}
 begin {коло, центри, ABCD, AC, радіуси}
 Circle(xi,yi,2); {інцентр I}
 Circle(xi,yi,r); {вписане коло}
 Line(xi,yi−r,xi,480); {вісь симетрії MN}
 xk:=xi+r*sin(a); yk:=yi−r*cos(a); {точка дотику K}
 Line(xi,yi,Round(xk),Round(yk)); {радіус r}
 kIK:=(yk−yi)/(xk−xi); {кутовий коеф. IK}
 xa:=(yk−yi−r)*kIK+xk; ya:=yi+r; {A}
 xb:=(yk−yi+r)*kIK+xk; yb:=yi−r; {B}
 xc:=2*xi−xb; yc:=yb; {симетрія: xm=xi} {C}
 xd:=2*xi−xa; yd:=ya; {симетрія: xm=xi} {D}
 xe:=(xa+xb)/2; ye:=(ya+yb)/2; {E — середина AB}
 xo:=xi; yo:=kIK*(xo−xe)+ye; {OE  IK} {O}
 MoveTo(Round(xa),Round(ya));
 LineTo(Round(xb),Round(yb)); {AB}
 LineTo(Round(xc),Round(yc)); {BC}
 LineTo(Round(xa),Round(ya)); {CA}
 LineTo(Round(xd),Round(yd)); {AD}
 LineTo(Round(xc),Round(yc)); {DC}
 Circle(Round(xo),Round(yo),2); {центр O}
 LineTo(Round(xb),Round(yb)) {радіус R}
 end; {Config}
 Procedure UVW;
 var xm,ym: Extended; {локальні змінні процедури}
 Procedure Intersect(x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4:
 Extended; var x,y: Extended);
 var k1,k2,l1,l2: Extended; {локальні змінні}
 begin
 k1:=(y2−y1)/(x2−x1); l1:=y1−x1*k1;
 k2:=(y4−y3)/(x4−x3); l2:=y3−x3*k2;
 x:=(l2−l1)/(k1−k2); {x та y — }
 y:=k1*(x−x1)+y1; {параметри-змінні}
 Circle(Round(x),Round(y),2) {поточна т. перетину}
 end; {Intersect}
 begin {UVW} {обчислення координат вершин}
 Intersect(xa,ya,xc,yc,xi,yi,xk,yk, xu,yu); {U}
 Intersect(xa,ya,xc,yc,xo,yo,xb,yb, xv,yv); {V}
 Intersect(xo,yo,xb,yb,xi,yi,xk,yk, xw,yw); {W}
 xm:=(xu+xv+xw)/3; ym:=(yu+yv+yw)/3; {центр ваги}
 FloodFill(Round(xm),Round(ym),8); {зафарбування}
 OutTextXY(240,20,'Dynamic triangle UVW')
 end; {UVW}
begin {DynamicModel}
 Smax:=0; a:=0.07; step:=0.0005; {початкові}
 Repeat {присвоювання}
 ClearDevice;
 Config;
 UVW; {трикутник UVW і його поточна площа}
 Suvw:=0.5*Abs((xw−xv)*(yv−yu)−(xv−xu)*(yw−yv));
 if Suvw>Smax then {знаходж. максимальної площі}
 begin Smax:=Suvw;
 OutTextXY(160,200,'Area increases') end
 else OutTextXY(160,200,'Area decreases!');
 {вивід результатів і поточних значень на дисплей}
 Str(a*180/pi:2:18,z); {градусна міра кута}
 OutTextXY(120,430,z); OutTextXY(280,424,'o');
 Str(Suvw/r/r:1:18,z); {поточна площа, якщо r=1}
 OutTextXY(100,230,'Suvw: '+z);
 SetColor(8); Str(Smax/r/r:1:18,z);
 OutTextXY(100,250,'Smax: '+z);{максимальна
   площа}
 If KeyPressed then Exit; {вихід}
 Delay(10000); {затримка}
 if a>0.4 then step:=0.005; {прискорення}
 if a>1.5699 then step:=0.00001; {сповільнення}
 a:=a+step {приріст кроку}
 Until a>pi/2; {умова завершення циклу}
 ReadLn; CloseGraph
end; {DynamicModel}
BEGIN
 Init;
 DynamicModel
END.
