УДК 539.3

М. Моргунов

Доцент, канд. техн. наук,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
м. Київ

В. Острик

Д-р фіз.-мат. наук,
Інститут прикладної фізики
НАН України,
м. Суми

ЗГИН ПРУЖНОЇ СМУГИ ШТАМПОМ ЗА УМОВИ КОНТАКТУ З ВІДРИВОМ

Розглянуто задачу теорії пружності про контактну взаємодію штампа і пружної смуги, яка спирається на дві опори, з порушенням контакту в середній частині підошви штампа. На підставі методе Вінера – Гопфа інтегральне рівняння задачі зведено до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Визначено розмір зони відриву межі смуги від штампа і розподіл контактних напружень.

контакт, напруження, штамп, пружна смуга

Контакт з відривом є особливим випадком контактної взаємодії пружних тіл, коли область контакту в процесі навантаження зменшується [2]. Контакт з відривом пружної смуги від жорсткої або пружної основи при дії нормальної зосередженої сили на вільну грань пружної смуги досліджено в працях [3, 6] методом інтегральних рівнянь.

Задача про згин пружної смуги, яка опирається на дві опори, жорстким круглим диском за умови безвідривного контакту розглянуто в [5]. Показано, що коли відношення розміру області контакту до ширини смуги перевищує 5,4, межа смуги відривається від межі диска у середній частині області контакту.

Нижче з використанням методу Вінера – Гопфа і підходу праці [1] наведено аналітичний розв’язок задачі про відривний контакт штампа з прямолінійною основою і пружної смуги.

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглянемо пружну смугу $-\infty < x < \infty$, $-h \le y \le h$, яка опирається нижньою гранню $y = -h$ на дві точкові опори $x = -L$, $x = L + l$, а у верхню її грань $y = h$ втискається нормальною силою *P* штамп з прямолінійною основою $0 \le x \le l$ (рис. 1). Припускаємо, що згин смуги веде до відриву підошви штампа в середній її частині $l_1 < x < l - l_1$; на інших частинах $0 \le x \le l_1$, $l - l_1 \le x \le l$ підошви штамп залишається притиснутим до верхньої грані смуги. Сили тертя в області контакту не враховуємо.

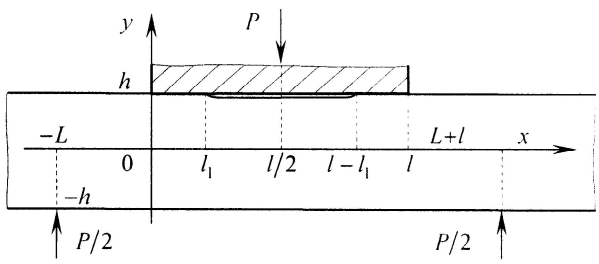

Рис. 1

Крайові умови задачі — такі:

$$u_y\big|_{y=h} = 0 \quad (0 \le x \le l_1,\ l - l_1 \le x \le l),$$

$$\sigma_y\big|_{y=h} = 0 \quad (x < 0,\ l_1 < x < l - l_1,\ x > l),$$

$$\sigma_y\big|_{y=-h} = -\frac{P}{2}\left[\delta(x+L) + \delta(x-L-l)\right],$$

$$\tau_{yx}\big|_{y=\pm h} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \tag{1}$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

Інтегральне рівняння задачі. Для побудови інтегрального рівняння розглянемо допоміжну задачу для смуги

$$u_y\Big|_{y=h}=s(x)\,,\quad \frac{1}{2G}\sigma_y\Big|_{y=-h}=p(x)\,,$$

$$\tau_{yx}\Big|_{y=\pm h}=0 \quad (-\infty<x<\infty). \tag{2}$$

де G – модуль зсуву; $s(x)$ і $p(x)$ – задані функції.

