УДК 539.3

Г. Кіт

Член-кор. НАН України,
професор, д-р фіз.-мат. наук

О. Сушко

Канд. фіз.-мат. наук

Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Львів

РОЗПОДІЛ ТЕМПЕРАТУРИ ТА НАПРУЖЕНЬ У ТІЛІ ПРИ ТЕПЛОВИДІЛЕННІ У КРУГОВИХ ДИСКОВИХ ОБЛАСТЯХ

Äîñë³äæåí³ òåìïåðàòóðíå ïîëå ³ íàïðóæåííÿ ó ò³ë³, çóìîâëåí³ òåïëîâèä³ëåííÿì ó äèñêîâèõ îáëàñòÿõ, ðîçòàøîâàíèõ ó ïëîùèí³ ç öåíòðàìè íà îäí³é ïðÿì³é àáî ñï³ââ³ñíî â ïàðàëåëüíèõ ïëîùèíàõ. Äîñë³äæåíî âïëèâ â³ääàë³ ì³æ äâîìà îäíàêîâèìè ìîíåòîïîä³áíèìè àáî ñôåðî¿äíèìè îáëàñòÿìè íà ðîçïîä³ë òåìïåðàòóðè òà íàïðóæåíü. Ó âèïàäêó äîâ³ëüíî¿ ê³ëüêîñò³ ïàðàëåëüíèõ îáëàñòåé îòðèìàíî íà îñ³ ñèìåòð³¿ ïðîñò³ àíàë³òè÷í³ çàëåæíîñò³ äëÿ òåìïåðàòóðè é íîðìàëüíèõ íàïðóæåíü. Âñòàíîâëåíî, ùî â îêîë³ îáëàñòåé òåïëîâèä³ëåííÿ íàïðóæåííÿ º ñòèñêàëüíèìè.

дискове включення, тепловиділення, температурне поле, термонапруження

Для практики важливе значення мають дослідження термопружного стану елементів, які виділяють тепло [1, 2]. Розподіл температури й напружень у тілі з включеннями, які виділяють тепло, залежить від багатьох факторів, зокрема від фізико-механічних і теплофізичних характеристик матеріалу включення і матриці, а також від інтенсивності тепловиділення включень. Якщо включення розташовані нерівномірно і близько одне від одного, то зумовлені ними температурні поля і напруження взаємодіють, внаслідок чого виникають труднощі при аналізі напруженого стану. Ці труднощі ще збільшуються через велику кількість параметрів, які потрібно враховувати при розрахунках: відношення модулів пружності, коефіцієнтів Пуасона, теплопровідності та лінійного температурного розширення матеріалів, густину джерел тепла, геометричні характеристики включень і їх розташування. В той же час, у випадку однакових характеристик матеріалу включень і матриці, при врахуванні тільки тепловиділення включень можна отримати точний розв'язок задачі і зробити певні висновки щодо розподілу температури та напружень у тілі.

При дослідженні напруженого стану тіла з теплоактивними тріщинами (на яких задані температура або тепловий потік) проміжним етапом є визначення напружень у місці розташування тріщин, а наступним — звільнення їхніх поверхонь від цих напружень.

Задача про визначення температурного поля і напружень у півбезмежному тілі, зумовлених тепловиділенням у перпендикулярній до його межі дисковій області, розглянута у праці [3]. Досліджено також термопружний стан півпростору з круговою або еліптичною теплоактивною тріщиною, перпендикулярною [3 — 6] і паралельною [7] до його межі, та простору з двома компланарними або паралельними круговими тріщинами [8].

Мета цієї статті — визначення температурного поля і напруженого стану тіла при тепловиділенні у дискових областях.

