

пружності впливає обґрунтований висновок про те, що для підвищення точності розв'язання крайової задачі і побудови алгоритмів розрахунку уточнених математичних моделей доцільно незалежно визначати параметри напруженого й деформованого станів за допомогою змішаних варіаційних принципів.

У цьому сенсі для розв'язання згаданих задач доцільно застосовувати принцип Рейснера [4], у функціоналі \mathbf{I}_R якого незалежно варіюються вектор переміщення \mathbf{u} і тензор напружень \mathbf{s} , а в точці стаціонарності \mathbf{I}_R забезпечується $\min_u \max_s \mathbf{I}_R$.

Запропонований метод. RVR-метод ґрунтується на варіаційному принципі Рейснера [4] (для підвищення точності розв'язання задач), методі І. М. Векуа [3] (для заміни розв'язку тривимірної задачі регулярною послідовністю розв'язків двовимірних задач у побудованому за допомогою комп'ютера процесу уточнення моделей деформування оболонок), теорії R-функцій [5] (для точного врахування на аналітичному рівні геометричної інформації оболонок з отворами і створення аналітичних структур розв'язків, що точно задовольняють крайові умови на граничних поверхнях оболонок) та на залученні повної системи загальних рівнянь тривимірної теорії пружності.

Досвід використання змішаних варіаційних підходів свідчить про їхню ефективність, однак складнощі пов'язані з відсутністю екстремуму в точці стаціонарності змішаного функціоналу, що заважало числовій реалізації таких підходів і ускладнювало оцінку точності результатів. Як відомо, вирішення проблеми достовірності результатів при розв'язуванні задач прямими методами істотно залежить від ефективності контролю збіжності. В RVR-методі ця проблема вирішена (на базі варіаційних нерівностей теорії операторів у гільбертовому просторі та методу подвійності теорії опуклого аналізу) за рахунок доведеної [6] достатньої ознаки збіжності послідовності Рітца і запропонована [7] апостеріорна інтегральна оцінка точності числових розв'язків, отримуваних при відшуканні точки стаціонарності неекстремального функціонала Рейснера \mathbf{I}_R .

Конструктивним наслідком доведеної апостеріорної оцінки точності розв'язків змішаних варіаційних задач є те, що для покращання збіжності процесу Рітца шукані функції доцільно подати структурами розв'язків, які точно задовольняють усі граничні умови досліджених крайових задач.

Як відомо, розв'язком варіаційної задачі для функціонала Лагранжа \mathbf{I}_L є поле кінематично можливих переміщень $\bar{\mathbf{u}}$, а розв'язком двоїстої задачі для функціонала Кастильяно \mathbf{I}_C — поле статично можливих напружень $\bar{\mathbf{s}}$. У праці [7] показано, що для лагранжіана $\mathbf{L}(\mathbf{u}, \mathbf{s})$ існує єдина сідлова точка $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{s}})$, компоненти якої будуть розв'язками основної і двоїстої задач. Справедлива доведена рівність

$$\inf_{\mathbf{u}} \mathbf{I}_L(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_R(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{s}}) = \sup_{\mathbf{s}} \mathbf{I}_C(\mathbf{s}). \quad (1)$$

Таким чином, згідно з (1), задача мінімізації функціонала Лагранжа \mathbf{I}_L і двоїста їй задача максимізації функціонала Кастильяно \mathbf{I}_C — еквівалентні задачі щодо визначення сідлової точки функціонала Рейснера \mathbf{I}_R . Цей

висновок покладено в основу апостеріорної оцінки отриманих за допомогою функціонала \mathbf{I}_R наближених розв'язків, для оцінки збіжності яких підраховуються значення функціоналів \mathbf{I}_L , \mathbf{I}_C , \mathbf{I}_R та величини інтегральної оцінки \mathbf{I}_ε похибки розв'язку:

$$\mathbf{I}_\varepsilon = \max\{|\mathbf{I}_L - \mathbf{I}_R|, |\mathbf{I}_C - \mathbf{I}_R|\}. \quad (2)$$

З порівняння величин трьох функціоналів з'являються умови для створення процесу регулярного уточнення розв'язків за рахунок збільшення кількості апроксимацій у наближених розв'язках, поки не буде виконано рівність (1) з наперед заданою точністю.

При розробленні RVR-методу автором було розвинуто метод редукції тривимірних задач теорії оболонок за рахунок запропонованого алгоритму регулярного процесу уточнення моделей оболонки шляхом варіювання кількістю утримуваних членів у компонентах структур розв'язків для переміщень і напружень; створено програмні розробки для комп'ютера, що реалізують аналітично-числовий метод розв'язання крайових задач і процесу регулярного уточнення моделі оболонки. При цьому вибір конкретної моделі відповідає комбінації заданих величин $(l_i, l_3, l_{ij}, l_{i3}, l_{33})$, де l_i — кількість утримуваних членів у розкладі за координатою ζ в апроксимації поліномами Лежандра тангенціальних переміщень u_i ; l_3 — нормального переміщення u_3 ; l_{ij} — тангенціальних напружень σ_{ij} ; l_{i3} — поперечних дотичних напружень σ_{i3} і l_{33} — поперечного нормального напруження σ_{33} . При рівності $l_i = l_{ij} = l$ величина l характеризує порядок l -го наближення теорії оболонок.

