

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left\{ \frac{1+\xi^2}{2} \ln|\tau-\zeta| + F_1(\tau-\zeta) + \frac{\pi\rho}{2\varepsilon\kappa_0^2} \left(1 + \frac{3\tau_m\tau_k}{4} \right) \right\} d\tau = f_1(\tau_k),$$

$$+ \frac{\pi\rho}{2\varepsilon\kappa_0^2} \left(1 + \frac{3\tau\zeta}{4} \right) \Bigg\} d\tau = f_1(\zeta),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \left\{ \frac{1+\xi^2}{2} \ln|\tau-\zeta| + F_2(\tau-\zeta) + \frac{\pi\rho}{2\varepsilon\kappa_0^2} \right\} = f_2(\zeta), \quad (11)$$

$$f_1(\zeta) = -i[\alpha \sin \theta_0 \exp(i\kappa_0 \xi \zeta \cos \theta_0) - \beta \cos \theta_0 \exp(i\kappa_0 \zeta \cos \theta_0)]$$

$$f_2(\zeta) = -i[\alpha \cos \theta_0 \exp(i\kappa_0 \xi \zeta \cos \theta_0) + \beta \sin \theta_0 \exp(i\kappa_0 \zeta \cos \theta_0)].$$

Інтегральні рівняння для включення в умовах гладкого контакту є такими:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left\{ \frac{1+\xi^2}{2} \ln|\tau-\zeta| + F_1(\tau-\zeta) + \frac{\pi\rho}{2\kappa_0^2\varepsilon} \left(1 + \frac{3}{4} \tau\zeta \right) \right\} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_4(\tau) \left\{ \xi^2 \ln|\tau-\zeta| + \Gamma_{22}(\tau-\zeta) \right\} d\tau = f_1(\zeta),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left\{ -\frac{\xi^2}{\tau-\zeta} + \Gamma_{11}(\tau-\zeta) \right\} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_4(\tau) \left\{ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + \Gamma_{12}(\tau-\zeta) \right\} d\tau = f_2(\zeta),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_4(\tau) d\tau = 0, \quad (12)$$

$$f_1(\zeta) = -i[\alpha \sin \theta_0 \exp(i\kappa_0 \xi \zeta \cos \theta_0) - \beta \cos \theta_0 \exp(i\kappa_0 \zeta \cos \theta_0)],$$

$$f_2(\zeta) = \kappa_0 [\alpha \xi \sin 2\theta_0 \exp(i\kappa_0 \xi \zeta \cos \theta_0) - \beta \cos 2\theta_0 \exp(i\kappa_0 \zeta \cos \theta_0)].$$

Ядра інтегральних операторів $\Gamma_{11}(\tau-\zeta)$, $\Gamma_{12}(\tau-\zeta)$, $\Gamma_{22}(\tau-\zeta)$, $F_1(\tau-\zeta)$, $F_2(\tau-\zeta)$ є функціями обмеженими та неперервними для $-1 \leq \tau, \zeta \leq 1$. Також введено позначення $\zeta = a^{-1}x$, $\varphi_j(\zeta) = \chi_j(a\zeta)\mu^{-1}$ $j=1;2$, $\varphi_4(\zeta) = \chi_4(a\zeta)$.

Наближений розв'язок (11) та (12) шукатимемо у вигляді [6]

$$\varphi_i(\tau) = \frac{\Psi_i(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad i=1;2;4. \quad (13)$$