Розв'язок крайової задачі з умовами (2) знаходимо за допомогою інтегрального перетворення Фур'є за координатою x. За цим розв'язком

$$\frac{\sigma_y}{2G}\Bigg|_{y=h}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\mu\lambda(2\mu h)}{1-\nu}\tilde{s}(\mu)+2\lambda_1(2\mu h)\tilde{p}(\mu)}{\Delta(2\mu h)}e^{-i\mu x}d\mu\,,$$

$$\tilde{p}(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}p(x)e^{i\mu x}dx\,,\quad \tilde{s}(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s(x)e^{i\mu x}dx\,,$$

$$\lambda(\tau)=\mathrm{sh}^2\tau-\tau^2\,,\quad \lambda_1(\tau)=\mathrm{sh}\tau+\tau\mathrm{ch}\tau\,,$$

$$\Delta(\tau)=\mathrm{sh}2\tau+2\tau\,. \tag{3}$$

де ν – коефіцієнт Пуасона.

Згідно з умовами (1) покладемо:

$$p(x)=-\frac{P}{4G}\left[\delta(x+L)+\delta(x-L-l)\right],$$

$$s'(x)=A\mathrm{sign}x+s'_*(x)\quad (x<0\,,\ x>l\,),$$

$$A=s'(\infty)\,,\quad s(x)=0\quad (0\le x\le l_1\,,\ l-l_1\le x\le l\,), \tag{4}$$

де A – тангенс кута повороту смуги на нескінченності, $s(x)$ ($x<0$, $l_1<x<l-l_1$, $x>l$) – невідома функція нормальних переміщень точок вільної частини верхньої грані смуги. Тоді

$$\tilde{p}(\mu)=-\frac{P}{8\pi G}\left(e^{-i\mu L}+e^{i\mu(L+l)}\right), \tag{5}$$

$$\tilde{s}(\mu)=\frac{i}{2\pi\mu}\left[\frac{i}{\mu}A\left(1+e^{i\mu l}\right)+\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{l}^{\infty}\right)s'_*(r)e^{i\mu r}dr+\int_{l_1}^{l-l_1}s'(r)e^{i\mu r}dr\right].$$

З урахуванням (5) підставимо вираз для нормальних напружень з (3) у другу крайову умову (1). Виконуючи заміни

$$\mu=\frac{\tau}{2h}\,,\ x=2h\xi\,,\ r=2h\eta\,;\ a=\frac{l}{2h}\,,\ c=\frac{l_1}{2h}\,,\ \xi_0=\frac{L}{2h}\,, \tag{6}$$

відносно нової невідомої функції

$$\varphi(\eta)=\begin{cases} s'_*(2h\eta), & \eta<0,\ \eta>a,\\ s'(2h\eta), & c\le\eta\le a-c\end{cases} \tag{7}$$

отримуємо інтегральне рівняння

$$\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{c}^{a-c}+\int_{a}^{\infty}\right)\varphi(\eta)k(\xi-\eta)d\eta=f(\xi)$$

$$(-\infty<\xi<0\,,\ c<\xi<a-c\,,\ a<\xi<\infty\,), \tag{8}$$

$$k(\xi-\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau)e^{-i\tau(\xi-\eta)}d\tau\,,\quad K(\tau)=\frac{\lambda(\tau)}{\Delta(\tau)}\,,$$

$$f(\xi)=\frac{(1-\nu)P}{4Gh}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_1(\tau)}{\Delta(\tau)}\left(e^{-i\tau\xi_0}+e^{i\tau(\xi_0+a)}\right)e^{-i\tau\xi}d\tau+$$

$$+\frac{A}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(\tau)}{\tau}\left(1+e^{i\tau a}\right)e^{-i\tau\xi}d\tau\,.$$

