

Порівняння моделей критичної площини для прогнозування довговічності за багатоосьової втоми

Є.В. Савчук¹ • С.М. Шукаєв¹

Received: 15 September 2023 / Revised: 30 November 2023 / Accepted: 22 December 2023

Проблематика. Експлуатація багатьох машин та агрегатів відбувається в умовах багатоосьового циклічного навантаження, яке, як правило, є непропорційним. Оцінювання втомної довговічності металевих сплавів в умовах багатоосьового непропорційного навантаження є актуальною задачею сучасного машинобудування. Розв'язання цієї задачі потребує таких методів розрахунку на втому, які б враховували умови експлуатації та властивості конструкційних матеріалів, зокрема, такі фактори, як вид напруженого стану, тип траєкторії навантаження, чутливість матеріалу до непропорційності навантаження тощо.

Мета дослідження. Здійснити порівняльний аналіз ряду моделей довговічності, що базуються на концепції критичної площини, включаючи підходи Фатемі-Сосі, Ванга-Брауна, Сміта-Ватсона-Топпера, Лю I і Лю II, визначити межі і особливості їх застосування.

Методика реалізації. Довговічності, розраховані за обраними моделями, порівнювали з експериментальними результатами, отриманими для різних металевих сплавів за одноісного розтягання-стискання, знакозмінного кручення та пропорційних і непропорційних багатоосьових навантажень.

Результати дослідження. Проаналізовано межі застосування моделей втомної довговічності, що базуються на концепції критичної площини, до різних металевих сплавів за умови пропорційного і непропорційного багатоосьового навантаження.

Висновки. Результати дослідження засвідчили, що моделі, які потребують використання констант матеріалу, отриманих з випробувань як за розтягання-стискання, так і знакозмінного кручення, дають надійні оцінки довговічності для різних видів металевих сплавів. Розрахунки за критеріями, що базуються тільки на кривій втоми за знакозмінного кручення, краще корелюють з результатами випробувань пластичних матеріалів, а розрахунки за критеріями, які використовують криву втоми за розтягання-стискання краще збігаються з результатами випробувань крихких матеріалів.

Ключові слова: багатоосьова втома, прогнозування довговічності, моделі критичної площини, пропорційне та непропорційне навантаження.

Вступ

Розвиток моделей довговічності за багатоосьового навантаження починався з розгляду класичних теорій міцності, таких як теорія найбільших нормальних напружень (критерій Ренкіна), теорія найбільших дотичних напружень (критерій Треска), теорія питомої енергії деформації формозміни (критерій Губера-Мізеса) [1], [2]. Існує велика кількість робіт, присвячених

аналізу кореляції експериментальних даних з результатами розрахунків за цими теоріями. У ряді випадків дослідників влаштовувала отримана точність результатів, а в інших – навпаки. Застосування критеріїв Губера-Мізеса та Треска в розрахунках на втому за складного напруженого стану навіть закріплено у нормативних документах [3]. Але з накопичуванням експериментальних результатів, стала очевидною обмеженість такого підходу. На сьогоднішній день запропонована значна кількість різноманітних критеріїв граничного стану і підходів до оцінювання втомної довговічності, в тому числі і в умовах багатоосьового навантаження. Більшість з цих критеріїв можна віднести до однієї з чотирьох груп: силові, деформаційні, енергетичні і критерії, що враховують механізми пошкодження ма-

✉ Є. В. Савчук
saweug@gmail.com

¹ КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

теріалу. До останніх, зокрема, відносять критерії (моделі), що ґрунтуються на концепції критичної площини.

Процес багатоосового навантажування поділяють на пропорційний (простий) та непропорційний (складний). У першому випадку направляючий тензор напружень залишається сталим протягом всього процесу навантажування, що за однорідного напруженого стану має місце тоді, коли зовнішні зусилля збільшуються або зменшуються пропорційно до одного загального параметра. В усіх інших випадках навантажування є непропорційним.

Експериментальні дослідження виявили суттєві відхилення у поведінці металів за пропорційних та непропорційних режимів навантажування. Зокрема, було встановлено, ефект “додаткового зміцнення”, коли за непропорційного навантажування деформаційне зміцнення матеріалу є більшим у порівнянні з пропорційними режимами. При цьому додаткове зміцнення є тим більшим, чим більше процес навантажування є відмінним від пропорційного. Як правило, довговічність металів зменшується за непропорційних режимів навантажування, іноді на цілий порядок, що може призводити до суттєвих похибок у визначенні термінів експлуатації елементів конструкцій і мати катастрофічні наслідки [4], [5].

Незважаючи на те, що сучасні методи прогнозування втомної довговічності за багатоосового навантажування досягли значного прогресу, слід відзначити, що на сьогоднішній день не існує загальноприйнятої універсальної теорії, яку можна було б застосовувати до всіх матеріалів і умов навантажування з достатньою надійністю та точністю [1], [7]. Оскільки ця складна задача залишається нерозв’язаною і має значне практичне значення, то її розв’язання все ще потребує додаткових досліджень. Ця робота спрямована на обговорення особливостей застосування ряду моделей критичної площини, які вважаються одними з найбільш перспективних щодо оцінювання ресурсу елементів конструкцій в умовах багатоосової втоми.

Моделі багатоосової втоми, що базуються на концепції критичної площини

З-поміж різних моделей прогнозування втомної довговічності, моделі що ґрунтуються на концепції критичної площини вважаються найбільш ефективними, оскільки базуються на спостереженнях за зародженням і розвитком тріщин [1], [2]. Згідно з цим підходом спочатку визначається площа з максимальним пошкодженням, напруження та деформації, що діють на цій площині, використовуються для розрахунку параметра пошкодження з метою прогнозування довговічності. Різні матеріали мають різні форми втомного руйнування за різних умов навантаження. Тому

існує багато способів визначення параметрів пошкодження в моделях критичної площини. Зокрема, за параметрами пошкодження моделі критичної площини можна поділити на такі групи: перша, де параметрами, що відповідають за втомне руйнування, є напруження; друга, де параметрами, що відповідають за втомне руйнування, є деформації; третя, де за параметри, що відповідають за втомне руйнування, обирають різноманітні комбінації з напружень і деформацій [8].

В цілому схема побудови таких моделей довговічності відповідає класичній схемі розрахунків в умовах складного напруженого стану. Спершу визначається параметр, який відповідає за пошкодження матеріалу. Як вже згадувалося, параметр пошкодження визначається як комбінація максимальної деформації (або напруження) зсуву та лінійної деформації (або нормального напруження), що діють на критичній площині. Далі цей параметр підставляють у відповідне рівняння довговічності, параметри якого отримані або у випробуваннях за симетричного розтягання-стискання, або кручення. Деякі моделі довговічності використовують параметри кривих втоми, як за розтягання-стискання, так і кручення.

Традиційно, під час аналізу матеріалів в області малоциклової втоми рівняння довговічності записують у деформаціях, а в області багатоциклової втоми – в напруженнях. В області багатоциклової втоми площини, на яких виникає максимальна деформація зсуву і максимальне дотичне напруження, збігаються, але вони є різними в області малоциклової втоми через нелінійну залежність між напруженнями і деформаціями. Тому, визначення параметру пошкодження залежить від області втомного руйнування та величини діючих деформацій або напружень [8].

В багатьох дослідженнях продемонстровано ефективність моделей, що ґрунтуються на концепції критичної площини [9], [10]. Розглянемо деякі із запропонованих моделей.

Модель Брауна-Міллера

У роботі Брауна та Міллера [11] була запропонована теорія, яка побудована на врахуванні мікромеханізмів втомного руйнування. Мікроаналіз зразків, що піддавалися втомним випробуванням, показав, що смуги ковзання утворюються на кристалографічних площинах, які паралельні площадкам максимального зсуву. Як наслідок, пластичні деформації у смугах ковзання повинні залежати лише від деформації зсуву. Таким чином, швидкість зародження тріщини визначається величиною максимальних деформацій зсуву γ_{\max} .

Крім того, втомна міцність металу суттєво пов’язана з його в’язкістю, яка залежить від лінійної деформації, що виникає у матеріалі біля кінчика втомної тріщини, або, більш точно, від лінійної деформації ϵ_n у площадці максимального зсуву, яка містить постійні смуги ковзання (рис. 1).