Методами, викладеними у [6, 7], системи інтегральних рівнянь (11), (12) замінені відповідними системами лінійних алгебричних рівнянь:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_{m1} a_m \left[\frac{1+\xi^2}{2} B_{km} + F_1(\tau_m - \tau_k) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_{m2} a_m \left[\frac{1+\xi^2}{2} B_{km} + F_2(\tau_m - \tau_k) + \frac{\pi\rho}{2\varepsilon\kappa_0^2} \right] = f_2(\tau_k) \quad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_{m1} a_m \left\{ \frac{1+\xi^2}{2} B_m + F_1(\tau_m - \tau_k) + \frac{\pi\rho}{2\kappa_0^2\varepsilon} \left(1 + \frac{3}{4} \tau_m \tau_k \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_{m4} a_m \left\{ \xi^2 B_{km} + \Gamma_{22}(\tau_m - \tau_k) \right\} = f_1(\tau_k),$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_{m1} a_m \left\{ -\frac{\xi^2}{\tau_m - t_j} + \Gamma_{11}(\tau_m - t_j) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_{m4} a_m \left\{ -\frac{2(1-\xi^2)}{\tau_m - t_j} + 4\Gamma_{11}(\tau_m - t_j) - L(\tau_m - t_j) \right\} =$$

$$= f_2(t_j), \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_{m4} a_m = 0. \quad (15)$$

$$t_j = \cos \frac{\pi j}{n}, \quad j = \overline{1; n-1}, \quad k = \overline{1; n},$$

$$\tau_m = \cos(\pi(2m-1)/2n) \quad (m = \overline{1, n}).$$

У цих формулах a_m , B_{km} — коефіцієнти квадратурних формул для сингулярних інтегралів з ядрами Коші і логарифмічним ядром [6, 7].

Після розв'язання систем (14), (15) невідомі функції $\Psi_i(\tau)$ наближені інтерполяційними многочленами:

$$\Psi_i(\tau) = \sum_{m=1}^n \Psi_{mi} \frac{T_n(\tau)}{T_n'(\tau_m)(\tau - \tau_m)}, \quad (16)$$

де $T_n(\tau)$ — многочлен Чебишева 2-го роду, $\Psi_{mi} = \Psi_i(\tau_m)$, $i=1,2$, τ_m — корені $T_n(\tau)$.

Визначення повних поперечних перерізів розсіювання (ПППР). Повний поперечний переріз розсіювання $Q_k(\omega)$ як поздовжніх, так і поперечних хвиль за означенням [8, 9] є відношенням усередненої швидкості поширення енергії розсіяної хвилі $\langle Q_k^1 \rangle_t$ через циліндричну поверхню одиничної висоти, що містить включення, до середньої за періодом кількості енергії $\langle I^0 \rangle_t$ падаючої хвилі, що проходить через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку розповсюдження падаючої хвилі:

$$Q_k(\omega) = \frac{\langle Q_k^1 \rangle_t}{\langle I^0 \rangle_t}, \quad k=1;2. \quad (17)$$

Якщо ввести одиничний вектор нормалі $n^0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ до фронту падаючої хвилі [8], то

$$\langle I^0 \rangle_t = \frac{\omega}{2} \left\{ \cos \theta_0 \operatorname{Im}(\sigma_x^0 + \tau_{xy}^0)(\bar{u}^0 + \bar{v}^0) + \sin \theta_0 \operatorname{Im}(\sigma_y^0 + \tau_{xy}^0)(\bar{u}^0 + \bar{v}^0) \right\}. \quad (18)$$

При падінні поздовжньої хвилі величина

$$\langle I^0 \rangle_t = \frac{\omega \mu A^2 \kappa_1}{2 \xi^2}. \quad (19)$$

Якщо ж поширюються хвилі поперечного зсуву, то

$$\langle I^0 \rangle_t = \frac{\omega \mu B^2 \kappa_2}{2}. \quad (20)$$

Подамо переміщення і напруження, викликані розсіяною хвилею, у вигляді:

$$u^1 = u^{11} + u^{12}, \quad v^1 = v^{11} + v^{12}, \quad \sigma_x^1 = \sigma_x^{11} + \sigma_x^{12}, \\ \sigma_y^1 = \sigma_y^{11} + \sigma_y^{12}, \quad \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^{11} + \tau_{xy}^{12}.$$

У цьому поданні перші доданки є переміщеннями і напруженнями, викликані розсіяною поздовжньою хвилею, другі — розсіяною поперечною хвилею.