```

Зверніть увагу на вихідні дані. Це лише три цілі числа, що визначають круг. Усі інші необхідні у процесі побудови моделі координати точок обчислюються з використанням проміжних змінних [12, 13, с. 255].

Поточні координати вершин трапеції *A, B, C, D*, центра описаного навколо неї кола *O*, точки дотику *K* і вершин *U, V, W* трикутника обчислюються програмно без використання формул. Координати точок *A, B, O, K, U, V, W* обчислюються як координати точок перетину пар відповідних прямих, а для запису координат точок *C* і *D* використовується те, що вони симетричні точкам *B* і *A* відносно серединного перпендикуляра *MN*, проведеного до основ трапеції. Координати точок перетину двох прямих знаходяться як розв'язки системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

Програма легко читається за наведеним нижче алгоритмом побудови в «крупних» командах. Вона процедурна і фактично лінійна.

Учням профільних класів, класів з поглибленим вивченням математики чи інформатики цікаво програмувати, моделюючи окремі функції спеціалізованих середовищ.

Алгоритм побудови моделі в «крупних» командах

1. Задамо вихідні дані — три цілі числа-константи, координати x_i, y_i центра круга і його радіус *r*.

2. Ініціалізуємо графічний режим — процедура ***Init***.

3. Створимо основну процедуру ***DynamicModel***, яка містить дві вкладені процедури ***Config*** та ***UVW*** і цикл з постумовою для виведення динамічної моделі на дисплей.

4. У процедурі ***Config*** будується геометрична конфігурація:
- вписане коло з центром у точці $I(x_i, y_i)$ і радіусом *r* (вихідні дані записані у блоці констант);
- промінь *MN*, який належить осі симетрії і містить вертикальний діаметр кола;
- точка дотику *K* вписаного кола до бічної сторони *AB* трапеції, радіус *IK*;
- вершини *A, B, C, D*, трапеція *ABCD*, діагональ *AC*: координати вершин трапеції *A* і *B* обчислюються за формулами (ординати точок дорівнюють y_i+r, y_i-r, а абсциси є абсцисами точок перетину відповідних пар дотичних прямих до кола; наприклад, x_a одержується з рівняння $y_i+r=kAB\ (x_a-x_k)+y_k$, яке є наслідком рівнянь $y_a=y_i+r$, $y_a=kAB\ (x_a-x_k)+y_k$; координати вершин трапеції *C* і *D* — з використанням симетрії відносно осі *MN* (ординати точок *A, D* і *B, C* рівні, а абсциси — протилежні за знаком);
- центр *O* описаного кола і його радіус *OB* (*OE* — серединний перпендикуляр до *AB*, $OE \| IK$, $kIK=(y_k-y_i)/(xk-xi)$ — кутовий коефіцієнт прямих *OE* і *IK*, $x_o=x_i$, $y_o=kIK\ (x_o-x_e)+y_e$ — рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом *kIK*, яка проходить через точку *E*; координати $(x_e; y_e)$ обчислюються за формулами $x_e=(x_a+x_b)/2$, $y_e=(y_a+y_b)/2$.

5. У процедурі *UVW* обчислюються:
- координати вершин трикутника $(x_u; y_u)$, $(x_v; y_v)$, $(x_w; y_w)$ за допомогою вкладеної процедури *Intersect* з параметрами змінними *x* і *y;* ці параметри — розв'язки системи двох лінійних рівнянь з двома змінними;
- центр мас трикутника $(x_m; y_m)$; Random(x_m), Random(y_m) — аргументи стандартної процедури ***FloodFill*** для зафарбування трикутника.