Задавання параметрів $(l_i, l_3, l_{ij}, l_{i3}, l_{33})$ дає змогу автоматизувати процес уточнення моделі оболонки. У рамках RVR-методу з'явилася можливість переходу до різних двовимірних теорій оболонок і створення послідовної класифікації існуючих у літературі й нових уточнених теорій оболонок. Наприклад, варіанту (2,1,2,1,0) відповідає теорія оболонок типу Тимошенка — Рейснера; (2,2,2,2,1) — уточнена теорія оболонок Я. М. Григоренка, В. Т. Василенка і Н. Д. Панкратової, що враховує поперечні зсуви й обтиснення по товщині оболонки; (2,3,2,3,2) — теорія оболонок Рейснера — Нагді; (3,1,3,1,0) і (4,2,4,2,1) — прикладні теорії В. В. Пікуля; (3,2,3,2,1) — прикладна теорія оболонок В. Г. Піскунова і О. О. Расказова; (4,3,4,3,2) — прикладна теорія В. О. Родіонової, Б. Ф. Тітаєва і К. Ф. Черних.

Зазначимо, що поширене використання в різних галузях техніки сучасних матеріалів, зокрема неоднорідних за своєю структурою композиційних матеріалів [2], відкривають величезні можливості й перспективи для удосконалювання існуючих і розроблення нових пластинчатих та оболонкових пружних елементів конструкцій. Отже, одним з найперспективніших напрямів для застосування розробленого RVR-методу є розрахунки неоднорідних (композитних) оболонок у випадку відомих залежностей зміни пружних характеристик матеріалу від координат точок дослідного тіла.

Труднощі математичного й обчислювального характеру при розрахунках такого класу оболонок набагато більші, ніж для однорідних оболонок. Безпосередня

підстановка у варіаційне рівняння Рейснера цих залежностей та отриманих в [1, 8] структур розв'язків, використання запропонованої апостеріорної оцінки числових результатів дають можливість успішно досліджувати НДС неоднорідної оболонки.

Постановка задачі. Розглянемо оболонки з неоднорідною структурою за товщиною, коли неоднорідність матеріалу моделюється задаванням модулів пружності E_i і зсуву G_{ij} ($i \neq j = 1, 3$) довільними функціями поперечної координати ζ :

$$E_i = E_i^0 f_i(n, \delta); \quad G_{ij} = G_{ij}^0 f_{ij}(n, \delta, \zeta), \quad (3)$$

де E_i^0 , G_{ij}^0 — сталі величини; n , δ — параметри, що характеризують неоднорідність матеріалу оболонки.

Розгляд загальної залежності пружних характеристик від усіх трьох координат не вносить принципових ускладнень при використанні розробленого RVR-методу. У виконаних автором розрахунках функції (3) мають різний вигляд, зокрема, такий:

$$\left. \begin{aligned} f_i(\zeta) &= 1 - 0.25(1 + \zeta); & f_i(\zeta) &= 1 - 0.0625(1 + \zeta)^3; \\ f_i(\zeta) &= e^{0.25(1 + \zeta)^2 \ln 2}; & f_i(\zeta) &= \frac{e^{1 + \zeta}}{1 + (e^2 - 0.5)(1 + \zeta)}; \\ f_i(\zeta) &= 1 + \ln[1 + 0.5(e - 1)(1 + \zeta)]. \end{aligned} \right\} (4)$$

Функції (4) відповідають лінійному — s_1 , кубічному — s_3 , експоненціальному — e_2 , експоненціально-степеневому — es_1 , логарифмічному — ln_1 законам зміни модуля пружності E_i уздовж товщини оболонки.

Розглянемо сферичну оболонку під дією внутрішнього тиску q_0 [8] товщиною h і радіусом R . Результати розрахунків для нетонкої ($h/R = 0.2$) неоднорідної оболонки з двома однаковими полюсними отворами ілюстровані на рис. 1, де наведені вздовж меридіана розподіли переміщення $\mathcal{W}_i^0 = 10^3 u_i^0/h$ ($\zeta = 0$) і коефіцієнта концентрації напружень $k_\phi^+ = 2h\sigma_{22}^+/Rq_0$ ($\zeta = +1$) для залежностей з (4). Штрихові лінії відповідають однорідній оболонці з пружними характеристиками E_i^0 і G_{13}^0 .