Нехай є циліндрична поверхня одиничної довжини, всередині якої знаходиться включення. Швидкість поширення енергії розсіяної хвилі через цю поверхню [8]

$$Q_k = \frac{-i\omega}{4} \int_L \left\{ n_1 \left[-(\sigma_x^{1k} u^{1k} + \tau_{xy}^{1k} v^{1k}) e^{-2i\omega t} + \sigma_x^{1k} \bar{u}^{-1k} - \sigma_x^{-1k} u^{1k} + \tau_{xy}^{1k} \bar{v}^{-1k} - \tau_{xy}^{-1k} v^{1k} + (\sigma_x^{-1k} \bar{u}^{-1k} + \tau_{xy}^{-1k} \bar{v}^{-1k}) e^{2i\omega t} \right] + n_2 \left[-(\tau_{xy}^{1k} u^{1k} + \sigma_y^{1k} v^{1k}) e^{-2i\omega t} + \tau_{xy}^{1k} \bar{u}^{-1k} - \tau_{xy}^{-1k} u^{1k} + \sigma_y^{-1k} \bar{v}^{-1k} - \sigma_y^{-1k} v^{1k} + (\tau_{xy}^{-1k} \bar{u}^{-1k} + \sigma_y^{-1k} \bar{v}^{-1k}) e^{2i\omega t} \right] \right\} dL.$$

З останньої формули при $k=1$ знаходимо швидкість поширення енергії поздовжньої хвилі, а при $k=2$ — енергії поперечної хвилі. Після осереднення величин Q_k за часом, знайдено:

$$\langle Q_k^1 \rangle_t = \frac{\omega}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ n_1 \left[\sigma_x^{1k} \bar{u}^{-1k} - \sigma_x^{-1k} u^{1k} + \tau_{xy}^{1k} \bar{v}^{-1k} - \tau_{xy}^{-1k} v^{1k} \right] + n_2 \left[\tau_{xy}^{1k} \bar{u}^{-1k} - \tau_{xy}^{-1k} u^{1k} + \sigma_y^{1k} \bar{v}^{-1k} - \sigma_y^{-1k} v^{1k} \right] \right\} d\varphi. \quad (21)$$

Далі для визначення $\langle Q_k^1 \rangle_t$ у дальній зоні потрібно ввести полярну систему t координат $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ і використати асимптотичні формули для переміщень та напружень розсіяного поля поздовжніх і поперечних хвиль, коли $R \rightarrow \infty$.

З інтегральних подань для переміщень та напружень відбитих поздовжніх хвиль для повністю зчепленого включення (9) знаходимо асимптотичні формули:

$$u^{11}(R, \varphi) = -\frac{i}{4\mu_1 \kappa_2^2} \kappa_1^2 \gamma_1 \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} S_{11} \sin 2\varphi + S_{21} \cos^2 \varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}, \\ v^{11}(R, \varphi) = -\frac{i}{4\mu_1 \kappa_2^2} \kappa_1^2 \gamma_1 \times \\ \times \left\{ S_{11} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} S_{21} \sin 2\varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}, \\ \sigma_x^{11}(R, \varphi) = \frac{\kappa_1}{4} (1 - 2\xi^2 \sin^2 \varphi) \gamma_1 \times \\ \times \left\{ S_{11} \sin \varphi + S_{21} \cos \varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}, \\ \tau_{xy}^{11}(R, \varphi) = \frac{\kappa_1}{4} \xi^2 \gamma_1 \sin 2\varphi \times \\ \times \left\{ S_{11} \sin \varphi + S_{21} \cos \varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}, \\ \sigma_y^{11}(R, \varphi) = \frac{\kappa_1}{4} (1 - 2\xi^2 \cos^2 \varphi) \gamma_1 \times \\ \times \left\{ S_{11} \sin \varphi + S_{21} \cos \varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}. \quad (22)$$