Розв'язання інтегрального рівняння. Інтегральне рівняння (8) розв'яжемо зведенням його до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Приймаючи, що $\varphi(\eta)=0$ для $0<\eta<a$, розповсюдимо інтегральне рівняння (8) на всю числову вісь і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є відносно невідомих функцій:

$$\Phi_1^+(z)=\frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty}\varphi(\xi)e^{iz\xi}d\xi\,,\ \Phi_1^-(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\varphi(\xi)e^{iz\xi}d\xi\,,$$

$$\Phi_2^+(z)=\frac{e^{-izc}}{\sqrt{2\pi}}\int_c^{a-c}\varphi(\xi)e^{iz\xi}d\xi\,,\ \Phi_2^-(z)=\frac{e^{-iz(a-c)}}{\sqrt{2\pi}}\int_c^{a-c}\varphi(\xi)e^{iz\xi}d\xi\,,$$

$$\Psi_1^+(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{c}e^{iz\xi}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta=e^{izc}\Psi_1^-(z)\,,$$

$$\Psi_2^+(z)=\frac{e^{-iz(a-c)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{a-c}^{a}e^{iz\xi}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta\,,$$

$$\Psi_2^-(z)=\frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}}\int_{a-c}^{a}e^{iz\xi}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta\,, \tag{9}$$

аналітичних відповідно у півплощинах $\mathrm{Im}z>c^+$, $\mathrm{Im}z<c^-$ ($c^+<0,\ c^->0$) комплексної площини, приходимо до системи функціональних рівнянь Вінера – Гопфа [4]:

$$K(z)\left[e^{iza}\Phi_1^+(z)+e^{izc}\Phi_2^+(z)+\Phi_1^-(z)\right]-$$

$$-\Psi_1^+(z)-e^{iz(a-c)}\Psi_2^+(z)=F(z)\,,$$

$$\Phi_2^+(z)=e^{iz(a-2c)}\Phi_2^-(z)\,,\quad \Psi_{1,2}^+(z)=e^{izc}\Psi_{1,2}^-(z)\,, \tag{10}$$

права частина якої має вигляд:

$$F(z)=e^{iza}F_1^+(z)+F_1^-(z)+e^{izc}F_2^+(z)\,,\ F_1^-(z)\equiv F_1^+(-z)\,,$$

$$F_2^+(z)=F_{21}^+(z)+e^{iz(a-2c)}F_{22}^+(z)\,,\ F_{22}^+(z)\equiv F_{21}^+(-z)\,,$$

$$F_1^+(z)=\frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_1(is_k)}{\Delta'(is_k)}\left(\frac{e^{-s_k(a+\xi_0)}}{s_k-iz}-\frac{e^{-s_k\xi_0}}{s_k+iz}\right)+\right.$$

$$\left.+e^{iz\xi_0}\frac{\lambda_1(z)}{i\Delta(z)}\right]+\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(is_k)}{is_k\Delta'(is_k)}\frac{e^{-s_ka}+1}{s_k-iz}\,,$$

$$F_{21}^+(z)=\frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_1(is_k)}{\Delta'(is_k)}\left(\frac{e^{-s_k(c+\xi_0)}}{s_k-iz}-\frac{e^{-s_k(a-c+\xi_0)}}{s_k+iz}\right)+$$

$$+\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(is_k)}{is_k\Delta'(is_k)}\left(\frac{e^{-s_k c}}{s_k-iz}-\frac{e^{-s_k(a-c)}}{s_k+iz}\right), \qquad (11)$$

де s_k ($k=1, 2, ...$) – корені рівняння $\Delta(is)=0$ з півплощини $\mathrm{Re}\, s>0$.

Крім цього, умови симетрії задачі відносно прямої $x=l/2$ приводять до тотожностей:

$$\varphi(a-\xi)\equiv-\varphi(\xi)\,,$$

$$\Phi_1^-(-z)\equiv-\Phi_1^+(z)\,,\quad \Phi_2^-(-z)\equiv-\Phi_2^+(z)\,,$$

$$\Psi_1^-(-z)\equiv\Psi_2^+(z)\,,\quad \Psi_2^-(-z)\equiv\Psi_1^+(z)\,. \qquad (12)$$