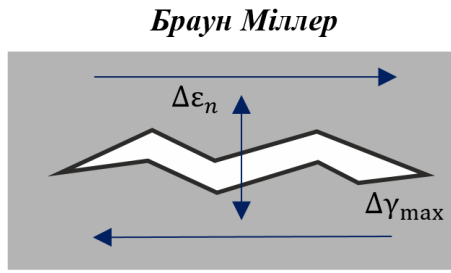


Рис. 1. Модель Брауна-Міллера

Автори запропонували графічний метод визначення довговічності за допомогою кривих однакової довговічності на, так званій, Г-площині в координатах $(\gamma_{max}, \epsilon_n)$.

Модель Ванга-Брауна (WB)

Дана модель [12] є модифікацією моделі Брауна-Міллера, яка пропонує наступний зв'язок між параметром пошкодження, що включає максимальну деформацію зсуву γ_{max} та лінійну деформацію ϵ_n на площадці максимального зсуву, і числом циклів до руйнування N_f :

$$P_{WB} = \frac{\Delta\gamma_{max}}{2} + S\Delta\epsilon_n = [(1+v_e) + S(1-v_e)] \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + [(1+v_p) + S(1-v_p)] \epsilon'_f (2N_f)^c,$$

де v_e та v_p – пружна та пластична складові ефективного коефіцієнту Пуассона, S – коефіцієнт чутливості, що описує вплив лінійної деформації ϵ_n на зростання тріщини і залежить від кількості циклів до руйнування [12]. Параметр S зазвичай визначається наступним чином [13]:

$$S = \frac{\tau'_f (2N_f)^{b_\gamma} + \gamma'_f (2N_f)^{c_\gamma} - (1+v_e) \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b - (1-v_e) \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + (1-v_p) \epsilon'_f (2N_f)^c}{-(1+v_p) \epsilon'_f (2N_f)^c},$$

де E – модуль Юнга; G – модуль зсуву; $\sigma'_f, \epsilon'_f, b, c$ – коефіцієнти рівняння Коффіна-Менсона для випадку розтягання-стискування за симетричного циклу; $\tau'_f, \gamma'_f, b_\gamma, c_\gamma$ – коефіцієнти рівняння Коффіна-Менсона для випадку кручення за симетричного циклу;

Значення параметру S змінюється в залежності від кількості циклів до руйнування (рис. 2). Використання змінних параметрів в розрахунках на довговічність значно ускладнює задачу, адже, як наслідок, розв'язок необхідно шукати ітеративно.

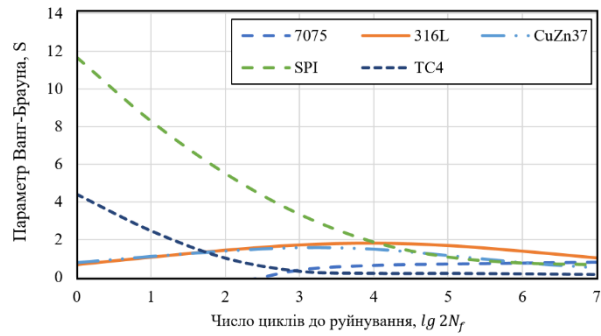


Рис. 2. Графіки залежності параметру S моделі Ванга-Брауна від довговічності для досліджуваних матеріалів

Модель Фатемі-Сосі (FS)

Фатемі і Сосі [14] запропонували вдосконалити модель Брауна-Міллера шляхом заміни лінійної деформації ϵ_n на максимальне нормальне напруження $\sigma_{n,max}$, що діє у критичній площині (площина максимального зсуву, рис. 3). На думку авторів, запропонований параметр пошкодження дозволяє описати ефект додаткового зміцнення, спричинений непропорційним навантаженням.

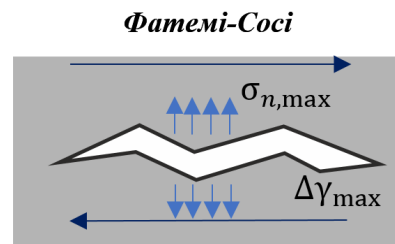


Рис. 3. Модель Фатемі-Сосі

Крім того, параметр враховує вплив середнього напруження через максимальне значення нормального напруження на критичній площині. Модель Фатемі-Сосі можна записати наступним чином:

$$P_{FS} = \frac{\Delta\gamma_{max}}{2} \left(1 + k \frac{\sigma_{n,max}}{\sigma_y} \right) = \frac{\tau'_f}{G} (2N_f)^{b_\gamma} + \gamma'_f (2N_f)^{c_\gamma}$$

де $\Delta\gamma_{max}/2$ – максимальна амплітуда деформації зсуву; $\sigma_{n,max}$ – максимальне нормальне напруження в критичній площині; σ_y – границя текучості; G – модуль зсуву; $\tau'_f, \gamma'_f, b_\gamma, c_\gamma$ – коефіцієнти рівняння Коффіна-Менсона для випадку чистого кручення за симетричного циклу; k – коригуючий коефіцієнт.

В багатьох дослідженнях відзначається, що модель FS демонструє гарну здатність до прогнозування втомної довговічності різних металевих матеріалів, але через те, що коефіцієнт k можна визначити кількома

способами, то це може призводити до неточних прогнозів. Як правило, коефіцієнт k отримують шляхом зіставлення даних на втому за одновісного розтягання-стискання з даними на знакозмінне кручення [9].

В цій роботі розрахунки коефіцієнта k здійснювали за наступною формулою:

$$k = \left[\frac{\frac{\tau'_f}{G} (2N_f)^{b_\gamma} + \gamma_f (2N_f)^{c_\gamma}}{(1+\nu_e) \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + (1+\nu_p) \epsilon'_f (2N_f)^c} - 1 \right] \times \frac{2\sigma_y}{\sigma'_f (2N_f)^b},$$

де N_f – число циклів до руйнування; ν_e та ν_p – значення ефективного коефіцієнту Пуассона за пружної та пластичної деформації, відповідно; $\sigma'_f, \epsilon'_f, b, c$ – коефіцієнти рівняння Коффіна-Менсона для випадку розтягання-стискання за симетричного циклу.

Аналогічно до параметру S , запропонованого в моделі Брауна-Міллера, коефіцієнт k залежить від числа циклів до руйнування. Це впливає на результати обчислень, які необхідно виконувати ітеративно. На рис. 4 представлені значення коефіцієнта k для матеріалів, розглянутих в цьому дослідженні. Від'ємні значення параметру не мають фізичного сенсу, і аналогічно до критерію Брауна-Міллера, використання критерію Фатемі-Сосі обмежується областю значень $k \geq 0$.

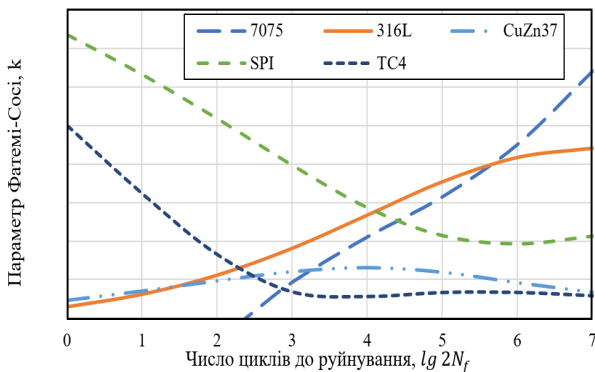


Рис. 4. Графіки залежності коефіцієнта k моделі Фатемі-Сосі від довговічності для досліджуваних матеріалів

Модель Сміта-Ватсона-Топпера (SWT)

Смітом та ін. [15] запропоновано модель, в якій за критичну площину обрано площину максимальної нормальної деформації. У моделі SWT за параметри втомного пошкодження приймаються: розмах максимальної лінійної деформації $\Delta \epsilon_n$ та максимальне нормальне напруження, що діє у критичній площині $\sigma_{n,max}$.

Моделі Фатемі Сосі та Брауна-Міллера розроблені на основі дослідів матеріалів що руйнуються внаслідок зсуву.

Сміт -Ватсон-Топпер

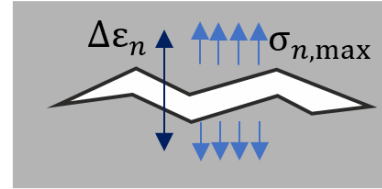


Рис. 5. Модель Сміта-Ватсона-Топпера

Модель Сміта-Ватсона-Топпера ґрунтується на припущенні, що втомні тріщини виникають та розвиваються в площинах максимальних нормальних напружень та лінійних деформацій. Застосовуючи рівняння Коффіна-Менсона модель SWT можна записати наступним чином:

$$P_{SWT} = \sigma_{n,max} \frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{\sigma_f^2}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \epsilon'_f (2N_f)^{b+c},$$

де P_{SWT} – параметр пошкодження за моделлю SWT; E – модуль Юнга; $\sigma'_f, \epsilon'_f, b, c$ – коефіцієнти рівняння Коффіна-Менсона для випадку розтягання-стискання за симетричного циклу.