Аналогічні подання для розсіяних хвиль поперечного зсуву мають вигляд:

$$u^{12}(R, \varphi) = \frac{i}{4\mu_1} \gamma_2 \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} S_{12} \sin 2\varphi - S_{22} \sin^2 \varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}, \\ v^{12}(R, \varphi) = -\frac{i}{4\mu_1} \gamma_2 \times \\ \times \left\{ S_{12} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} S_{22} \sin 2\varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}, \\ \sigma_x^{12}(R, \varphi) = -\frac{\kappa_2}{4} \gamma_2 \sin 2\varphi \times \\ \times \left\{ S_{12} \cos \varphi - S_{22} \sin \varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}, \\ \tau_{xy}^{12}(R, \varphi) = \frac{\kappa_2}{4} \gamma_2 \cos 2\varphi \times \\ \times \left\{ S_{12} \cos \varphi - S_{22} \sin \varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}, \\ \sigma_y^{12}(R, \varphi) = \frac{\kappa_2}{4} \gamma_2 \sin 2\varphi \times$$

$$\times \left\{ S_{12} \cos \varphi - S_{22} \sin \varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}. \quad (23)$$

Коли на обох сторонах включення виконуються умови гладкого контакту аналогічні формули для переміщень і напружень відбитих поздовжніх хвиль мають вигляд:

$$u^{11}(R, \varphi) = -\frac{i\kappa_1^2}{8\mu_1\kappa_2^2} \gamma_1 \sin 2\varphi \left\{ S_{11} - 2\kappa_1 S_{41} \cos \varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}$$

$$v^{11}(R, \varphi) = -\frac{i\kappa_1^2}{4\mu_1\kappa_2^2} \gamma_1 \sin^2 \varphi \left\{ S_{11} + 2S_{41} + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}$$

$$\sigma_x^{11}(R, \varphi) = \frac{\kappa_1}{4} \sin \varphi (1 - 2\xi^2 \sin^2 \varphi) \gamma_1 \left\{ S_{11} + 2\mu_1 S_{41} + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}$$

$$\tau_{xy}^{11}(R, \varphi) = \frac{\kappa_1}{4} \xi^2 \gamma_1 \sin 2\varphi \sin \varphi \left\{ S_{11} + 2\mu_1 S_{41} + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}$$

$$\sigma_y^{11}(R, \varphi) = \frac{\kappa_1}{4} \sin \varphi (1 - 2\xi^2 \cos^2 \varphi) \gamma_1 \times \\ \times \left\{ S_{11} + 2\mu_1 S_{41} + O\left(R^{-1/2}\right) \right\}, \quad (24)$$

За розсіяння від включення хвиль поперечного зсуву це поле набуває вигляду:

$$u^{12}(R, \varphi) = \frac{i\gamma_2}{4\mu_1} \sin \varphi \left\{ S_{12} \cos \varphi - S_{42} \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} + O\left(R^{-1/2}\right) \right\},$$

$$v^{12}(R, \varphi) = -\frac{i\gamma_2}{4\mu_1} \left\{ S_{12} \cos^2 \varphi + S_{42} \cos 2\varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\},$$

$$\sigma_x^{12}(R, \varphi) = -\frac{\kappa_2 \gamma_2}{2} \sin \varphi \times$$

$$\times \left\{ S_{12} \cos^2 \varphi + \mu_1 S_{42} \cos 2\varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\},$$

$$\tau_{xy}^{12}(R, \varphi) = \frac{\kappa_2}{4} \gamma_2 \cos 2\varphi \times$$

$$\times \left\{ S_{12} \cos \varphi + S_{42} \frac{\mu_1 \cos 2\varphi}{\cos \varphi} + O\left(R^{-1/2}\right) \right\},$$

$$\sigma_y^{12}(R, \varphi) = \frac{\kappa_2 \gamma_2}{2} \sin \varphi \left\{ S_{12} \cos^2 \varphi + \mu_1 S_{42} \cos 2\varphi + O\left(R^{-1/2}\right) \right\} \quad (25)$$

У формулах (22) — (25) використані такі позначення:

$$S_{lj} = \int_{-a}^a \chi_l(\eta) \exp(-i\kappa_j \eta \cos \varphi) d\eta, \quad l = 1; 2,$$

$$S_{4j} = \int_{-a}^a \chi_4'(\eta) \exp(-i\kappa_j \eta \cos \varphi) d\eta,$$

$$\gamma_j = \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa_j R}} \exp i \left(\kappa_j R - \frac{\pi}{4} \right), \quad j = 1; 2$$