Коефіцієнт $K(z)$ системи функціональних рівнянь (10) факторизуємо у нескінченних добутках:

$$K(z)=\frac{z^3}{12}K^+(z)K^-(z)\,,$$

$$K^+(z)\equiv K^-(-z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{iz}{\zeta_n}\right)\left(1-\frac{iz}{s_n}\right)^{-1}, \qquad (13)$$

де $K^{\pm}(z)$ – відмінні від нуля функції, аналітичні у верхній ($\mathrm{Im}\, z>c^+$) та нижній ($\mathrm{Im}\, z<c^-$) півплощинах відповідно, ζ_n ($n=1, 2, ...$) – корені рівняння $\lambda(is)=0$ з півплощини $\mathrm{Re}\, s>0$.

З урахуванням (13) з першого рівняння (10) маємо

$$\frac{z^3}{12}K^-(z)\left[e^{iza}\Phi_1^+(z)+e^{izc}\Phi_2^+(z)+\Phi_1^-(z)\right]-$$

$$-\frac{\Psi_1^+(z)+e^{iz(a-c)}\Psi_2^+(z)}{K^+(z)}=\frac{e^{iza}F_1^+(z)+e^{izc}F_2^+(z)}{K^+(z)}+\frac{F_1^-(z)}{K^+(z)},$$

$$\frac{z^3}{12}K^+(z)\left[e^{iz(a-c)}\Phi_1^+(z)+\Phi_2^+(z)+e^{-izc}\Phi_1^-(z)\right]-$$

$$-\frac{\Psi_1^-(z)}{K^-(z)}-e^{iz(a-c)}\,\frac{\Psi_2^+(z)e^{-izc}+F_1^+(z)}{K^-(z)}=$$

$$=e^{-izc}\,\frac{F_1^-(z)}{K^-(z)}+\frac{F_2^+(z)}{K^-(z)}\,. \qquad (14)$$

Доданки з рівнянь (14), які не є аналітичними функціями у верхній або нижній півплощині, подамо у вигляді різниць аналітичних у верхній і нижній півплощинах функцій:

$$\frac{z^3}{12}K^-(z)\left[e^{iza}\Phi_1^+(z)+e^{izc}\Phi_2^+(z)\right]=\chi^+(z)-\chi^-(z)\,,$$

$$-\frac{z^3}{12}e^{-izc}K^+(z)\Phi_1^-(z)=\chi_1^+(z)-\chi_1^-(z)\,,$$

$$e^{iz(a-c)}\,\frac{\Psi_2^+(z)e^{-izc}+F_1^+(z)}{K^-(z)}=\chi_2^+(z)-\chi_2^-(z)\,,$$

$$\frac{F_1^-(z)}{K^+(z)}=f^+(z)-f^-(z)\,,\quad -\frac{F_2^+(z)}{K^-(z)}=f_1^+(z)-f_1^-(z)\,. \qquad (15)$$

Розвиваючи відповідні інтеграли типу Коші [4] в ряд за теорією лишків, отримуємо:

$$\chi^-(z)=-i\sum_{k=1}^{\infty}s_k^3\left[\alpha_k\Phi_1^+(is_k)+\beta_k\Phi_2^+(is_k)\right]\frac{1}{s_k+iz}\,,$$

$$\chi_1^+(z)=i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k^3\beta_k\Phi_1^-(-is_k)}{s_k-iz}\,,$$

$$\chi_2^-(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k\gamma_k\left[\Psi_2^+(i\zeta_k)+F_1^+(i\zeta_k)e^{-\zeta_k c}\right]\frac{1}{\zeta_k+iz}\,,$$

$$f^-(z)=\frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta_k^3\lambda_1(i\zeta_k)}{12i\lambda'(i\zeta_k)}K^-(-i\zeta_k)\frac{e^{-\zeta_k\xi_0}}{\zeta_k-iz}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_1(is_k)}{\Delta'(is_k)K^+(is_k)}\frac{e^{-s_k(a+\xi_0)}}{s_k+iz}+\frac{i\lambda_1(z)}{\Delta(z)K^+(z)}e^{-iz\xi_0}\right]+$$