Аналіз результатів свідчить про те, що на НДС неоднорідної оболонки істотно впливає на ступінь відмінності закону зміни пружних характеристик матеріалу від їхнього лінійного розподілу за товщиною оболонки. Це ілюстровано шляхом порівняння даних для оболонки із

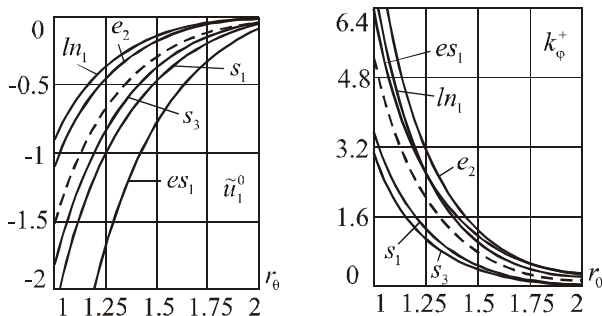


Рис. 1. Графіки \mathcal{W}_i^0 і k_ϕ^+

Значення шуканих величин

(l_i, l_{ij})	(2,2,2,2,1)		(4,2,4,2,1)	
I_L/I_R	0.93468 0.85362		0.93721 0.86500	
$10\bar{u}_1^-$	-0.925 -1.992	4.9% 14%	-0.921 -1.981	4.4% 13%
\bar{u}_1^0	-0.218 -0.383	0.5% 4.6%	-0.218 -0.364	0.5% 0.5%
\bar{u}_1^+	-0.333 -0.544	3.2% 5.4%	-0.337 -0.561	2.0% 2.4%
\bar{u}_3^-	0.669 1.212	1.2% 5.6%	0.665 1.191	0.6% 3.7%
\bar{u}_3^0	0.659 1.194	1.1% 5.2%	0.656 1.168	0.6% 2.9%
\bar{u}_3^+	0.650 1.166	1.6% 5.4%	0.646 1.145	0.9% 3.5%
$\bar{\sigma}_{11}^0$	0.542 0.734	16% 34%	0.489 0.593	4.3% 8%
$10\bar{\sigma}_{13}^0$	0.353 0.429	9.7% 30%	0.208 0.367	4.3% 24%
$\bar{\sigma}_{22}^-$	6.967 5.317	5.8% 51%	6.802 8.533	3.3% 22%
$\bar{\sigma}_{22}^0$	5.236 5.060	1.6% 22%	5.306 4.441	0.3% 7.4%
$\bar{\sigma}_{22}^+$	3.737 4.850	3.9% 20%	3.534 5.569	1.7% 8.3%

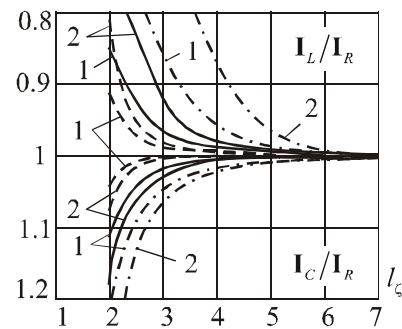


Рис. 2. Графіки I_L/I_R і I_C/I_R

залежностями s_1 і es_1 , які найбільш відрізняються одна від одної. Для двох різних моделей неоднорідної ортотропної оболонки в табл. 1 порівняно значення шуканих величин. У чисельниках таблиці — значення цих величин при лінійному — s_1 , у знаменниках — експоненціально-степеневому — es_1 законах. Відсотки встановлюють відхилення результатів від точних, отриманих з використанням теорії оболонок сьомого наближення.

У залежності від кількості апроксимацій за товщиною оболонки $l_\zeta = l_i = l_{ij}$ в структурах для переміщень і напружень на рис. 3 проілюстровані дані про співвідношення між функціоналами I_L/I_R і I_C/I_R .

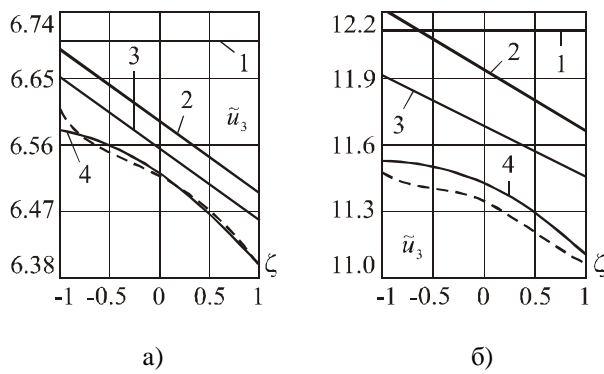


Рис. 3. Графіки прогину u_3 :
а — залежність s_1 ; б — залежність es_1

Штрихові й штрих-пунктирні лінії відповідають тонкостінній ($h/R = 0.01$) і товстостінній ($h/R = 0.5$) оболонкам, а суцільні — оболонкам середньої ($h/R = 0.2$) товщини. Цифри 1 і 2 біля кривих на рис. 2 відповідають лінійному — s_1 і нелінійному — es_1 законам зміни за товщиною пружних характеристик матеріалу оболонки. Графіки наочно показують зміну безрозмірної величини двоїстого зазору $\mathbb{Y}_e = (\mathbf{I}_C - \mathbf{I}_L) / \mathbf{I}_R$, що характеризує інтегральну оцінку збіжності розв'язків, від кількості апроксимацій l_ζ (одиниця по ординаті відповідає сідловій точці функціоналу Рейснера).