Після переходу до позначень

$$u(\zeta) = a^{-1} u_0(a\zeta), \quad v(\zeta) = a^{-1} v_0(a\zeta),$$

$$\varphi_j(\zeta) = \frac{\chi_j(a\zeta)}{\mu}, \quad j = 1; 2, \quad \varphi_4(\zeta) = \chi_4'(a\zeta), \quad \zeta = a^{-1}x$$

і обчислення інтегралів за квадратурними формулами Гауса-Чебишова отримані наближені формули для головних складових переміщень та напружень хвиль, розсіяних у дальню зону. У випадку повністю зчепленого з матрицею включення ці формули мають вигляд:

$$u^{11}(R, \varphi) = -ai\xi^2 \lambda_1 \left\{ \frac{1}{2} T_{m1}^\xi \sin 2\varphi + T_{m2}^\xi \cos^2 \varphi \right\},$$

$$v^{11}(R, \varphi) = -ai\xi^2 \lambda_1 \left\{ T_{m1}^\xi \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} T_{m2}^\xi \sin 2\varphi \right\},$$

$$\sigma_x^{11}(R, \varphi) = \mu_1 \kappa_0 \xi (1 - 2\xi^2 \sin^2 \varphi) \lambda_1 \left\{ T_{k1}^\xi \sin \varphi + T_{k2}^\xi \cos \varphi \right\},$$

$$\tau_{xy}^{11}(R, \varphi) = \mu_1 \kappa_0 \xi^3 \lambda_1 \sin 2\varphi \left\{ T_{k1}^\xi \sin \varphi + T_{k2}^\xi \cos \varphi \right\},$$

$$\sigma_y^{11}(R, \varphi) = \mu_1 \kappa_0 \xi (1 - 2\xi^2 \cos^2 \varphi) \lambda_1 \left\{ T_{k1}^\xi \sin \varphi + T_{k2}^\xi \cos \varphi \right\},$$

$$u^{12}(R, \varphi) = ai\lambda_2 \left\{ \frac{1}{2} T_{m1} \sin 2\varphi - T_{m2} \sin^2 \varphi \right\},$$

$$v^{12}(R, \varphi) = -ai\lambda_2 \left\{ T_{m1} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} T_{m2} \sin 2\varphi \right\},$$

$$\sigma_x^{12}(R, \varphi) = -\mu_1 \kappa_0 \lambda_2 \sin 2\varphi \left\{ T_{k1} \cos \varphi - T_{k2} \sin \varphi \right\},$$

$$\tau_{xy}^{12}(R, \varphi) = \mu_1 \kappa_0 \lambda_2 \cos 2\varphi \left\{ T_{k1} \cos \varphi - T_{k2} \sin \varphi \right\},$$

$$\sigma_y^{12}(R, \varphi) = \mu_1 \kappa_0 \lambda_2 \sin 2\varphi \left\{ T_{k1} \cos \varphi - T_{k2} \sin \varphi \right\},$$

$$T_{pg} = \sum_{p=1}^n a_p \Psi_{pg} \exp(z_p), \quad T_{pg}^\xi = \sum_{p=1}^n a_p \Psi_{pg} \exp(\xi z_p),$$

$$z_p = -i\kappa_0 \tau_p \cos \varphi, \quad p = m; k,$$

$$\lambda_j = \frac{1}{\sqrt{8\pi \kappa_j R}} \exp i \left[\kappa_j R - \frac{\pi}{4} \right], \quad g; j = 1; 2.$$