$$+\frac{iA}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{z^2}{12}K^-(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k^2\alpha_k}{s_k+iz}\right),$$

$$f_1^-(z)=\frac{F_{21}^+(z)}{K^-(z)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{is_k^3\alpha_k A_k}{s_k-iz}+\frac{\zeta_k\beta_k F_{21}^+(-i\zeta_k)}{\zeta_k+iz}\right),$$

$$\alpha_k=\frac{\lambda(is_k)e^{-s_k a}}{s_k^3\Delta'(is_k)K^+(is_k)}\,,\quad \beta_k=\alpha_k e^{s_k(a-c)}\,,$$

$$\gamma_k=\frac{\zeta_k^2\Delta(i\zeta_k)}{12\lambda'(i\zeta_k)}K^+(i\zeta_k)e^{-\zeta_k(a-2c)}\,,$$

$$A_k=i\frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\frac{\lambda_1(is_k)}{\lambda(is_k)}e^{-s_k\xi_0}+\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{s_k}\quad(k=1, 2, ...). \qquad (16)$$

У результаті рівняння (14) набувають вигляду:

$$\frac{1}{K^+(z)}\left[\Psi_1^+(z)+e^{iz(a-c)}\Psi_2^+(z)+e^{iza}F_1^+(z)+e^{izc}F_2^+(z)\right]-$$

$$-\chi^+(z)+f^+(z)=\frac{z^3}{12}K^-(z)\Phi_1^-(z)-\chi^-(z)+f^-(z)\,.$$

$$\frac{z^3}{12}K^+(z)\left[e^{iz(a-c)}\Phi_1^+(z)+\Phi_2^+(z)\right]-\chi_1^+(z)-\chi_2^+(z)+f_1^+(z)=$$

$$=\frac{\Psi_1^-(z)}{K^-(z)}+e^{-izc}\,\frac{F_1^-(z)}{K^-(z)}-\chi_1^-(z)-\chi_2^-(z)+f_1^-(z)\,. \qquad (17)$$

Обидві частини рівняння (17) аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і є довільною цілою функцією. З умов на нескінченності:

$$K^{\pm}(z)=O(z^{-3/2})\,,\quad \Phi_1^-(z)=o(1)\,,\quad \Phi_2^+(z)=o(z^{-1})\,,$$

$$\chi^-(z)=O(z^{-1})\,,\quad f^-(z)=O(z^{-1})\,,$$

$$\chi_{1,2}^+(z)=O(z^{-1})\,,\quad f_1^+(z)=O(z^{-1})\,,\ |z|\to\infty \qquad (18)$$

випливає, що обидві частини першого рівняння (17) є довільна лінійна функція C_1z+C_2 , а другого – довільна стала C_3 .

Отже, отримуємо:

$$\Psi_1^+(z)+e^{iz(a-c)}\Psi_2^+(z)=K^+(z)\Big[\chi^+(z)-f^+(z)+$$

$$+C_1z+C_2\Big]-e^{iza}F_1^+(z)-e^{izc}F_2^+(z)\,,$$

$$\Phi_1^-(z)=\frac{12}{z^3K^-(z)}\Big[\chi^-(z)-f^-(z)+C_1z+C_2\Big],$$

$$\Phi_2^+(z)+e^{iz(a-c)}\Phi_1^+(z)=\frac{12}{z^3K^+(z)}\Big[\chi_1^+(z)+\chi_2^+(z)-f_1^+(z)+C_3\Big],$$

$$\Psi_1^-(z)=K^-(z)\Big[\chi_1^-(z)+\chi_2^-(z)-f_1^-(z)+C_3\Big]-e^{-izc}F_1^-(z)\,. \quad (19)$$