Визначення температурного поля. Розглянемо пружне ізотропне тіло, в якому в дискових областях Ω_k ($k = 0,1,...,n$) радіусів a_k і товщини $2d_k << a_k$ відбувається тепловиділення зі сталою кількістю тепла q_k з одиниці об'єму. Надалі такі області будемо називати тепловиділювальними включеннями. З огляду на малу товщину включень знесемо граничні умови з їх поверхонь на серединні області S_k. Надалі розглядатимемо паралельні включення, центри яких лежать співвісно в

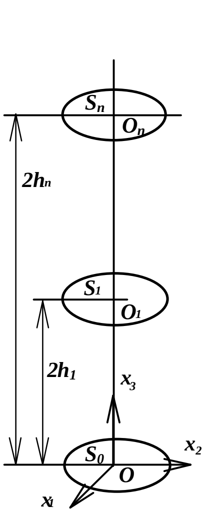

Рис. 1

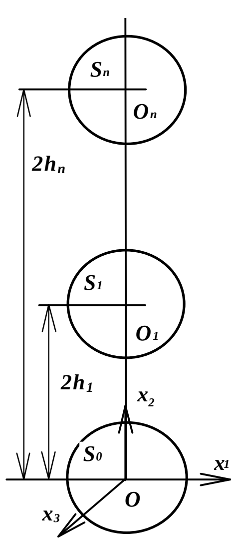

Рис. 2

паралельних площинах (рис. 1) або компланарні з центрами в одній площині на прямій OO_n (рис. 2). Віддаль між точками O та O_k позначимо через $2h_k$ ($k = 1,...,n$).

З областю S_0 зв'яжемо систему декартових координат $Ox_1x_2x_3$ так, що з прямою OO_n збігається вісь Ox_3 (рис. 1) або Ox_2 (рис. 2). Зауважимо, що область S_0 лежить у площині $x_3 = 0$.

Зумовлену тепловиділенням стаціонарну температуру подамо через ньютонівський потенціал простого шару у вигляді [9]

$$T_i(x^*) = \frac{1}{4\pi\lambda}\left\{\iint\limits_{S_0}\frac{w_0(\xi)}{|x^* - \xi|}d_\xi S + \sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{S_k}\frac{w_k(\xi)}{R_{ik}(x^*,\xi)}d_\xi S\right\},$$

$$i{=}1{,}2,\ \xi = (\xi_1, \xi_2),\ x^* = x^*(x_1, x_2, x_3), \qquad (1)$$

де λ — коефіцієнт теплопровідності; $w_k(\xi)$ — інтенсивність теплових джерел в областях S_k; $\left|x^* - \xi\right| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}$;

$R_{1k}(x^*,\xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - 2h_k)^2}$ — для паралельних областей (рис. 1), $R_{2k}(x^*,\xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2 - 2h_k)^2 + x_3^2}$ — для областей, що лежать в одній площині (рис. 2).

Задаючи різні вирази для функцій $w_k(\xi)$, за формулою (1) визначаємо температуру в довільній точці тіла. Перший інтеграл в (1) описує температурне поле в тілі з одним тепловиділювальним включенням. Зокрема, в області S_0 маємо

$$T_0(x) = \frac{1}{4\pi\lambda}\iint\limits_{S_0}\frac{w_0(\xi)}{|x - \xi|}d_\xi S, \qquad (2)$$

$$|x - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}.$$

Цей інтеграл є слабосингулярний, тому його потрібно визначати аналітично.

У випадку сталого тепловиділення, якщо область Ω_0 є тонким диском радіуса a_0 і товщини $2d_0$, то $w_0(\xi) = 2a_0d_0q_0$. Тоді всередині області S_0 за формулою (2) знаходимо температуру [3]

$$T_0(r) = \frac{a_0d_0q_0}{\lambda}F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{r^2}{a_0^2}\right) = \frac{2a_0d_0q_0}{\pi\lambda}E\left(\frac{r}{a_0}\right), \qquad (3)$$

$$r \le a_0,$$

де F — гіпергеометрична функція; E — еліптичний інтеграл другого роду.

Якщо область Ω_0 має форму сплющеного сфероїда $\left(x_1^2 + x_2^2\right)/a_0^2 + x_3^2/c_0^2 = 1$, $c_0 << a_0$, то $w_0(\xi) = \frac{2c_0q_0}{a_0}\sqrt{a_0^2 - x_1^2 - x_2^2}$ і всередині області S_0

$$T_0(r) = \frac{\pi c_0a_0q_0}{4\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{2a_0^2}\right), \quad r \le a_0. \qquad (4)$$

Поза областю S_o ядра всіх інтегралів в (1) є регулярними, тому ці інтеграли можна знаходити чисельно, розбивши області S_k на граничні елементи за радіусом і кутом та задавши на них значення $w_k(\xi)$.