Для включення в умовах гладкого контакту головні складові переміщень та напружень хвиль, розсіяних у дальню зону, набувають вигляду:

$$u^{11}(R, \varphi) = -ai\xi^2 \lambda_1 \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left\{ T_{m1}^\xi + 2T_{m4}^\xi \right\},$$

$$v^{11}(R, \varphi) = -ai\xi^2 \lambda_1 \sin^2 \varphi \left\{ T_{m1}^\xi + 2T_{m4}^\xi \right\},$$

$$\sigma_x^{11}(R, \varphi) = \mu_1 \kappa_0 \xi \lambda_1 (1 - 2\xi^2 \sin^2 \varphi) \sin \varphi \left\{ T_{k1}^\xi + 2T_{k4}^\xi \right\},$$

$$\tau_{xy}^{11}(R, \varphi) = \mu_1 \kappa_0 \xi^3 \lambda_1 \sin 2\varphi \sin \varphi \left\{ T_{k1}^\xi + 2T_{k4}^\xi \right\},$$

$$\begin{aligned}\sigma_y^{11}(R, \varphi) &= \mu_1 \kappa_0 \xi \lambda_1 \sin \varphi (1 - 2\xi^2 \cos^2 \varphi) \times \\ &\quad \times \left\{ T_{k1}^\xi + 2T_{k4}^\xi \right\}, \\ u^{12}(R, \varphi) &= ai \lambda_2 \sin \varphi \left\{ T_{m1} \cos \varphi + T_{m4} \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} \right\}, \\ v^{12}(R, \varphi) &= -ai \lambda_2 \left\{ T_{m1} \cos^2 \varphi + T_{m4} \cos 2\varphi \right\}, \\ \sigma_x^{12}(R, \varphi) &= -2\mu_1 \kappa_0 \lambda_2 \sin \varphi \left\{ T_{k1} \cos^2 \varphi + T_{k4} \cos 2\varphi \right\}, \\ \tau_{xy}^{12}(R, \varphi) &= \mu_1 \kappa_0 \lambda_2 \cos 2\varphi \left\{ T_{k1} \cos \varphi + T_{k4} \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} \right\}, \\ \sigma_y^{12}(R, \varphi) &= 2\mu_1 \kappa_0 \lambda_2 \sin \varphi \left\{ T_{k1} \cos^2 \varphi + T_{k4} \cos 2\varphi \right\}.\end{aligned}$$

Підставивши у (21) подання для $u^{1k}(x, y)$, $v^{1k}(x, y)$, $\sigma_x^{1k}(x, y)$, $\sigma_y^{1k}(x, y)$ та $\tau_{xy}^{1k}(x, y)$ і обчисливши відповідні інтеграли, знайдено вираз для $\langle Q_k^1 \rangle_t$:

$$\langle Q_k^1 \rangle_t = -\frac{\omega \mu_1 a^2 \pi}{16n^2} \int_0^{2\pi} f_k(\varphi) d\varphi, \quad k=1;2. \quad (26)$$

В останній формулі підінтегральні функції залежать від типу розсіяної хвилі і для повністю зчепленого включення відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned}f_1(\varphi) &= -\xi^2 \left\{ \sin^2 \varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k1} \cos z^{mk}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k1} \sin z^{mk}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k2} \cos z^{mk}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k2} \sin z^{mk}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k1} \cos z^{mk}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k1} \sin z^{mk}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k2} \cos z^{mk}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k2} \sin z^{mk}) \right] \right\}, \\ f_2(\varphi) &= -\cos^2 \varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k1} \cos z^{mk}) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k1} \sin z^{mk}) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k2} \cos z^{mk}) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k2} \sin z^{mk}) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k1} \cos z^{mk}) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k1} \sin z^{mk}) \right] + \\ &\quad + \cos^2 \varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k2} \cos z^{mk}) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k2} \sin z^{mk}) \right] \Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+ \operatorname{Im}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k1} \sin z^{mk}) \Big\} + \\ &- \sin^2 \varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k2} \cos z^{mk}) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k2} \sin z^{mk}) \right] \Big\},\end{aligned}$$