Вимагаючи аналітичність функцій $\Phi_1^-(z)$ і $\Phi_2^+(z)+e^{iz(a-c)}\Phi_1^+(z)$ у точці $z=0$, знаходимо

$$C_2=f^-(0)-\chi^-(0)\,,\quad C_1=\frac{d}{dz}\Big[f^-(z)-\chi^-(z)\Big]\Big|_{z=0}=0\,,$$

$$C_3=-\chi_1^+(0)+\chi_2^+(0) \quad (20)$$

і приходимо до додаткових умов:

$$\frac{d^2}{dz^2}\Big[f^-(z)-\chi^-(z)\Big]\Big|_{z=0}=0\,,$$

$$\frac{d}{dz}\Big[\chi_1^+(z)+\chi_2^+(z)-f_1^+(z)\Big]\Big|_{z=0}=0\,,$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\Big[\chi_1^+(z)+\chi_2^+(z)-f_1^+(z)\Big]\Big|_{z=0}=0\,. \quad (21)$$

З урахуванням (20), (21) вирази для функцій $\Phi_1^-(z)$, $\Phi_2^+(z)$ набувають вигляду:

$$\Phi_1^-(z)=\frac{12}{K^-(z)}\Big[\tilde\chi^-(z)-\tilde f^-(z)\Big],\Phi_2^+(z)=\frac{12}{z^3}e^{iz(a/2-c)}\Phi_*(z)\,,$$

$$\tilde\chi^-(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k\Phi_1^+(is_k)+\beta_k\Phi_2^+(is_k)}{s_k+iz}\,,$$

$$\tilde f^-(z)=\frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\Bigg[-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_1(i\zeta_k)}{12\lambda'(i\zeta_k)}K^-(-i\zeta_k)\frac{e^{-\zeta_k\xi_0}}{\zeta_k-iz}-$$

$$-\frac{1}{2(iz)^3}-\frac{b_1-\xi_0}{2(iz)^2}-\Big(2b_2-2b_1\xi_0+\xi_0^2\Big)\frac{1}{4iz}+$$

$$+\frac{i\lambda_1(z)}{12\lambda(z)}K^-(z)e^{-iz\xi_0}\Bigg]+\frac{iA}{\sqrt{2\pi}}\frac{K^-(z)-1}{12z}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_kA_k}{s_k+iz}\,,$$

$$\Phi_*(z)=e^{-iz(a/2-c)}\frac{\chi_1^+(z)+\chi_2^+(z)-f_1^+(z)-\chi_1^+(0)-\chi_2^+(0)+f_1^+(0)}{K^+(z)}+$$

$$+e^{iz(a/2-c)}\frac{\chi_1^+(-z)+\chi_2^+(-z)-f_1^+(-z)-\chi_1^+(0)-\chi_2^+(0)+f_1^+(0)}{K^-(z)}+$$

$$+e^{-iz(a/2-c)}\frac{F_2^+(z)}{K^+(z)K^-(z)}-\frac{F_2^+(0)}{2}\left(\frac{e^{-iz(a/2-c)}}{K^+(z)}+\frac{e^{iz(a/2-c)}}{K^-(z)}\right), \quad (22)$$

де b_1, b_2 – коефіцієнти розвинення

$$1/K^+(z)=1+b_1iz+b_2(iz)^2+O\Big((iz)^2\Big)\,,\ z\to 0\,,$$

$$b_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta_n}-\frac{1}{s_n}\right),\ \ b_2=\frac{1}{2}\left(b_1^2-\frac{1}{5}\right). \quad (23)$$

Завдяки парності функції $\Phi_*(z)$ друга додаткова умова (21) виконується автоматично, а третя умова (21) перетворюється до вигляду

$$\Phi_*''(z)=0\,. \quad (24)$$

Поклавши у першій рівності (22) $z=-is_n$, у другій – $z=is_n$, а в останній рівності (19) – $z=-i\zeta_n$ ($n=1,2,...$) з урахуванням тотожностей (12) отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь:

$$x_n+\delta_{1n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_kx_k+\beta_ky_k}{s_k+s_n}=g_n\,,$$

$$y_n+x_ne^{-s_n(a-c)}+\delta_{2n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_kx_k}{s_k+s_n}+\frac{\gamma_kz_k}{\zeta_k-s_n}\right)=0\,,$$

$$z_n+\delta_{3n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_kx_k}{s_k-\zeta_n}+\frac{\gamma_kz_k}{\zeta_k-\zeta_n}\right)=0 \quad (n=1,\,2,\,...) \quad (25)$$