Зауважимо, що для паралельних областей Ω_k температура на осі Ox_3 ($x_1 = x_2 = 0$) визначається в аналітичній формі. Зокрема, для дискових областей

$$T_1(x_3) = \sum_{k=0}^{n}\frac{d_kq_k}{\lambda}\left[\sqrt{a_k^2 + \omega_k^2} - |\omega_k|\right], \qquad (5)$$

$$\omega_k = x_3 - 2h_k, \quad h_0 = 0,$$

а для сфероїдних

$$T_1(x_3) = \sum_{k=0}^{n}\frac{c_kq_k}{2\lambda a_k}\left\{\frac{a_k^2 + \omega_k^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{a_k^2 - \omega_k^2}{a_k^2 + \omega_k^2}\right] - \right.$$

$$\left. - a_k|\omega_k|\right\}. \qquad (6)$$

Як приклад розглянемо простір з двома однаковими тепловиділювальними областями S радіусів a, центри яких знаходяться на віддалі $2h$. Тоді

$$T_i(x^*) = \frac{1}{4\pi\lambda}\iint\limits_{S}w(\xi)\left[\frac{1}{|x^* - \xi|} + \frac{1}{R_i(x^*,\xi)}\right]d_\xi S, \qquad (7)$$

$$R_1(x^*,\xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - 2h)^2},$$

$$R_2(x^*,\xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2 - 2h)^2 + x_3^2},$$

де $w(\xi)$ — однакова інтенсивність теплових джерел в областях S.

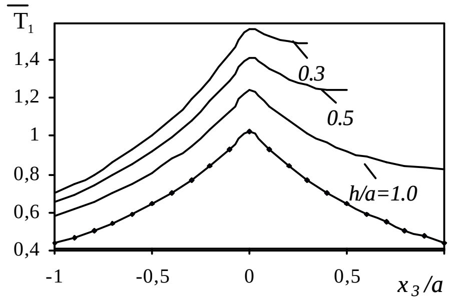

Рис. 3. Розподіл температури для двох паралельних включень

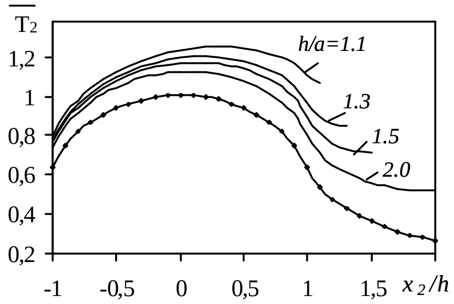

Рис. 4. Розподіл температури для двох компланарних включень

За формулою (7) проводились обчислення для двох монетоподібних включень товщини $2d$ зі сталим тепловиділенням q. Тоді $w(\xi)=2adq$.

На рис. 3 і рис. 4 наведено значення температур $\overline{T}_1=\lambda T_1(x_3)/daq$ (рис. 3) на осі Ox_3 при $h/a=0.3;0.5;1.0$ та $\overline{T}_2=\lambda T_2(x_2)/daq$ (рис. 4) на осі Ox_2 при $h/a=1.1;1.3;1.5;2.0$. Маркована крива відповідає одному включенню ($h=\infty$). Внаслідок симетрії відносно серединної площини між включеннями графіки побудовані тільки до точок $x_3=h$ (рис. 1) та $x_2=h$ (рис. 2). При зближенні включень температура зростає, причому для паралельних включень вона є максимальною в їхньому центрі, а для компланарних максимум зміщується у напрямі сусіднього включення. Для більш точного аналізу величин $\overline{T}_2$ на осі Ox_2 у табл. 1 наведені їхні максимальні значення. У дужках вказана віддаль $\delta=x_2/a$ від центра дискового включення.

Для сфероїдних включень графіки розподілу температури будуть подібними до наведених вище.