Для включення в умовах гладкого контакту на обох його сторонах ці формули мають вигляд:

$$\begin{aligned}f_1(\varphi) &= -\xi^2 \sin^2 \varphi \left\{ \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k1} \cos z^{mk}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k1} \sin z^{mk}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k2} \cos z^{mk}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k2} \sin z^{mk}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k1} \cos z^{mk}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k1} \sin z^{mk}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k2} \cos z^{mk}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k2} \sin z^{mk}) \right] \right\}, \\ f_2(\varphi) &= -\cos^2 \varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k1} \cos z^{mk}) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k1} \sin z^{mk}) \right] - \\ &- \cos 2\varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k2} \cos z^{mk}) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m1} \bar{\psi}_{k2} \sin z^{mk}) \right] - \\ &- \cos 2\varphi \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k1} \cos z^{mk}) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k1} \sin z^{mk}) \right] - \\ &- \frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2 \varphi} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k2} \cos z^{mk}) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im}(\psi_{m2} \bar{\psi}_{k2} \sin z^{mk}) \right] \Big\}, \\ z^{mk} &= \kappa_0 (\tau_{im} - \tau_{jk}) \cos \varphi, \quad i, j=1;2.\end{aligned}$$

У результаті підстановки (19), (20) та (26) у (17) отримано вираз для ПППР. Якщо на включення набігає поздовжня хвиля, то вираз для ПППР має вигляд

$$Q_k(\omega) = \frac{-a^2 \xi \pi}{8n^2 \kappa_2 A^2} \int_0^{2\pi} f_k(\varphi) d\varphi. \quad (27)$$

Якщо ж на включення набігає поперечна хвиля, тоді

$$Q_k(\omega) = \frac{-a^2 \pi}{8n^2 \kappa_2 B^2} \int_0^{2\pi} f_k(\varphi) d\varphi, \quad k=1;2. \quad (28)$$

Аналіз результатів. За допомогою формул (26) проведені дослідження залежності значень повного поперечного перерізу розсіювання Q як від безрозмірної частоти κ_0 , так і від кута падіння хвилі θ_0 . Результати цих досліджень показані у вигляді графіків на рис. 1 — рис. 3. Пунктирна крива на всіх рисунках відповідає випадку ПППР розсіяної поперечної хвилі, суцільна крива — поздовжньої хвилі. Криві з номером 1 демонструють залежність ПППР для повністю зчепленого включення та матриці, 2 — для включення в умовах гладкого контакту.

На рис. 1 та рис. 2 наведені графіки залежності ПППР від кута поширення падаючої хвилі при $\kappa_0 = 4$. Від включення розсіюються як поздовжня, так і поперечна хвилі. На рис. 1 наведені графіки залежності ПППР від θ_0 при поширенні в матриці поздовжньої хвилі. Значення ПППР для повністю зчепленого включення і включення в умовах гладкого контакту набувають максимальних і мінімальних значень як розсіяної поздовжньої хвилі, так і поперечної хвилі за різних кутів поширення падаючої хвилі. Тільки тоді, коли фронт поширення хвилі паралельний до включення, значення ПППР досягають мінімального значення незалежно від умов взаємодії включення та матриці. За розсіяння поздовжньої хвилі значення ПППР для повністю зчепленого включення свого найбільшого значення набувають при куті падіння хвилі $\theta_0 = 0^\circ$ і $\theta_0 = 180^\circ$ та істотно перевищують відповідні значення ПППР для включення в умовах гладкого контакту, які при вказаних кутах падіння дорівнюють нулю.

На рис. 2 подані графіки залежності ПППР від кута поширення хвилі в матриці при падінні поперечної хвилі. Як видно з графіків, для включення в умовах гладкого контакту при $\theta_0 = 90^\circ$ ПППР як розсіяної поздовжньої хвилі, так і поперечної хвилі набувають максимального значення. Для повністю зчепленого з матрицею включення при такому куті поширення хвилі ПППР мають найменші значення. Крім цього, існує діапазон кутів поширення падаючої хвилі, за яких ПППР розсіяної поздовжньої хвилі для повністю зчеп-

леного включення істотно перевищують відповідні значення ПППР для включення в умовах гладкого контакту.