відносно невідомих

$$x_k=\Phi_1^+(is_k)+A_k\,,\quad y_k=\Phi_2^+(is_k)\,,$$

$$z_k=i\Big(\Psi_2^+(i\zeta_k)+F_1^+(i\zeta_k)e^{-\zeta_kc}+F_{21}^+(-i\zeta_k)\Big)\ (k=1,\,2,\,...), \quad (26)$$

у якій

$$\delta_{1n}=\frac{12}{K^+(is_n)}\,,\quad \delta_{2n}=\frac{\delta_{1n}}{s_n^2}\,,\quad \delta_{3n}=-\zeta_nK^+(i\zeta_n)\,,$$

$$g_n=-\delta_{1n}\Bigg[\frac{(1-\nu)P}{8Gh\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{s_n^3}+\frac{b_1-\xi_0}{s_n^2}+\Big(2b_2-2b_1\xi_0+\xi_0^2\Big)\frac{1}{2s_n}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_1(i\zeta_k)K^+(i\zeta_k)e^{-\zeta_k\xi_0}}{6\lambda'(i\zeta_k)(\zeta_k-s_n)}-\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{12s_n}\right]. \quad (27)$$

Регулярна нескінченна система алгебричних рівнянь (25) має експоненціально зникаючі за k коефіцієнти ($s_k\sim\pi k/2$, $k\to\infty$) та належить до типу Пуанкаре – Коха. Тому її розв'язок ефективно знаходиться методом редукції.

Подавши невідомі x_k, y_k, z_k у вигляді

$$x_k=\frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\tilde x_k+\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\hat x_k\,,\quad y_k=\frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\tilde y_k+\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\hat y_k\,,$$

$$z_k=\frac{(1-\nu)P}{4Gh\sqrt{2\pi}}\tilde z_k+\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\hat z_k \quad (k=1,\,2,\,...), \quad (28)$$

з умови (21) знаходимо

$$A=\frac{(1-\nu)P}{4Gh}\left[\frac{1}{4}\left(2b_2-2b_1\xi_0+\xi_0^2\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\tilde{x}_k+\beta_k\tilde{y}_k-\frac{\lambda_1(i\zeta_k)}{12\lambda'(i\zeta_k)}K^{+}(i\zeta_k)e^{-\zeta_k\xi_0}\right)\right]\times$$

$$\times\left(\frac{1}{12}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\hat{x}_k+\beta_k\hat{y}_k\right)\right)^{-1}. \qquad (29)$$

Умова (24), перетворена до вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{2\alpha_k x_k-\frac{2\gamma_k}{\zeta_k^2}-(a-2c-2b_1)\left(s_k\alpha_k x_k+\frac{\gamma_k}{\zeta_k}z_k\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left[(a-2c)^2-4b_1(a-2c-b_1)\right]\left[s_k^2\alpha_k x_k-\gamma_k z_k-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\lambda(is_k)A_k}{s_k\Delta'(is_k)}\left(e^{-s_kc}-e^{-s_k(a-c)}\right)\right]\right\}, \qquad (30)$$

служить для визначення параметра $c=l_1/(2h)$.