Критична площина визначається як площина, де параметр P_{SWT} має максимальне значення. Формулювання моделі через напруження дозволяє враховувати вплив середніх напружень та ефекти непропорційного зміцнення за багатоосового втомного навантажування.

Моделі Лю I та Лю II

В залежності від типу втомного руйнування Лю запропонував використовувати два параметри пошкодження, один для нормального руйнування за розтягання (ΔW_I) і інший для руйнування при зсуві (ΔW_{II}) [16], [17]. Напруження та деформації зсуву зазвичай мають більший вплив на втомне руйнування пластичних матеріалів, а нормальні напруження та лінійні деформації більше впливають на втомне руйнування крихких матеріалів [17]. Метод ґрунтується на використанні кореляційних параметрів віртуальної енергії деформації, як міри втомного пошкодження на критичних площинах руйнування. Параметри віртуальної енергії деформації фізично пов'язані з двома різними режимами втомного руйнування. Критична площина, що веде до руйнування в режимі I, обумовлена головним напруженням і головною деформацією, а інша, що веде до руйнування в режимі II, обумовлюється максимальним напруженням і деформацією зсуву. Спосіб зародження та поширення тріщин залежить від матеріалу, температури, діапазону деформації та історії зміни напружень та деформацій.

Енергію деформування у циклі ΔW_a за розтягання-стискання можна представити як суму робіт на пружній ΔW_a^e і пластичній ΔW_a^p складових деформації

$$\Delta W_a = \Delta W_a^e + \Delta W_a^p \cong \Delta \sigma \Delta \epsilon,$$

де $\Delta \sigma$ і $\Delta \epsilon$ – розмах нормального напруження та розмах лінійної деформації у циклі, відповідно.

Аналогічним чином можна визначити сумарну енергію за кручення

$$\Delta W_t = \Delta W_t^e + \Delta W_t^p \cong \Delta \tau \Delta \gamma,$$

де $\Delta \tau$ і $\Delta \gamma$ – розмах дотичного напруження та розмах деформації зсуву у циклі, відповідно.

У випадку багатоосового навантаження енергія ΔW визначається як сума енергій за розтягання-стискання та кручення:

$$\Delta W = \Delta W_a + \Delta W_t.$$

За втомного руйнування, де переважає вплив нормальних напружень, параметр пошкодження Лю I визначається наступним чином:

$$\Delta W_I = (\Delta \sigma \Delta \epsilon)_{\max} + (\Delta \tau \Delta \gamma),$$

а для випадку, де переважає вплив напружень і деформацій зсуву, параметр пошкодження Лю II записується так:

$$\Delta W_{II} = (\Delta \sigma \Delta \epsilon) + (\Delta \tau \Delta \gamma)_{\max}.$$

Моделі довговічності на базі параметрів пошкодження Лю мають такий вигляд:

$$\Delta W_I = 4 \frac{\sigma_f^2}{E} (2Nf)^{2b} + 4\sigma'_f \epsilon'_f (2Nf)^{b+c},$$

де $\sigma'_f, \epsilon'_f, b, c$ – коефіцієнти рівняння Коффіна-Менсона у випадку розтягання-стискання за симетричного циклу, E – модуль Юнга;

$$\Delta W_{II} = 4 \frac{\tau_f^2}{G} (2Nf)^{2b\gamma} + 4\tau'_f \gamma'_f (2Nf)^{b\gamma+c\gamma},$$

де $\tau'_f, \gamma'_f, b\gamma, c\gamma$ – коефіцієнти рівняння Коффіна-Менсона для випадку чистого кручення за симетричного циклу, G – модуль зсуву.

Режими навантажування

У дослідженнях на багатоосовому втому найбільш поширеним експериментальним методом є випробування тонкостінних трубчатих зразків, які піддаються дії різноманітних силових факторів (осьова сила, крутний момент, внутрішній і зовнішній тиск). Це пояснюється тим, що на трубчатих зразках забезпечується широкий діапазон напружених станів і всі можливі комбінації компонент девіатора напружень. Форма і розміри трубчатого зразка мають забезпечувати отримання

близького до однорідного напружено-деформованого стану у поперечному перерізі зразка.

У практиці механічних випробувань за плоского напруженого стану трубчаті зразки піддаються дії осьової сили P і крутного моменту T , якщо навантажування здійснюється з контролем за деформаціями, то реалізується так званий жорсткий режим (рис. 6). У подальшому будемо розглядати результати випробувань, які реалізовувалися за цією схемою навантажування.

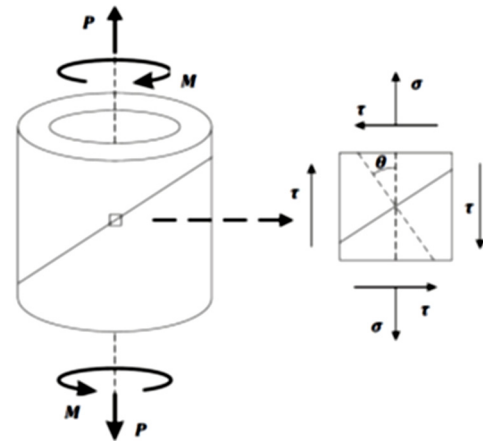


Рис. 6. Схема навантажування тонкостінного трубчатого зразка

Напруження та деформації на поверхні тонкостінного трубчатого зразка (рис. 6), можна виразити як

$$[\sigma(t)] = \begin{bmatrix} \sigma_x(t) & \tau_{xy}(t) & 0 \\ \tau_{yx}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[\epsilon(t)] = \begin{bmatrix} \epsilon_x(t) & \frac{1}{2}\gamma_{xy}(t) & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx}(t) & \epsilon_y(t) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \epsilon_x(t) & \frac{1}{2}\gamma_{xy}(t) & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx}(t) & -\nu_{eff}\epsilon_x(t) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_{eff}\epsilon_x(t) \end{bmatrix},$$

де ν_{eff} – ефективний коефіцієнт Пуассона.

Використання повних деформацій для визначення параметрів пошкодження за пружнопластичного деформування є коректним, якщо вдається врахувати залежність коефіцієнта Пуассона від рівня деформації. Як правило, для цього використовують, так званий, ефективний коефіцієнт Пуассона ν_{eff} , значення якого лежить

між величинами коефіцієнтів поперечного стиснення для пружної v_e і пластичної v_p складових деформації.

$$v_{eff} = \frac{v_e \epsilon_{a,e} + v_p \epsilon_{a,p}}{\epsilon_a} = \frac{v_e \epsilon_{a,e} + v_p \epsilon_{a,p}}{\epsilon_{a,e} + \epsilon_{a,p}},$$

де, $\epsilon_{a,e}, \epsilon_{a,p}$ – амплітуда пружної і пластичної деформації, відповідно.

Поширеним видом навантажування з контролем за деформаціями є випробування, в яких кожна компонента тензора деформації змінюється за синусоїдальним законом, як:

$$\epsilon_x(t) = \frac{\Delta \epsilon}{2} \sin(\omega t),$$

$$\gamma_{xy}(t) = \frac{\Delta \gamma}{2} \sin(\omega t - \varphi),$$

де $\Delta \epsilon$, $\Delta \gamma$ – розмах лінійної деформації і розмах деформації зсуву, ω – кутова частота; φ – кут зсуву фаз між деформаціями ϵ_{xx} та γ_{xy} . За значення $\varphi = 0^\circ$ маємо режим пропорційного навантажування, будь-яке значення $\varphi \neq n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) відповідає непропорційним режи-

мам навантажування, випадок $\varphi = 90^\circ$ вважається найбільш пошкоджуваним режимом, за якого ефекти непропорційного навантажування є максимальними (Табл. 1).