На рис. 3 подані графіки залежності ПППР при поширенні поперечної хвилі з $\theta_0 = 0^\circ$. З ростом частоти значення ПППР розсіяної поперечної хвилі швидко зростають, досягаючи свого найбільшого значення. Але максимальних значень ПППР для повністю зчепленого включення і включення в умовах гладкого контакту набувають при різних значеннях κ_0 . З подальшим зростанням κ_0 ПППР зменшуються. Але ПППР розсіяної поперечної хвилі для повністю зчепленого включення перевищують відповідні значення для ПППР для включення в умовах гладкого контакту. У випадку розсіяння поздовжньої хвилі ПППР для включення в умовах гладкого контакту перевищують відповідні значення ПППР для повністю зчепленого включення на всьому розглянутому діапазоні частот.

Висновок. У статті отримано ефективні наближені формули для розрахунку такої важливої характеристики розсіяного хвильового поля як ПППР. Шляхом числових досліджень встановлено, що на залежність значень ПППР від кута поширення падаючої хвилі і частоти істотно впливають умови взаємодії між включенням та матрицею. Останнім доведена теоретична можливість дистанційного визначення умов взаємодії між включенням та матрицею за допомогою ПППР.

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. — К.: Наук. думка, 1981. — 284 с.
2. Попов В.Г., Улановский А.Э. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы // Изв. РАН. МТТ. — 1995. — №4. — С. 99—109.
3. Литвин О.В., Попов В.Г. Концентрация напряжений вблизи тонкого упругого включения в условиях гладкого контакта при взаимодействии с гармоническими волнами // РАН. МТТ. — 2007. — №1. — С. 75—83.
4. Литвин О.В., Попов В.Г. Взаємодія плоских пружних гармонічних хвиль з пружним включенням за повного зчеплення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2007. — №3. — С. 58—64.
5. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974. — Т. 2. — 296 с.
6. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. — М.: Наука, 1985. — 253 с.
7. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. — К.: Наук. думка, 1989. — 256 с.
8. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитов. — Петрозаводский университет, 1993. — 600 с.
9. Achenbach J.D., Gautsien A.K., McMaken H. Ray methods for waves in elastic solids. — Pitman, Boston, 1982.

Отримана 08.04.08

O. Litvin, V. Popov

The analysis of the wave fields diffracted by the thin rigid inclusions with plane strain

Odesa National Sea Academy, Odesa

The wave field which is diffracted by the thin rigid inclusion in the matrix which is in the conditions of plane strain is analyzed in the article. Boundary conditions are formulated for the middle plane of the inclusion in view of a small thickness of the inclusion and the amplitude of its oscillations are defined from the equations of motion as rigid body. The inclusion can be both fully coupled with the medium and by the conditions of the smooth contact. The discontinuous solutions of the Lamé equation are used for the definition of the displacements and stresses of the scattered field. The formulae for the full transverse sections for the purpose of researching of the diffracted wave field by the inclusion are obtained.

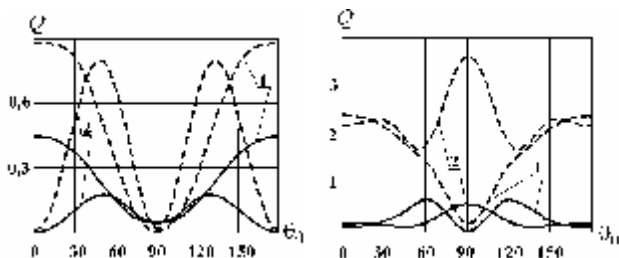


Рис. 1

Рис. 2

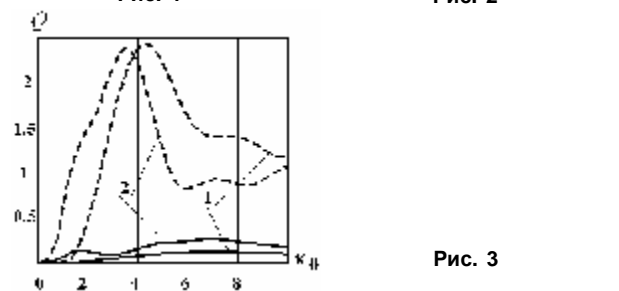


Рис. 3