6. У тілі процедури ***DynamicModel***:
- перед циклом виконуються присвоювання початкових значень змінним S_{max}, α, *step* (максимальна площа, гострий кут трапеції в радіанах, крок); у циклі з постумовою $\alpha>\pi/2$ покроково:

а) очищається екран;

б) визивається процедура ***Config***, яка виводить на дисплей відповідну поточну конфігурацію;

в) зображується трикутник ***UVW***;

г) виводиться на дисплей поточна і максимальна площі трикутника, градусна міра гострого кута трапеції.

Програма виводить на дисплей значення величин α, S_{UVW} і S_{max} з високою точністю, де S_{max} — шукане найбільше значення площі трикутника *UVW*.

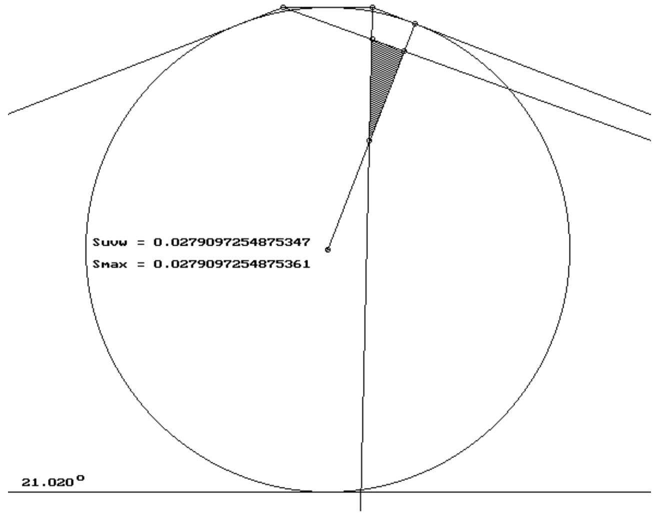

Рис. 4

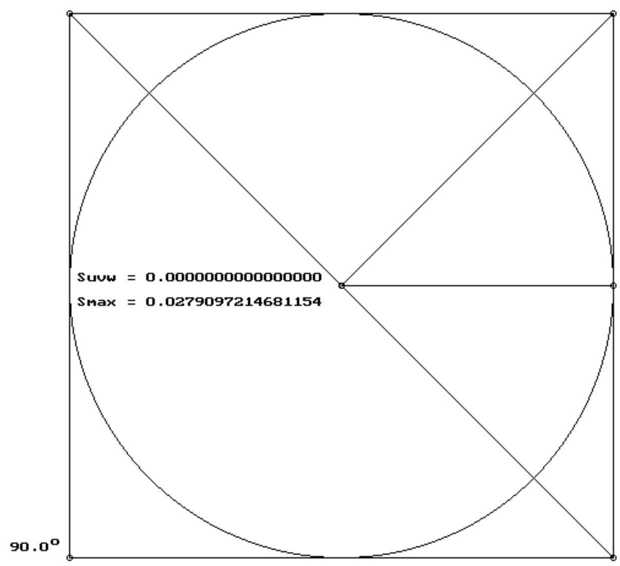

Рис. 5

При $\alpha \approx 21{,}0195^\circ \approx 0{,}36686$ радіан маємо: $Smax \approx 0{,}0279097255 < 0{,}03142$.

Таким чином, за допомогою створеної у середовищі програмування моделі ДГК нерівність доведено також без складного математичного розв'язання.

IV. Навчальне моделювання ДГК у середовищі MS Excel

Моделювання у середовищі електронних таблиць без програмування можливе за наявності формул для координат вершин трапеції і трикутника, для площі трикутника тощо. Отже, попереднє математичне розв'язання необхідне і створення моделі у цьому середовищі є складним.

На аркуші MS Excel з кроком 1° обчислені координати вершин трикутника *UVW*, його площа і найбільше значення цієї площі на проміжку (0°, 90°). Побудований графік функції $S(\alpha)$ на вказаному проміжку.

У стовпці справа від координат точок записані послідовно їх відповідні позначення — *C, D, A, B, C, A, B, O, I, K*. Така послідовність букв використовується для графічного зображення відрізків — сторін трапеції, діагоналі, радіусів кіл. Кут α збільшується або зменшується з кроком 1° за допомогою кнопок елемента керування.