При повороті осей координат нормальні і дотичні напруження, лінійні деформації та деформації зсуву визначаються таким чином:

$$\sigma_\theta(\theta) = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta),$$

$$\tau_\theta(\theta) = -\frac{\sigma_x}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta),$$

$$\epsilon_\theta(\theta) = (1 - v_{eff}) \frac{\epsilon_x}{2} + (1 + v_{eff}) \frac{\epsilon_x}{2} \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\theta),$$

$$\frac{\gamma_\theta}{2}(\theta) = -\frac{(1 + v_{eff})}{2} \epsilon_x \sin(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos(2\theta),$$

де θ – кут між заданою площиною та віссю зразка.

Наведені вище вирази дозволяють визначити максимальні значення параметрів для всіх значень кута θ за цикл навантаження наступним чином:

Таблиця 1. Траєкторії навантажування

Найменування	Траєкторія	Параметри
Розтягання-стискування за симетричним циклом		$\varphi = 0^\circ, \omega = 1$ $\epsilon_x(t) = \frac{\Delta \epsilon}{2} \cdot \sin(\omega t), \gamma_{xy} = 0$ $\sigma_x(t) = \frac{\Delta \sigma}{2} \cdot \sin(\omega t), \tau_{xy} = 0$
Знакозмінне кручення за симетричним циклом		$\varphi = 0^\circ, \omega = 1$ $\epsilon_x(t) = 0, \gamma_{xy}(t) = \frac{\Delta \gamma}{2} \cdot \sin(\omega t)$ $\sigma_x(t) = 0, \tau_{xy} = \frac{\Delta \tau}{2} \cdot \sin(\omega t)$
Пропорційне навантаження		$\varphi = 0^\circ, \omega = 1$ $\epsilon_x(t) = \frac{\Delta \epsilon}{2} \cdot \sin(\omega t), \gamma_{xy}(t) = \frac{\Delta \gamma}{2} \cdot \sin(\omega t)$ $\sigma_x(t) = \frac{\Delta \sigma}{2} \cdot \sin(\omega t), \tau_{xy}(t) = \frac{\Delta \tau}{2} \cdot \sin(\omega t)$
Непропорційне навантаження зсувом фаз $\varphi = 45^\circ$		$\varphi = 45^\circ, \omega = 1$ $\epsilon_x(t) = \frac{\Delta \epsilon}{2} \cdot \sin(\omega t), \gamma_{xy}(t) = \frac{\Delta \gamma}{2} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ $\sigma_x(t) = \frac{\Delta \sigma}{2} \cdot \sin(\omega t), \tau_{xy}(t) = \frac{\Delta \tau}{2} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$
Непропорційне навантаження зсувом фаз $\varphi = 90^\circ$		$\varphi = 90^\circ, \omega = 1$ $\epsilon_x(t) = \frac{\Delta \epsilon}{2} \cdot \sin(\omega t), \gamma_{xy}(t) = \frac{\Delta \gamma}{2} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ $\sigma_x(t) = \frac{\Delta \sigma}{2} \cdot \sin(\omega t), \tau_{xy}(t) = \frac{\Delta \tau}{2} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\Delta\gamma_{\max}}{2} = \frac{\Delta\varepsilon}{2} \times \sqrt{\left[\lambda_\varepsilon \cos 2\theta \cos \varphi - (1 + \nu_{eff}) \sin 2\theta\right]^2 + (\lambda_\varepsilon \cos 2\theta \sin \varphi)^2}$$

$$\Delta\varepsilon_{n,\max} = \frac{\Delta\varepsilon}{2} \sqrt{\left[2(1 + \nu_{eff}) \cos^2 \theta - 2\nu_{eff} + \lambda_\varepsilon \sin 2\theta \cos \varphi\right]^2 + (\lambda_\varepsilon \sin 2\theta \sin \varphi)^2},$$

$$\tau_{\max} = \frac{\Delta\sigma}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2(2\theta) + \lambda_\sigma^2 \cos^2(2\theta) - \frac{1}{2} \sin(4\theta) \lambda_\sigma \cos(\varphi)},$$

$$\sigma_{n,\max} = \frac{\Delta\sigma}{2} \sqrt{\cos^4(\theta) + 2\lambda_\sigma \cos^2(\theta) \sin(2\theta) \cos(\varphi) + \lambda_\sigma^2 \sin^2(2\theta)},$$

де λ_ε – відношення розмахів деформацій, λ_σ – відношення розмахів напружень, що мають наступний вигляд:

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\Delta\gamma}{\Delta\varepsilon}, \lambda_\sigma = \frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma}.$$

Критична площина обирається за максимальним значенням одного з параметрів, чи комбінацією параметрів, що визначені відповідною моделлю.

Матеріали та результати випробувань

Щоб оцінити та підтвердити поточні моделі використовували дані випробувань на одноосову та багатоосову втому різних металевих сплавів [18]–[21]. Зокрема, використовували результати випробувань на багатоосову втому зразків з холоднокатаної латуні CuZn37 у стані доставки (матеріал класифікується як такий, що є сильно чутливим до непропорційного навантажування) [18]; титановий сплав TC4 (або Ti–6Al–4V), для якого характерне значне додаткове зміцнення за непропорційного навантаження [19]; нержавіюча сталь 304L, (матеріал є сильно чутливим до непропорційного навантажування) [20]; високоміцний алюмінієвий сплав 7075-T651, який широко використовується у аерокосмічній галузі (згідно з експериментальними результатами матеріал є слабо чутливим до непропорційного навантажування) [21]; спечене залізо, Sintered Porous Iron, SPI (демонструє значне додаткове зміцнення за непропорційних навантажень) [22]. Детальну інформацію про зразки, експериментальне обладнання та методику виконання випробувань можна знайти в [18]–[22]. Статичні та втомні характеристики обраних матеріалів наведені в таблицях 2 і 3, відповідно.

Таблиця 2. Механічні характеристики матеріалів

Механічні характеристики	Матеріал				
	7075-T651	304L	TC4	CuZn37	SPI
Модуль Юнга, E, ГПа	71,7	183	108,4	132	162
Модуль зсуву, G, ГПа	27,5	82,8	43,2	49,6	62,3
Границя текучості $\sigma_{0,2}$, МПа	501	325	942,5	138	134
Границя міцності σ_b , МПа	561	650	$\geq 930^{**}$	366	254
Відносне видовження δ , %	9,7	$\geq 40^*$	$\geq 10^{**}$	$\geq 38^{***}$	12,7
Коефіцієнт Пуассона ν	0,306	0,3	0,25	0,33	0,3

Примітки: * ASTM A240 та ASME SA240, ** ASTM F1472-14, *** EN CW508L

Таблиця 3. Коефіцієнти рівняння Коффіна-Менсона

Втомні характеристики	Матеріали				
	7075-T651	304L	TC4	CuZn37	SPI
Рівняння Коффіна-Менсона за розтягання-стискання: $\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c$					
σ'_f	1218	1000	1116,9	308,95	289
ε'_f	3,04	0,171	0,597	0,1981	0,047
b	-0,128	-0,114	-0,049	-0,026	-0,074
c	-1,099	-0,402	-0,679	-0,438	-0,406
Рівняння Коффіна-Менсона за знакозмінного кручення: $\frac{\Delta\gamma}{2} = \frac{\tau'_f}{G} (2N_f)^b + \gamma'_f (2N_f)^c$					
τ'_f	767,7	709	716,9	163,35	206,134
γ'_f	2,78	0,315	2,24	0,3756	0,3588
$b\gamma$	-0,12	-0,121	-0,06	-0,023	-0,0754
$c\gamma$	-1,09	-0,353	-0,8	-0,399	-0,5049

Результати і обговорення

Порівняння результатів експериментальних випробувань з довговічностями, обчисленими за обраними моделями, зображені на рис. 7–11. Суцільна

лінія позначає тотожність між прогнозованими та експериментальними результатами. Дві пунктирні лінії – це границі смуги розсіювання з коефіцієнтом 2.