Контактні напруження. Враховуючи співвідношення (4) – (9), вираз із (3) для нормальних напружень на верхній грані смуги подамо у вигляді

$$\left.\frac{\sigma_y}{2G}\right|_{y=h}=-\frac{i}{1-\nu}\left[f(\xi)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau)\left(\Phi_1^{-}(\tau)+\Phi_2^{+}(\tau)e^{i\tau c}+\Phi_1^{+}(\tau)e^{i\tau a}\right)e^{-i\tau\xi}d\tau\right]. \quad (31)$$

Застосовуючи теорію лишків, з (31) отримуємо нормальні напруження в області контакту

$$\left.\frac{\sigma_y}{2G}\right|_{y=h}=-\frac{\sqrt{2\pi}}{1-\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(is_k)}{\Delta'(is_k)}\left[x_k\left(e^{-s_k\xi}+e^{-s_k(a-\xi)}\right)+y_k e^{-s_k(c-\xi)}\right],$$

$$\xi=x/(2h) \quad (0<x<l_1). \qquad (32)$$

На рис. 2 показано розподіл безрозмірних контактних напружень $\bar{\sigma}=(2Gl_1/P)\sigma_y\big|_{y=h}$ для відносної ширини

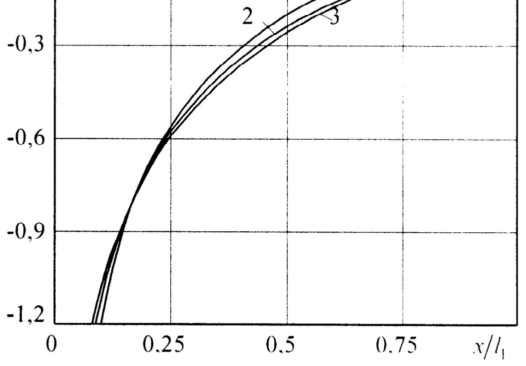

Рис. 2

Таблиця 1

Результати розрахунку

$\xi_0+a/2$	1	2	5	10	15	20
$l_*/(2h)$	1,191	0,689	0.418	0.293	0.239	0.207

штампа $a=l/(2h)=1{,}191$; 1,5; 1,8; (криві 1 — 3) при відстані між опорами $2L+l=4h$. При цьому відносний розмір кожної з двох областей контакту $c=l_1/(2h)=a/2$; 0,610; 0,739. Значення $l_*=1{,}191\cdot 2h$ є найменшим критичним значенням ширини штампа, при якому контакт з відривом переходить у безвідривний контакт (якщо ширина штампа $l\le l_*$, спостерігається безвідривний контакт штампа і пружної смуги). Значення $l_*/(2h)$ для різних відносних піввідстаней між опорами наведено у табл. 1.

Висновки. З використанням методу Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв'язок контактної задачі про згин пружної смуги, яка спирається на дві точкові опори, штампом з прямолінійною основою. Знайдено розподіл контактних напружень і з'ясовано умови відриву підошви штампа від межі пружної смуги.

Література

1. *Антипов Ю. А.* Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. - 1987. - № 7. - С. 29-33.

2. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. - М.: Мир, 1989. - 510 с.

3. *Кир Л. М., Дандерс Дж., Цзай К. Ц.* Контактная зада-ча для слоя, лежащего на полупространстве // Прикл. механика. Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. - М.: Мир, 1972. - **39**, №4. - С. 260-266.

4. *Нобл Б.* Метод Винера - Хопфа. - М.: Изд-во иностр. лит., 1962. - 280 с.

5. *Улітко А. Ф., Моргунов М. О.* Контакт жорсткого диску з тонкою пружною смугою при згині // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2001. – Вип. 4. – С. 164-173.

6. *Ratwani M., Erdogan F.* On the plane contact problem for frictionless elastic layer // Internat. J. Solids and Structures. - 1973. - **43**. - P. 921.

Отримана 19.05.09

M. Morgunov[1], V. Ostrik[2]

The bending of an elastic strip by stamp in the case of tearing of the bodies

[1]Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv;
[2]Institute for Applead Physics of National Academy of Sciences of Ukraine, Sumy

The problem of elasticity concerning contact interaction between a flat stamp and an elastic strip, which is holding by two bearings and tearing off from central part of stamp sole, has been investigated. Based on Wiener-Hopf method the constructed integral equation for this problem has been transformed to infinite system of the algebraic equations. The relative dimension of zone where the strip is tearing off from stamp and the distribution of contact stresses depending of relative width of stamp are found.