Визначення напружень. Зумовлені тепловиділенням напруження знайдемо за допомогою термопружного потенціалу переміщень. Для цього розглянемо спочатку одне зосереджене джерело тепла, розміщене в точці $\xi^*(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$. Тоді

$$\Phi(x^*,\xi^*)=AR(x^*,\xi^*),\ A=(1+\nu)\alpha_t w(\xi^*)/4\pi\lambda(1-\nu),\ (8)$$

$$R=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2},$$

де α_t і ν — коефіцієнти лінійного температурного розширення і Пуасона. Напруження знаходимо за формулою

Таблиця 1

Результати розрахунку

h/a	$\overline{T}_2$	$\overline{\sigma}_{22}^2$
1.1	1.251 ($\delta=0.3$)	-1.980 ($\delta=0.6$)
1.3	1.203 ($\delta=0.2$)	-1.872 ($\delta=0.3$)
1.5	1.171 ($\delta=0.1$)	-1.809($\delta=0.2$)
2.0	1.126 ($\delta=0.05$)	-1.715 ($\delta=0.15$)
∞	1.000 ($\delta=0.0$)	-1.485 ($\delta=0.0$)

$$\sigma_{ij}=2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial i\partial j}-\delta_{ij}\Delta\Phi\right),\quad i,j=1,2,3, \qquad (9)$$

де G — модуль зсуву; Δ — оператор Лапласа; δ_{ij} — символ Кронекера.

Підставивши у (9) вираз (8), маємо

$$\sigma_{ij}=-2GAR^{-1}\left[\delta_{ij}+(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)R^{-2}\right]. \qquad (10)$$

У випадку осьової симетрії компоненти напруженого стану в системі циліндричних координат виражаються формулами [10]:

$$\sigma_{\varphi\varphi}=-2GAR^{-1},\ \sigma_{rr}=-2GAR^{-1}\left(1+r^2R^{-2}\right),$$

$$\sigma_{33}=-2GAR^{-1}\left(2-r^2R^{-2}\right),\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}. \qquad (11)$$

Формули (10) і (11) використаємо для визначення напружень, зумовлених джерелами тепла, розташованими по областях S_k. Тоді для паралельних включень маємо:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^1(x^*)=-DT_1(x^*),\ D=\frac{G\alpha_t(1+\nu)}{1-\nu}, \qquad (12)$$

$$\sigma_{33}^1(x^*)=\sigma_{\varphi\varphi}^1(x^*)-M(x^*), \qquad (13)$$

$$\sigma_{rr}^1(x^*)=2\sigma_{\varphi\varphi}^1(x^*)+M(x^*), \qquad (14)$$

$$M(x^*)=\frac{D}{4\pi\lambda}\iint_{S_o} w_o(\xi)\frac{x_3^2}{|x^*-\xi|^3}d_\xi S+$$

$$+\frac{D}{4\pi\lambda}\sum_{k=1}^{n}\iint_{S_k} w_k(\xi)\frac{(x_3-2h_k)^2}{R_{1k}^3(x^*,\xi)}d_\xi S.$$

Для паралельних дискових областей Ω_k напруження на осі Ox_3 ($x_1=x_2=0$) визначаються точно в аналітичній формі:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^1(x_3)=-DT_1(x_3), \qquad (15)$$

$$\sigma_{33}^1(x_3)=-\frac{Dd_0q_0}{\lambda}\left[\sqrt{a_0^2+x_3^2}-\frac{x_3^2}{\sqrt{a_0^2+x_3^2}}\right]+$$

$$+D\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k q_k}{\lambda}\left[\sqrt{a_k^2+\omega_k^2}-\frac{\omega_k^2}{\sqrt{a_k^2+\omega_k^2}}\right]. \qquad (16)$$

У випадку компланарних включень за формулою (10) отримуємо:

$$\sigma_{11}^2(x^*)=-DT_2(x^*)-\frac{D}{4\pi\lambda}\iint\limits_{S_o} w_o(\xi)\frac{(x_1-\xi_1)^2}{|x^*-\xi|^3}d_\xi S-$$

$$-\frac{D}{4\pi\lambda}\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{S_k} w_k(\xi)\frac{(x_1-\xi_1)^2}{R_{2k}^3(x^*,\xi)}d_\xi S\,, \qquad (17)$$

$$\sigma_{22}^2(x^*)=-DT_2(x^*)-\frac{D}{4\pi\lambda}\iint\limits_{S_o} w_o(\xi)\frac{(x_2-\xi_2)^2}{|x^*-\xi|^3}d_\xi S-$$