Поточне значення площі $S(\alpha)$ виводиться у виділену клітинку електронної таблиці.

V. Вправи для самостійного моделювання у ДГК з використанням спеціалізованого середовища

Незамкнена ламана. Рівнобічна трапеція $ABCD$ ($AD>BC$) описана навколо кола з центром I й радіусом IK ($K \in AB$), $IK=1$; E, M, N — середини сторін

(градуси)			Координати вершин						Площа	Максимальна
α	Sin α	Cos α	Xu	Yu	Xv	Yv	Xw	Yw	S(α)	площа
1	0,0175	0,9998	0,0174	0,9995	0,0087	0,9997	0,0087	0,4999	**0,002179226130**	
2	0,0349	0,9994	0,0349	0,9982	0,0175	0,9988	0,0174	0,4995	**0,004343871520**	0,004343871520
3	0,0523	0,9986	0,0522	0,9959	0,0262	0,9973	0,0262	0,4990	**0,006479514245**	0,006479514245
4	0,0698	0,9976	0,0694	0,9927	0,0349	0,9951	0,0348	0,4982	**0,008572047620**	0,008572047620
5	0,0872	0,9962	0,0865	0,9887	0,0437	0,9924	0,0435	0,4971	**0,010607831846**	0,010607831846
6	0,1045	0,9945	0,1034	0,9837	0,0524	0,9890	0,0521	0,4959	**0,012573838651**	0,012573838651
7	0,1219	0,9925	0,1201	0,9779	0,0611	0,9851	0,0607	0,4944	**0,014457786773**	0,014457786773
8	0,1392	0,9903	0,1365	0,9713	0,0699	0,9805	0,0692	0,4927	**0,016248266347**	0,016248266347
9	0,1564	0,9877	0,1527	0,9638	0,0787	0,9754	0,0777	0,4908	**0,017934850465**	0,017934850465
10	0,1736	0,9848	0,1685	0,9555	0,0874	0,9696	0,0862	0,4886	**0,019508192397**	0,019508192397
11	0,1908	0,9816	0,1840	0,9465	0,0962	0,9633	0,0945	0,4863	**0,020960107280**	0,020960107280
12	0,2079	0,9781	0,1991	0,9367	0,1049	0,9563	0,1028	0,4837	**0,022283637307**	0,022283637307
13	0,2250	0,9744	0,2138	0,9263	0,1136	0,9488	0,1110	0,4809	**0,023473099808**	0,023473099808
14	0,2419	0,9703	0,2282	0,9151	0,1224	0,9407	0,1191	0,4778	**0,024524117870**	0,024524117870
15	0,2588	0,9659	0,2420	0,9033	0,1311	0,9320	0,1272	0,4746	**0,025433633495**	0,025433633495