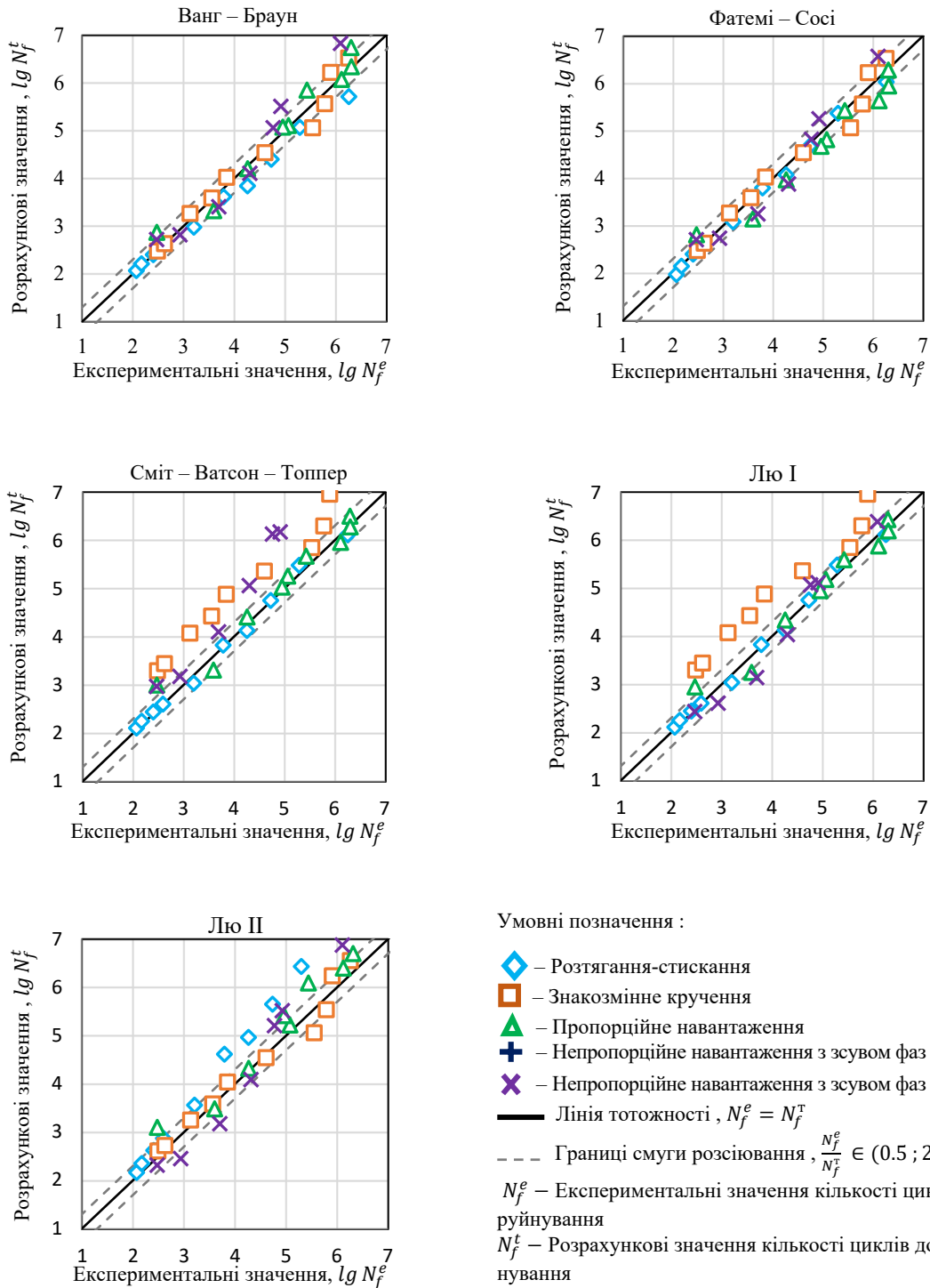


Рис. 7. Порівняння експериментальних і розрахункових довговічностей алюмінієвого сплаву 7075-T651

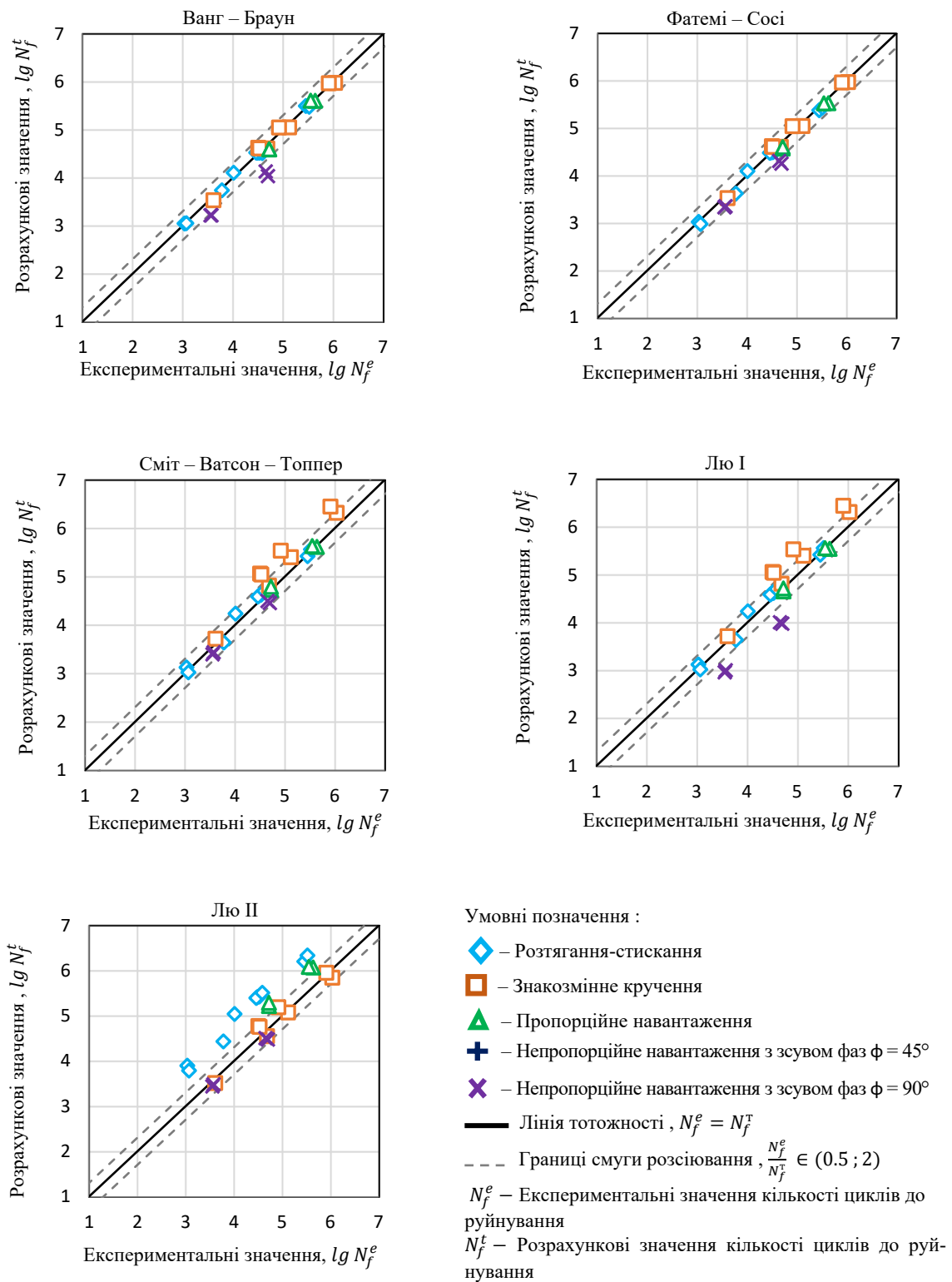


Рис. 8. Порівняння експериментальних і розрахованих довговічностей нержавіючої сталі 304L