Для залежностей s_1 і es_1 на рис. 3 показані вздовж товщини оболонки графіки розподілу прогину $u_3 = 10^3 u_3 / h$ у перерізі $r_\theta = 1$. Цифри 1, 2, 3 і 4 відповідають результатам, які отримано за моделями: (2,1,2,1,0), (2,2,2,2,1), (4,2,4,2,1) і (4,3,4,3,2); штрихова лінія — модель теорії оболонок сьомого наближення.

Отже, для отримання вірогідних результатів при розрахунку НДС неоднорідної оболонки з нелінійним законом зміни пружних характеристик за товщиною варто використовувати модель уточненої теорії оболонок більш високого порядку наближення.

В усіх розрахунках отримані оцінки збіжності розв'язків, досліджено вплив на НДС оболонок ступеня анізотропії матеріалу, товщини, виду навантаження і граничних умов на поверхнях отворів.

Висновки. На основі теоретично і чисельно обґрунтованого RVR-методу [2] розв'язання в тривимірній постановці складних крайових задач отримано істотно нові наукові результати, що мають не тільки теоретичний, але й практичний інтерес для встановлення кількісних і якісних закономірностей впливу тривимірності НДС і неоднорідності матеріалу на концентрацію напружень і розподіл переміщень та напружень за товщиною анізотропних оболонок.

За допомогою RVR-методу виконано чималий обсяг числових досліджень збіжності отриманих результатів, задовільна відповідність яких з відомими аналітичними, числовими й експериментальними даними підтверджують можливість ефективного використання запропонованого методу при розв'язанні просторових крайових задач різної

складності для розрахунку неоднорідних анізотропних пластин і оболонок з отворами.

Практичну цінність RVR-методу підтверджено актами впровадження виконаних за допомогою розробленого методу прикладних розрахунків при проектуванні конкретних елементів техніки.

Новий аналітично-числовий метод розрахунку нетонких пружних оболонок з отворами може знайти ефективне застосування при проектуванні відповідальних пластинчатих та оболонкових пружних елементів конструкцій у різних галузях сучасної техніки. Одним з перспективних напрямів для застосування розробленого методу є розрахунки неоднорідних оболонок у випадку відомих залежностей зміни пружних характеристик матеріалу від координат точок дослідженого тіла.

Література

1. Сало В.А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями. — Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. — 216 с.
2. Карпов Я.С. Механика композиционных материалов. — Харьков: «ХАИ», 2001. — 122 с.
3. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. — М.: Наука, 1982. — 285 с.
4. Reissner E. On a variational theorem in elasticity // J. Math. and Phys., 1950. — Vol. 29, №2. — P. 90—95.
5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. — К.: Наук. думка, 1982. — 566 с.
6. Сало В.А. Доказательство достаточного признака сходимости метода Ритца для смешанного вариационного принципа Рейснера // Вестник Харьков. гос. политех. ун-та. — Харьков: ХГПУ. — 2000. — Вып. 95. — С. 70—75.
7. Сало В.А. О двусторонней оценке точности приближенных решений задач теории оболочек, полученных методом Ритца для неэкстремального функционала Рейснера // Доповіді НАН України. — 2003. — №1. — С. 53—57.
8. Сало В.А. Розрахунок напружено-деформованого стану ослаблених отворами пружних сферичних оболонок довільної товщини // машинознавство. — 2003. — №7 (73). — С. 34—38.

Отримана 17.01.07

V. Salo

Computation of stress-strained state non-uniform on thickness elastic shells weakened by holes

Academy of Internal Armies MIA of Ukraine, Kharkiv

Scientifically proved, universal and effective numerical-analytical method of computation three-dimensional stress-strained state statically loaded homogeneous and continuously non-uniform on thickness non-thin orthotropic shells with holes of any sizes and forms is suggested. Reissner's variational principle, R-functions theory, the common equations of the three-dimensional theory of an elasticity, I.N.Vekua's method and algorithm for two-sided estimation of exactitude of approached solutions of the mixed variational problems are used in the method. Efficiency of the method is shown on examples. Numerical calculations are carried out for orthotropic spherical shell with two holes.