16	0,2756	0,9613	0,2554	0,8909	0,1397	0,9227	0,1351	0,4711	**0,026199903535**	0,026199903535
17	0,2924	0,9563	0,2684	0,8778	0,1484	0,9129	0,1429	0,4675	**0,026822478993**	0,026822478993
18	0,3090	0,9511	0,2808	0,8643	0,1570	0,9025	0,1506	0,4636	**0,027302168481**	0,027302168481
19	0,3256	0,9455	0,2928	0,8502	0,1655	0,8916	0,1582	0,4595	**0,027640986908**	0,027640986908
20	0,3420	0,9397	0,3042	0,8357	0,1740	0,8802	0,1657	0,4552	**0,027842090665**	0,027842090665
21	0,3584	0,9336	**0,3150**	**0,8207**	**0,1824**	**0,8682**	**0,1730**	**0,4508**	**0,027909700760**	**0,027909700760**
22	0,3746	0,9272	0,3254	0,8053	0,1907	0,8557	0,1802	0,4461	**0,027849015499**	--------> 0

Рис. 6

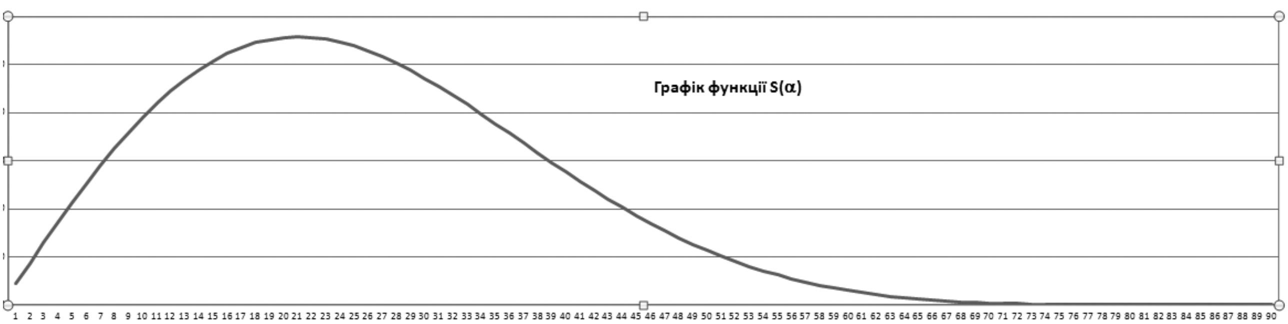

Рис. 7

	Динамічна модель				
	(аргумент - величина кута)				
α	**Sin α**	**Cos α**	**Координати точок**		
Кут					
21	0,35837	0,93358	**-0,18534**	**1,00000**	**C**
			-5,3955	**-1,0000**	**D**
			5,3955	**-1,0000**	**A**
			0,1853	**1,0000**	**B**
			-0,1853	**1,0000**	**C**
			5,3955	**-1,0000**	**A**
			0,1853	**1,0000**	**B**
			0,0000	**-7,2693**	**O**
			0,0000	**0,0000**	**I**
			0,3584	**0,9336**	**K**

Площа трикутника *UVW*

0,02790970

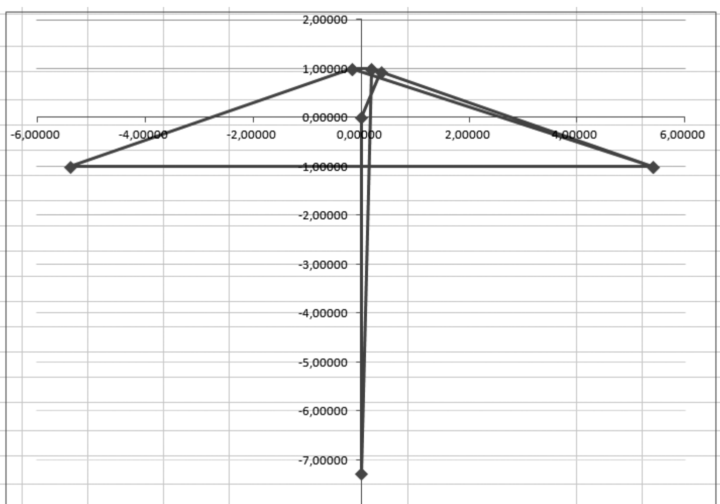

Рис. 8

AB, AD і BC. До бічної сторони AB і прямої MN побудовано перпендикуляри $IE \perp MN$, $IK \perp AB$, $N_1K \perp MN$, $N_1K_1 \perp AB$, ... так, що вони утворюють незамкнену ламану із дванадцяти ланок. Яким має бути гострий кут трапеції α, щоб кінець останньої ланки співпав з вершиною B?

Чотирикутник $OWQH$. Рівнобічна трапеція $ABCD$ ($AD>BC$) описана навколо кола з центром I і одиничним радіусом IK ($K \in AB$); BH — висота трапеції, O — центр описаного навколо неї кола, $W=OB \cap IK$, $Q=BH \cap IK$. Довести, що площа чотирикутника $OWQH$ набуває найбільшого значення, якщо $QK : WQ=1:4$.