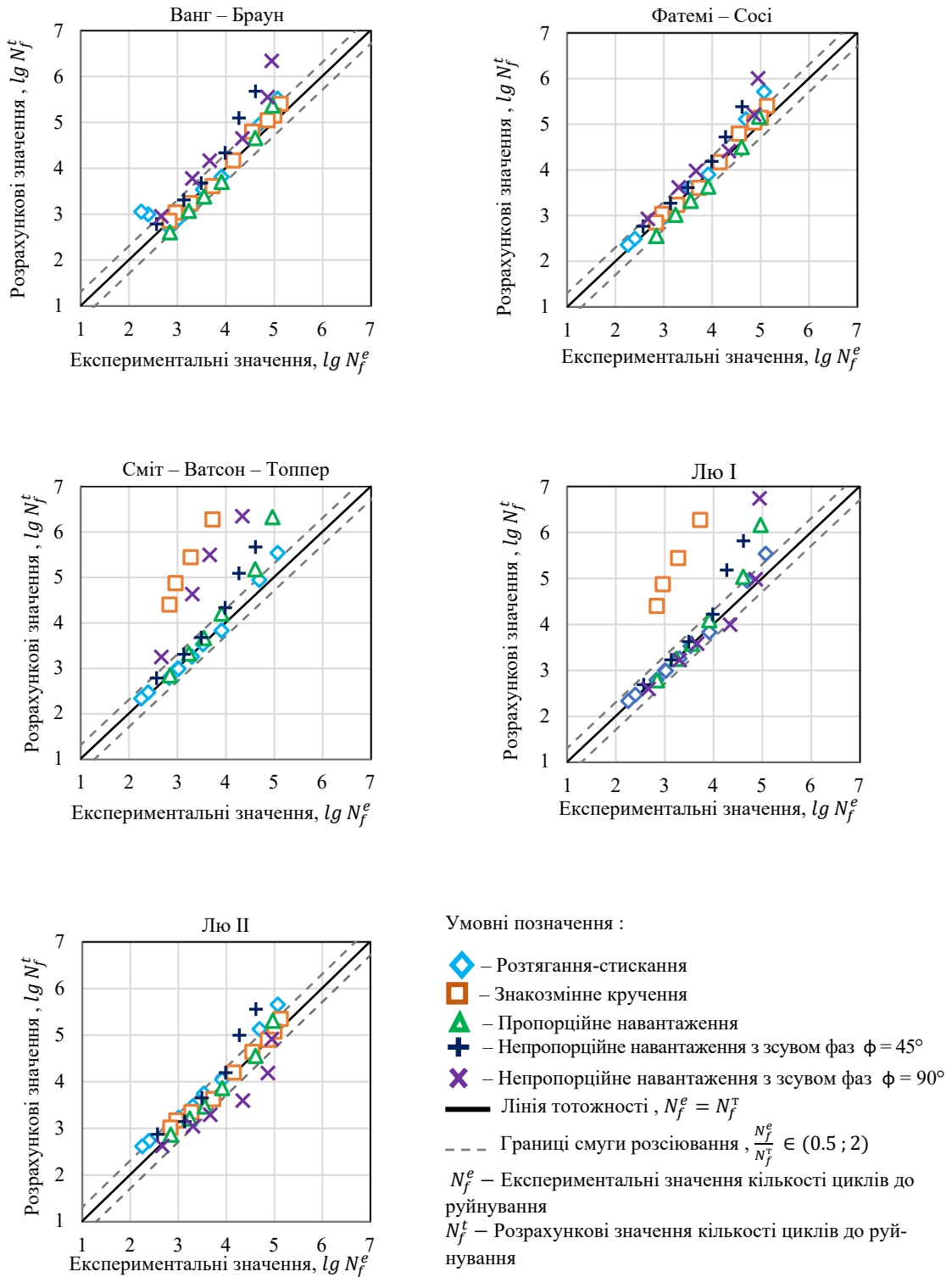


Рис. 9. Порівняння експериментальних і розрахункових довговічностей титанового сплаву Ti-6Al-4V (TC4)

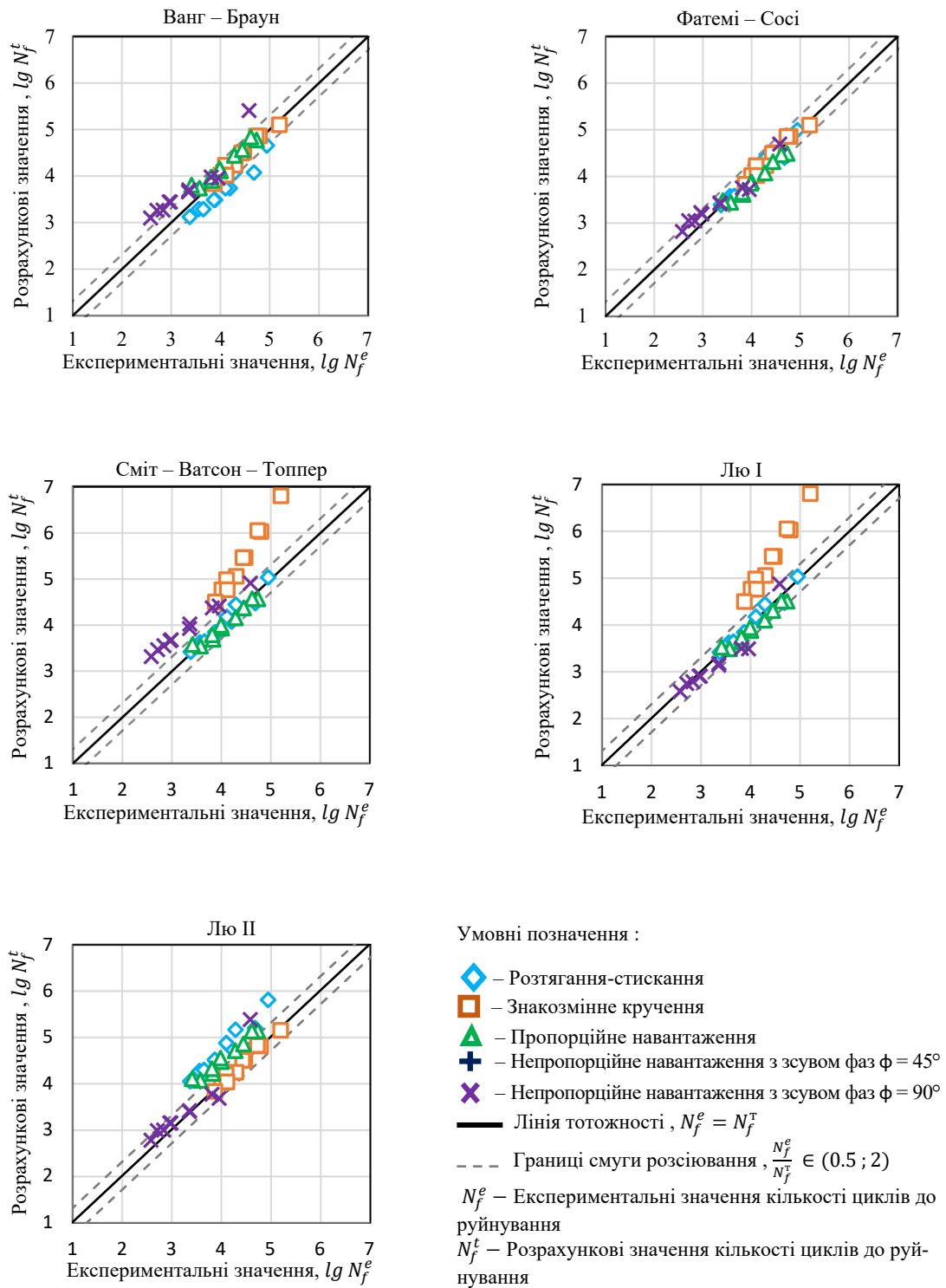


Рис.10. Порівняння експериментальних і розрахункових довговічностей латуні CuZn37