$$-\frac{D}{4\pi\lambda}\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{S_k} w_k(\xi)\frac{(x_2+\xi_2-2h)^2}{R_{2k}^3(x^*,\xi)}d_\xi S\,, \qquad (18)$$

$$\sigma_{33}^2(x^*)=-DT_2(x^*)-\frac{D}{4\pi\lambda}\iint\limits_{S_o} w_o(\xi)\frac{x_3^2}{|x^*-\xi|^3}d_\xi S-$$

$$-\frac{D}{4\pi\lambda}\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{S_k} w_k(\xi)\frac{x_3^2}{R_{2k}^3(x^*,\xi)}d_\xi S\,. \qquad (19)$$

На рис. 5 і рис. 6 для вказаних на попередніх рисунках значень h зображені величини напружень $\overline{\sigma}_{33}^1=\lambda\sigma_{33}^1(x_3)/Ddaq$ для паралельних включень на осі Ox_3 (рис. 5) та $\overline{\sigma}_{22}^2=\lambda\sigma_{22}^2(x_2)/Ddaq$ для компланарних включень на осі Ox_2 (рис. 6). З формули (12) видно, що для паралельних включень кільцеві напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^1(x^*)$ пропорційні температурі. Тому графіки на рис. 3 відповідають також значенню напружень $\overline{\sigma}_{\varphi\varphi}^1(x_3)=-D\overline{T}_1(x_3)$. Для компланарних включень нормальні напруження $\sigma_{33}^2(x_1,x_2,0)$ також пропорційні температурі в площині $x_3=0$. Тому графіки на рис. 4 відображають відповідні величини напружень $\overline{\sigma}_{33}^2(x_2)=-D\overline{T}_2(x_2)$, нормальних до площини $x_3=0$.

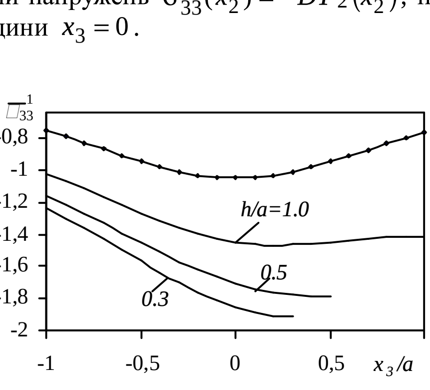

Рис. 5. Розподіл напружень для двох паралельних включень

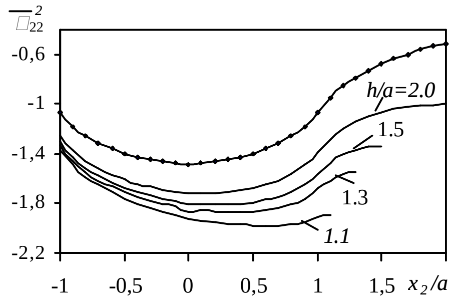

Рис. 6. Розподіл напружень для двох компланарних включень

З графіків видно, що зі зближенням включень напруження за модулем зростають, причому для паралельних включень вони досягають максимуму при $x_3=h$, а для компланарних, як і у випадку температури, їх максимум зміщується в напрямі сусіднього включення (див. табл. 1).

Висновки. Виразами (1) описується також температурне поле $T_2(x^*)$ у півбезмежному тілі, коли його межа $x_3=0$ (рис. 2) термоізольована, крім областей S_k, де задані теплові потоки.

У випадку двох однакових областей S формулами (7) визначається температурне поле у термоізольованому на межі півпростору $x_3\le h$ (рис. 1) з паралельною або $x_2\le h$ (рис. 2) з перпендикулярною до цієї межі областю тепловиділення.

Усі напруження в тілі є стискальними, тому якщо в околі областей тепловиділення наявні навантажені внутрішнім тиском тріщини, то за рахунок нагріву можна понизити інтенсивність напружень, тобто створити умови гальмування тріщин [11].

Рівняння (1) можна використати також для визначення електричного потенціалу в безмежному просторі з тонкими круговими пластинами, на яких задані електричні заряди (тепловим джерелам відповідають електричні заряди, а температурі — потенціал).