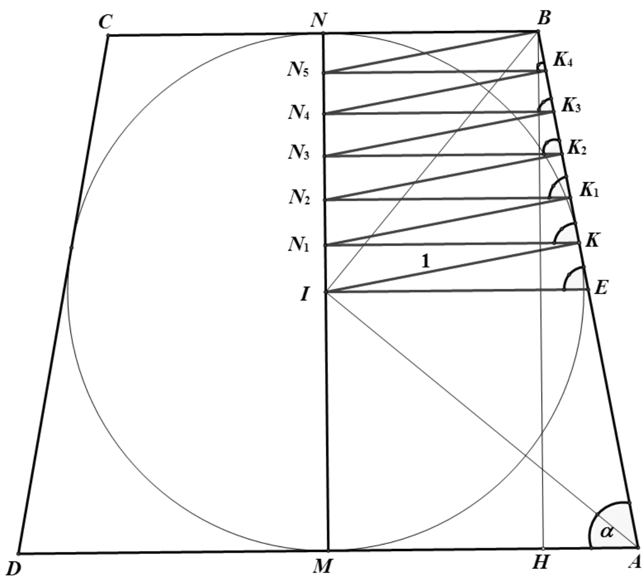

Рис. 9

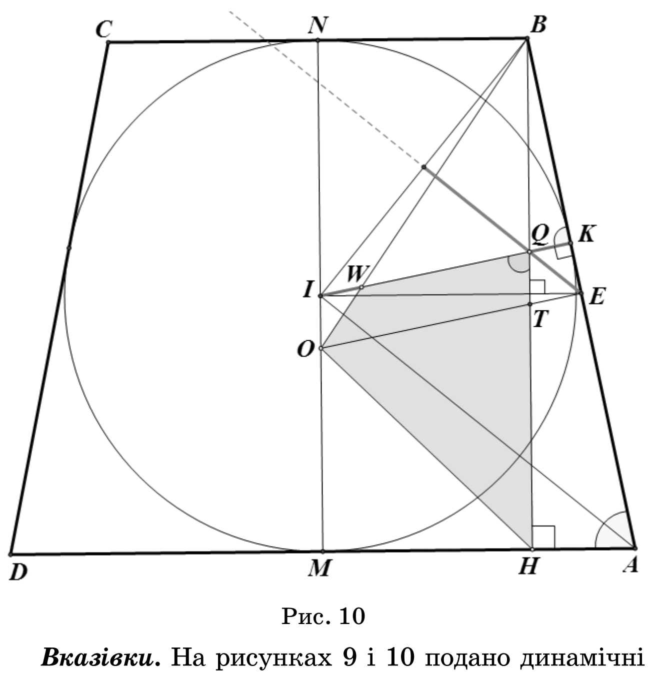

Рис. 10

Вказівки. На рисунках 9 і 10 подано динамічні моделі до наведених задач. Величина кута α у першій — корінь рівняння $\sin^{11}\alpha - \operatorname{tg} \alpha/2=0$, де $\alpha \in (0; \pi/2)$. Тому, використовуючи метод половинного поділу уточнення кореня з точністю до 10^{-5} знаходимо: $\alpha \approx 1{,}38898$ радіан або $\alpha \approx 79{,}58262^\circ$. У другій задачі впевніться, що $IW=QK$ для будь-якої трапеції з даної сім'ї і що задане відношення рівносильне відношенню основ $AD:BC=3:2$.

Строге математичне розв'язання [11] у першій задачі також вимушено завершується наближеними обчисленнями. У другій — строге доведення засобами моделювання лише перевіряється.

На завершення наведемо алгебраїчні вправи, які протягом двох навчальних тижнів ми з учнями розв'язували на уроках і в позаурочний час з використанням комп'ютера.

1. Скільки коренів мають рівняння

$$\sqrt{2|x|-x^2}=a, \quad \left|x+\frac{1}{x}-4\right|=a$$

залежно від значення параметра a?

2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0.$$

3. Знайдіть усі непарні натуральні числа, які більше 500, але менше 1000, у кожного з яких сума останніх цифр усіх дільників, враховуючи одиницю і саме число, дорівнює 33.