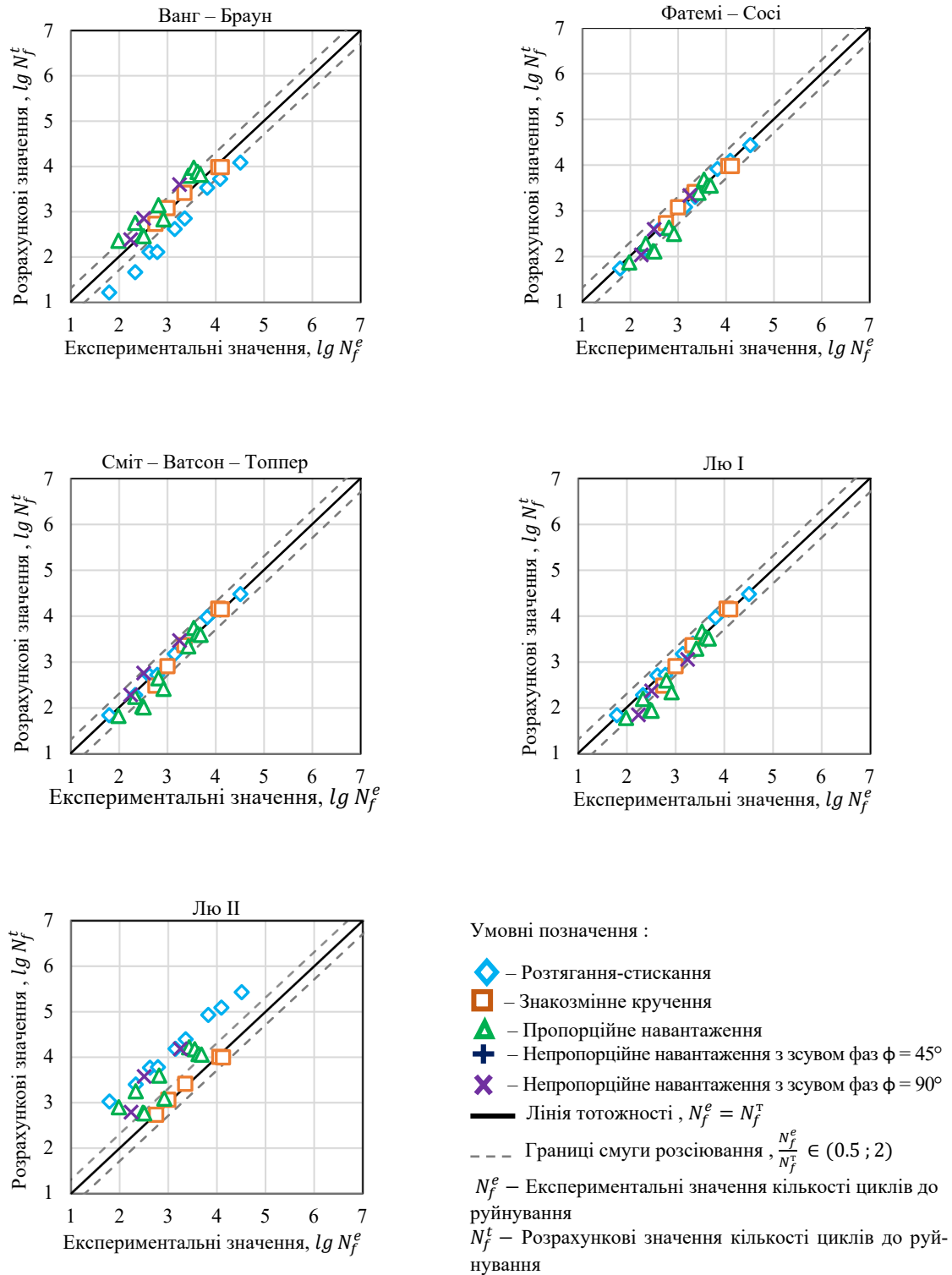


Рис. 11. Порівняння експериментальних і розрахункових довговічностей спеченого заліза SPI

Здатність моделі прогнозувати довговічність оцінювалася шляхом аналізу середнього значення та стандартного відхилення помилки передбачення Δ_{N_f} .

Помилка передбачення визначалась, як різниця між експериментальним значенням і розрахованим за моделлю довговічностями у логарифмах:

$$\Delta_{N_f} = \lg(N_{\text{exp}}) - \lg(N_{\text{mod}}),$$

де N_{mod} – довговічність, передбачена за відповідною моделлю, а N_{exp} – довговічність, отримана в експерименті. На рис. 12 представлені функції щільності ймовірності помилки передбачення Δ_{N_f} розглянутих моделей за умов пропорційного і непропорційного малоциклового та багатоциклового навантаження.

Графіки функції щільності ймовірності помилки передбачення Δ_{N_f} , які ближчі до нульової середньої похибки і з меншим відхиленням, вказують на кращу точність моделі. Від’ємні значення вказують на неконсерва-

тивні прогнози, а додатні значення – на консервативні.

Як слідує з рис. 12, найкращі результати передбачення для всіх досліджених матеріалів, як за пропорційного, так і непропорційного навантаження, демонструють моделі Ванга-Брауна і Фатемі-Сосі, більшість результатів прогнозування лежить у межах смуги розсіювання з коефіцієнтом 2 (рис. 7–11).

За виключенням спеченого заліза, модель Сміта-Ватсона-Топпера не придатна для прогнозування довговічності обраних матеріалів за багатоосьового навантаження, так як більшість результатів прогнозування виходять за смугу розсіювання (рис. 7–10).

Здебільшого, модель дає неконсервативний прогноз довговічності як за пропорційних, так і непропорційних шляхів навантаження.

Моделі Лю I і Лю II за непропорційного навантаження в області малоциклової втоми демонструють гарні результати, але в області багатоциклової втоми та за пропорційного навантаження в області малоциклової втоми моделі дають значно гірші результати ніж моделі Ванга-Брауна і Фатемі-Сосі. Загалом, результати

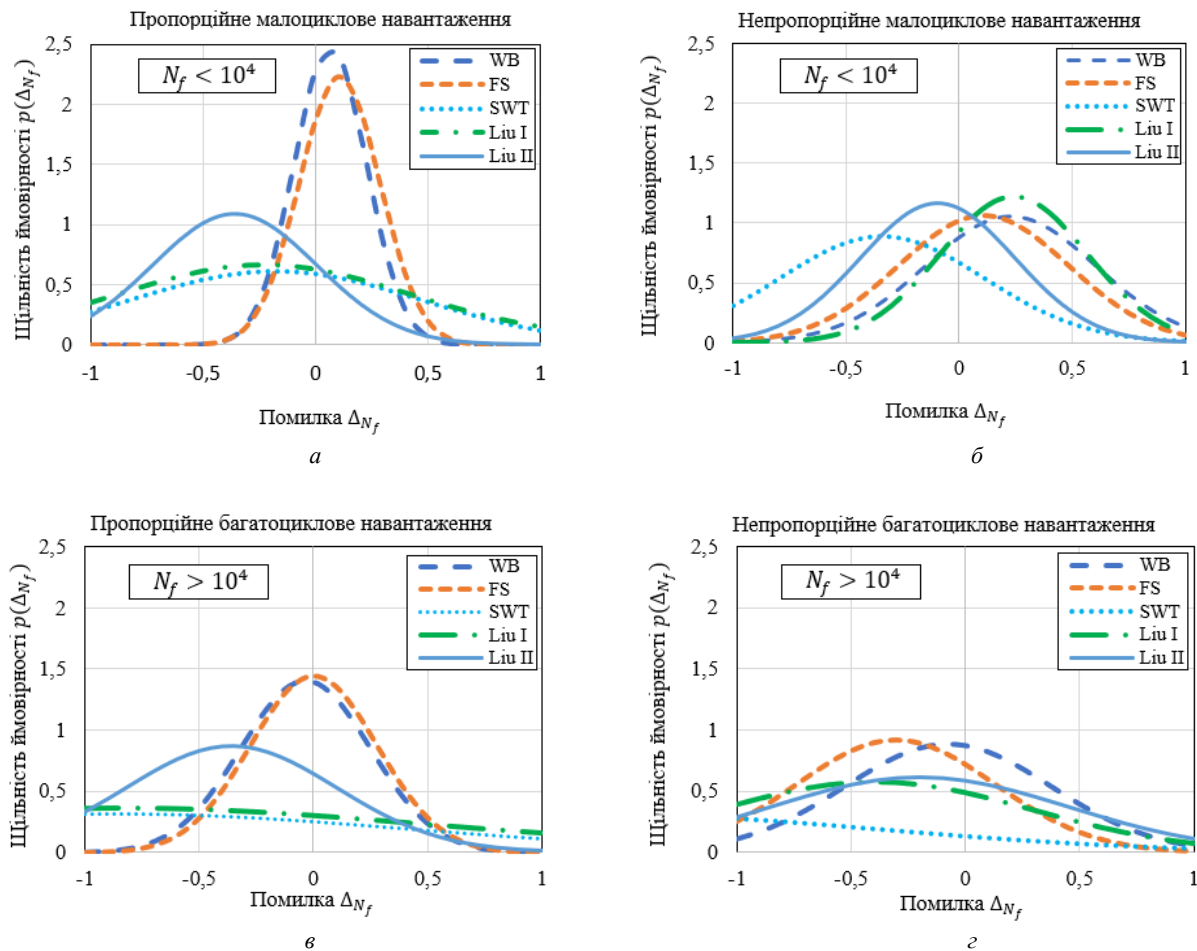


Рис. 12. Функції щільності ймовірності помилки передбачення Δ_{N_f} розглянутих моделей: а) – пропорційне малоциклове навантаження, б) – непропорційне малоциклове навантаження, в) – пропорційне багатоциклове навантаження г) – непропорційне багатоциклове навантаження

прогнозування для одновісного та пропорційного навантажень є переважно неконсервативними (рис. 12 а, в), для непропорційних навантажень результати прогнозування є як консервативними, так і неконсервативними. Значна частина результатів лежить за межами смуги розсіювання (рис. 7–10). Модель Лю II для більшості матеріалів виявилася ефективнішою за модель Лю I, хоча за точністю вона поступається моделям Фатемі-Сосі і Ванга-Брауна (рис. 7–11). Зазвичай, результати прогнозу перевищують експериментальні дані.