Література

1. *Власов Н.М., Федик И.И.* Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей. — М.: ЦНИИатоминформ. — 2001. — 208 с.

2. *Федик И.И., Колесов В.С., Михайлов В.Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 280 с.

3. *Кіт Г.С., Сушко О.П.* Напружений стан півбезмежного тіла при тепловиділенні в перпендикулярній до його межі дисковій області // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2007. — Вип. 5. — С. 122—126.

4. *Кіт Г.С., Сушко О.П.* Термопружний стан півпростору з перпендикулярною до його краю теплоактивною круговою тріщиною // Фіз. – хім. мех. матеріалів. — 2005. — **41**, №2. — С. 16—22.

5. *Кіт Г.С., Сушко О.П.* Термопружний стан півпростору з перпендикулярною до його межі теплоактивною еліптичною тріщиною // Фіз. – хім. мех. матеріалів. — 2006. — **42**, №2. — С. 45—52 .

6. *Кит Г.С., Сушко О.П.* Взаимодействие теплоактивной эллиптической трещины с границей полупространства // Теорет. и прикл. механика. — 2006. — Вип. 42. — С. 45—51.

7. *Кит Г.С., Сушко О.П.* Термоупругое состояние полупространства с параллельной к его границе теплоактивной трещиной // Прикл. механика. — 2007. — Том. 43, №4. — С. 46—54.

8. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Термоупругое состояние тела с двумя компланарными или параллельными трещинами // Теорет. и прикл. механика. — 2005. — Вип. 40. — С. 3—8.

9. *Кит Г.С., Хай М.В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. — К.: Наук. думка, 1989. — 284 с.

10. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 364 с.

11. *Финкель В.М.* Физические основы торможения разрушения. — М.: Металлургия, 1977. — 360 с.

Отримана 12.10.08

H. Kit, O. Sushko

Distribution of temperature and stresses in a body at heat-emission in circular disk domains

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences, Lviv

A temperature field and stresses in a body, caused by heat-emission in the disk domains located in a plane with centers on one straight line or co-axially in the parallel planes, are determined. Influence of the distance between two identical penny-shaped or spheroidal domains on distribution of temperature and stresses is investigated. Simple analytical dependencies for temperature and normal stresses are obtained in the case of arbitrary number of parallel domains on symmetry axis. It is established that stresses in the vicinity of heat-emission domains are compressive.

² íôîð ì àö³ÿ

Міжнародна науково-технічна конференція

ПОШКОДЖЕННЯ МАТЕРІАЛІВ ПІД ЧАС ЕКСПЛУАТАЦІЇ, МЕТОДИ ЙОГО ДІАГНОСТУВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ, IC-DMDP

21 — 24 вересня 2009 р., ТДТУ ім. І. Пулюя,
м. Тернопіль

Організатори конференції:

Інститут проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України;

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя;

Західний науковий центр НАН і МОН України;

Наукова рада з проблеми механіка деформівного твердого тіла при Відділенні механіки НАН України;

Наукова рада з проблеми фізико-хімічної механіки матеріалів при Відділенні фізико-технічних проблем матеріалознавства;

Тернопільська обласна організація українського союзу науково-технічної інтелігенції.

Тематика конференції:

1. Розсіяне і локалізоване пошкодження матеріалів.
2. Діагностування пошкоджень.
3. Методи описування і прогнозування пошкоджуваності матеріалів.
4. Оцінювання залишкового ресурсу елементів конструкцій.

Інформацію про конференцію та культурну програму розміщено за адресою:
http//www.tu.edu.te.ua/dmdp/

Адреса Оргкомітету:

Оргкомітет Міжнародної науково-технічної конференції “IC DMDP”

ТДТУ, вул. Руська, 56, м. Тернопіль, 46001, Україна.
Тел.: +380 (352) 25 35 09; Факс: +380 (352) 25 49 83
e-mail: snt@tu.edu.te.ua

Голова програмного комітету — академік НАН України В. Т. Трощенко.

Співголова програмного комітету — д. т. н., проф. П. В. Ясній.

Голова організаційного комітету — к. т. н., доц. Ю. І. Пиндус.

Науковий секретар — к. т. н. І. Б. Окіпний.