4. Розв'язати рівняння

$$3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x.$$

5. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1+x\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Вправа 1 розв'язувалась на уроці у 10 класі профільного рівня під час вивчення теми «Дослідницькі задачі з параметрами». Побудовані за допомогою комп'ютера графіки функцій (лівих частин рівнянь) демонстрували один з потужних графічних методів і перевіряли аналітичне розв'язання (обидва рівняння або не мають коренів, або мають 2, 3, 4 корені в залежності від значення параметра a).

Вправи 2 і 3 пропонувались на міській олімпіаді з математики й аналізувались з учнями в позаурочний час. Графічним способом ($y_1=\sqrt{x-1}-1$, $y_2=\sqrt[3]{x-2}$) знаходимо множину коренів {1, 2, 10} ірраціонального рівняння. До задачі 4 учням 10 класу запропоновано написати програму в середовищі програмування.

Вправи 4 і 5 розв'язувались з учнями 10 і 11 класів у позаурочний час у процесі підготовки до міської олімпіади з математики. Ірраціональне рівняння і визначений інтеграл — це дві вправи з десяти, які пропонувались на вступному іспиті у В'єтнамі в 2011 році [14]. Побудувавши за допомогою комп'ютера криву і пряму, графічно перевіряємо аналітиче розв'язання, одержане методом «від рівняння до системи» — корінь 1,2. Ірраціональне значення інтеграла

$$I=\sqrt{3}-\ln 2-\frac{3}{16}+\frac{\pi}{12}\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}-\pi\right)$$

красномовно свідчить про непрості обчислення (перетворення, двічі інтегрування частинами) і напрошується на перевірку за допомогою комп'ютера. Використовуючи програму Gran-2d або GeoGebra або Advanced Grapher, знаходимо наближені значення виразу й інтеграла, які співпадають і дорівнюють 2,07.

Цікаво, що точне значення цього визначеного інтеграла обчислює і «розумний розв'язник» — вебсервіс Wolfram Alpha, відкритий у травні 2009 року (www.wolframalpha.com) (рис. 11).

«В'єтнамські» задачі — інформація до серйозних роздумів. Рівень ЗНО-2011 з математики уже такий, що лише 70% випускників підтвердили знання (не застосування!?) теореми Піфагора. В'єтнамський варіант [14] демонструє жахливі ножиці у вимогах до знань випускників. Не на користь ЗНО буде і порівняння з аналогічними тестуваннями у Росії, Польщі та інших країнах. Найгірше те, що орієнтація на його вимоги вже докорінно змінила роботу вчителів математики випускних класів не на користь математики. Оскільки ЗНО є одночасно і вступним іспитом до ВНЗ, то як, взагалі, за такого рівня підготовки українські випускники зможуть опановувати вищу математику у вузах?

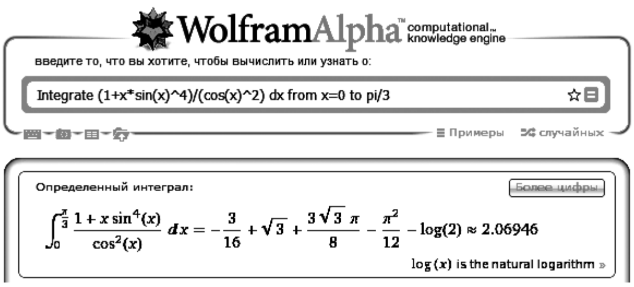

Рис. 11

У вчителів накопичуються й інші питання до освітянських чиновників.

Якщо проводиться олімпіада з програмування, то чому в школах не знаходять години для тих учителів інформатики, які бажають навчати учнів програмуванню?