Висновки

Проаналізовано межі застосування моделей втомною довговічності, що базуються на концепції критичної площини, до різних металевих сплавів за умови пропорційного і непропорційного багатоосового навантаження, як в зоні малоциклової втоми, так і зоні багатоциклової втоми.

Результати дослідження засвідчили, що найкра-

щі результати передбачення для всіх досліджених матеріалів, як за пропорційного, так і непропорційного навантаження, демонструють моделі Ванга-Брауна і Фатемі-Сосі. Крім того продемонстровано, що визначення ефективного параметру пошкодження залежить від області втоми руйнування та властивостей матеріалу. Показано, що моделі, які потребують використання констант матеріалу, отриманих з випробувань як за розтягання-стискання, так і за знакозмінного кручення (моделі Фатемі-Сосі і Ванга-Брауна), дають більш надійні оцінки довговічності за багатоосового навантаження для різних видів металевих сплавів ніж інші моделі. Розрахунки за моделями, що базуються тільки на кривій втоми за знакозмінного кручення (Лю II), краще корелюють з результатами випробувань пластичних матеріалів, а розрахунки за критеріями, які використовують криву втоми за розтягання-стискання (Лю I і Сміт-Ватсон-Топпер) краще збігаються з результатами випробувань крихких матеріалів, до яких можна віднести спецене залізо.

References

- [1] A. Fatemi and N. Shamsaei, "Multiaxial fatigue: An overview and some approximation models for life estimation," *International Journal of Fatigue*, 33(8), pp. 948–958, 2011, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2011.01.003.
- [2] B. R. You and S. B. Lee, "A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals," *International Journal of Fatigue*, 18(4), pp. 235–244, 1996, doi: 10.1016/0142-1123(96)00002-3.
- [3] ASME Code Case N-47-23 (1988) Case of ASME Boiler and Pressure Vessel Code, American Society of Mechanical Engineers.
- [4] K. Kanazawa, K. J. Miller and M. B. Brown, "Low-cycle fatigue under out-of-phase loading conditions," *ASME J. Eng. Mater. Techn.*, Vol. 99, pp. 222–228, 1977, doi: 10.1115/1.3443523.
- [5] N. S. Mozharovskiy and S. N. Shukaev, "Dolgovechnost konstrukcyonnih materyalov pry neproporcyonalnih putjah malocykloвого nagruzhenyja," *Problemy prochnosti*, No. 10, pp. 47–54, 1988.
- [6] C. Lu and J. M. Martínez-Esnaola, "Multiaxial fatigue space: A three-dimensional space constituted of fatigue basic units," *International Journal of Fatigue*, Vol. 143, 105995, 2021, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2020.105995.
- [7] V. T. Troshchenko, "Rasseyanoe ustalostnoe povrezhdenie metallov i splavov. Soobshchenie 3. Deformatsionnye i energeticheskie kriterii," *Problemy prochnosti*, No. 1, pp. 5–31, 2006.
- [8] A. Karolczuk and E. Macha, "A review of critical plane orientations in multiaxial fatigue failure criteria of metallic materials," *International Journal of Fracture*, 134, pp. 267–304, 2005, doi: 10.1007/s10704-005-1088-2.
- [9] Z. Y. Yu, S. P. Zhu, Q. Liu and Y. Liu, "Multiaxial fatigue damage parameter and life prediction without any additional material constants," *Materials*, 10(8), 923, 2017, doi: 10.3390/ma10080923.
- [10] G. He, Y. Zhao and C. Yan, "Multiaxial fatigue life prediction using physics-informed neural networks with sensitive features," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 289, 109456, 2023, doi: 10.1016/j.engfracmech.2023.109456.
- [11] M. W. Brown and K. J. Miller, "A Theory For Fatigue Failure Under Multiaxial Stress-Strain Conditions," *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, Vol. 187, pp. 745–755, 1973, doi: 10.1243/PIME_PROC_1973_187_161_02.
- [12] C. H. Wang, and M. W. Brown, "A path-independent parameter for fatigue under proportional and non-proportional loading," *Fatigue & fracture of engineering materials & structures*, 16(12), pp. 1285–1297, 1993, doi: 10.1111/j.1460-2695.1993.tb00739.x.
- [13] D. Socie, and G.B. Marquis, *Multiaxial fatigue*. Society of Automotive Engineers Warrendale, PA, 2000.
- [14] A. Fatemi and D. F. Socie, "A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading," *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, Vol. 11(3), pp. 149–165, 1988, doi: 10.1111/j.1460-2695.1988.tb01169.x.
- [15] K. N. Smith, P. Watson and T.H. Topper, "A stress-strain function for the fatigue of metals," *Journal Material* 5 (1970), pp. 767–778.
- [16] K. C. Liu, "A method based on virtual strain-energy parameters for multiaxial fatigue life prediction," *ASTM special technical publication*, 1191, pp. 67–67, 1993, doi: 10.1520/STP24796S.
- [17] K. C. Liu and J. A. Wang, "An energy method for predicting fatigue life, crack orientation, and crack growth under multiaxial loading conditions," *International Journal of Fatigue*, Vol. 23, pp. 129–134, 2001, doi: 10.1016/S0142-1123(01)00169-4

- [18] D. Skibicki and Ł. Pejkowski, “Low-cycle multiaxial fatigue behaviour and fatigue life prediction for CuZn37 brass using the stress-strain models,” *International Journal of Fatigue*, Vol. 102, pp. 18–36, 2017, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2017.04.011.
- [19] Z.-R. Wu, X.-T. Hu and Y.-D. Song, “Multiaxial fatigue life prediction for titanium alloy TC4 under proportional and nonproportional loading,” *International Journal of Fatigue*, Vol. 59, pp. 170–175, 2014, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2013.08.028.
- [20] D. J. Jones and P. Kurath (1988). Cyclic Fatigue Damage Characteristics observed for Simple loadings extended to multiaxial fatigue life prediction. NASA contractor report NAS 1.26:182126.
- [21] T. Zhao and Y. Jiang, “Fatigue of 7075-T651 aluminum alloy,” *International journal of fatigue*, Vol. 30(5), pp. 834–849, 2008, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2007.07.005.
- [22] S. Ma, B. Markert and H. Yuan, “Multiaxial fatigue life assessment of sintered porous iron under proportional and non-proportional loadings,” *International Journal of Fatigue*, Vol. 97, pp. 214–226, 2017, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2017.01.005.

Comparison of critical plane models for multiaxial fatigue life prediction

E. Savchuk¹ • S. Shukaev¹

¹ Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

Background. The operation of numerous machines and units takes place under conditions of multi-axial cyclic loading, which, as a rule, is non-proportional. Evaluating the fatigue durability of metal alloys under conditions of multi-axial non-proportional loading is a relevant task in modern engineering. Solving this problem requires fatigue calculation methods that would consider operating conditions and properties of structural materials, including factors such as the type of stress state, loading trajectory, material sensitivity to non-proportional loading, and so on.

Objective. To conduct a comparative analysis of a range of fatigue life models based on the concept of the critical plane, including the Fatemi-Socie, Wang-Brown, Smith-Watson-Topper, Liu I, and Liu II approaches, and to identify the limits and peculiarities of their application.

Methods. The fatigue lives calculated using the selected models were compared with experimental results obtained for various metal alloys subjected to uniaxial tension-compression, alternating torsion, and proportional and non-proportional multiaxial loading.

Results. The applicability limits of fatigue life models based on the critical plane concept were analyzed for different metal alloys under conditions of proportional and non-proportional multiaxial loading.

Conclusions. The research results demonstrated that models requiring the use of material constants obtained from tests in both tension-compression and alternating torsion provide reliable fatigue life estimates for various types of metal alloys. Calculations based solely on fatigue curves from alternating torsion better correlate with the results of tests on ductile materials, while calculations based on criteria utilizing fatigue curves from tension-compression align more closely with results from tests on brittle materials.

Keywords: multiaxial fatigue, critical plane criteria, fatigue life prediction, proportional and non-proportional loading.