Чому на олімпіадах з інформаційних технологій жодного разу не було завдання на створення моделі геометричної конфігурації, фізичного чи хімічного процесу тощо? Малювання в Paint, пошук заповітної кнопки у глибокому меню офісної програми чи жонглювання стовпчиками таблиці важливіше? Три роки тому на міській олімпіаді з інформаційних технологій жоден учасник (окрім декількох учнів нашого колегіуму) не назвав жодної програми і жодного застосування комп'ютера на уроках математики, фізики тощо. Тому ми організували й провели навчання вчителів математики міста Олександрії. Але ж на краще майже нічого не змінилось. У школах не вистачає комп'ютерів. Отже, коли в кожному шкільному кабінеті математики, фізики, хімії з'явиться комп'ютер, підключений до телевізора чи великого дисплея? Це б реально дозволило зрушити з місця проблему застосування ІКТ. Учителі на уроках, демонструючи застосування комп'ютера, пропонували б учням відповідні домашні завдання (комп'ютери вдома є у переважної більшості учнів, меню програм можна частково вивчати на уроках інформатики).

Кому потрібно багато підручників? Учителям? Ні! Учням? Ні! Методистам-інспекторам? Ні! Ще раз висловимо глибоке переконання про створення одного стабільного підручника відповідного профілю з кожного предмету — *сучасного, наукового, апробованого, без помилок, повторень і зайвих коментарів*. Останні, наприклад, збільшують розмір підручника з алгебри, розрахованого на один рік навчання, до 450 сторінок і, окрім того, змушують досвідченого вчителя переучуватись! Вивільнені при цьому кошти спрямуються на створення додатків-посібників. До підручників з інформатики вони є необхідними, до підручників з математики можуть містити приклади раціонального застосування комп'ютера, олімпіадні, міжпредметні задачі тощо [3, с. 154].

Висновки

1. Серія задач, розглянута лише на одній динамічній геометричній конфігурації, впевнює, що існують цікаві, змістовні задачі, які не є традиційними — «хорошо поставленными». Їх дослідження і розв'язування раціонально використовує комп'ютерні технології. Вирішуючи проблему інтеграції знань учнів, подібні серії доцільно включити до змісту якісно нових підручників і посібників.

2. У сучасних методичних системах навчання математики за умов урахування основних принципів психології засоби ІКТ повинні стати для учня інтелектуальним знаряддям, а не іграшкою для пошуку в надрах меню.

Література

1. Зеленяк О.П. Математичне моделювання та обчислювальний експеримент у школі // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2001. — №2. — С. 16–18.
2. Зеленяк О.П. Задачі на координатній площині // Математика в школі. — 2001. — №4. — С. 12–14.
3. Зеленяк О.П. Навчання інформатики у класах із поглибленим вивченням математики // Проблеми сучасного підручника : збірник наукових праць / Редкол. В.М. Мадзігон та ін. — К.: Педагогічна думка. — 2003, випуск 3. — С. 154–156.
4. Зеленяк О.П. Інтегровані уроки з математики та інформатики в класах з поглибленим вивченням цих предметів // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2006. — №4. — С. 16–18. — №5. — С. 12–15.
5. Жук Ю.О. Діалектика педагогічного знання в умовах комп'ютерно орієнтованого процесу навчання // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2011. — №4. — С. 3–6.
6. Громов М. Можливі напрямки розвитку математики в наступних десятиліттях // У світі математики. —2001. — №7(1). — С. 3–5.
7. Броудер Ф. Роздуми про майбутнє математики // У світі математики. — 2003. — №9–2. — С. 1–7.
8. Екманн Б. Математика: питання та відповіді // У світі математики. — 1996. — №2–1. — С. 3–8.
9. Ф. Препарата, М. Шеймос. Вычислительная геометрия: Введение. — М.: Мир, 1989. — 478 с.
10. Зеленяк О.П. Розв'язування стереометричних задач: спільна конфігурація // Математика в школах України. — 2010. — №4 (268). — С. 10–16.
11. Зеленяк О.П. Динаміка геометричних конфігурацій // У світі математики. — 2012. — №18–1. — С. 18–27.
12. Зеленяк О.П. Моделирование геометрических мест точек в планиметрии // Информатика и образование. — 2007. — №5. — С. 40–50. — №6. — С. 114–119. — №7. — С. 47–55.
13. Зеленяк О.П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal. — СПб.: ДиаСофтЮП, М.: ДМК Пресс, 2008. — 330 с.
14. Інформація до роздумів // Математика в школах України. — 2011. — №28 (328). — С. 10.