УДК 539.3

О. Лесик

Математик,
Тернопільський національний
економічний університет,
м. Тернопіль

М. Марчук

Ст. наук. співр., д-р фіз.-мат. наук

В. Пакош

Канд. фіз.-мат. наук

Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
м. Львів

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТОНКИХ КОМПОЗИТНИХ ВИДОВЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ

На основі співвідношень уточненої теорії динамічного деформування оболонок отримано систему розв'язувальних рівнянь, яка описує малі вільні коливання податливих до трансверсальних зсуву та стиснення композитних видовжених циліндричних панелей. Знайдено аналітичний вираз для спектра власних частот і досліджено вплив параметрів зсуву та стиснення на їхні значення.

вільні коливання, циліндрична панель, зсув, стиснення

Тонкі видовжені циліндричні панелі знаходять широке застосування в конструкціях і технічних засобах різноманітного цільового призначення, що піддаються дії інтенсивних динамічних, зокрема циклічних навантажень [1]. З метою уникнення резонансних явищ в експлуатаційних умовах потрібно на стадії проектування визначити спектр власних частот вказаних конструктивних елементів.

Дефіцит і велика вартість традиційних матеріалів зумовлює заміну їх новими конструкційними, зокрема композитними, експлуатаційні властивості та міцнісні характеристики яких можна прогнозувати в широкому діапазоні на стадії проектування та регулювати в процесі виготовлення.

Найхарактернішою особливістю деформування тонкостінних оболонок з композитів, поряд з анізотропією пружних властивостей, є податливість до трансверсальних зсуву та стиснення. Наявні в літературі дослідження з вільних коливань композитних тонкостінних елементів конструкцій проводились або із застосуванням числових методів [4], або лише з урахуванням податливості до трансверсального зсуву [5]. У запропонованій статті побудовано аналітичний розв'язок задачі знаходження спектру частот за малих поперечних вільних коливань податливих до трансверсальних зсуву та стиснення видовжених циліндричних панелей. Досліджено вплив параметрів зсуву та стиснення на значення власних частот.

1. Постановка задачі. Розглянемо видовжену композитну циліндричну панель товщини $2h$ з радіусом серединної поверхні R і кутом розхилу $2\varphi_0$ (див. рис. 1). Динамічний напружено-деформований стан такого тонкостінного елемента за відсутності масових та поверхневих сил описується співвідношеннями, що включають [2]:

— рівняння руху (рівноваги):

$$\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{1}{R}Q=2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{1}{R}N=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-Q=\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

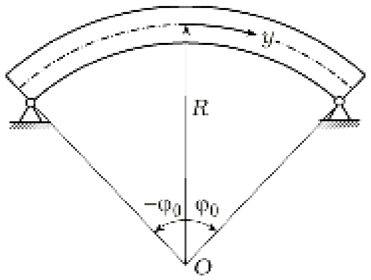


Рис. 1

— співвідношення пружності:

$$N=\bar{B}\varepsilon_1^0\,,\,M=\bar{D}\varepsilon_1^1,\,Q=\Lambda\varepsilon_{13}^0\,, \tag{2}$$

— деформаційні співвідношення:

$$\varepsilon_1^0=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{w}{R}\,,\,\varepsilon_1^1=\frac{\partial\gamma}{\partial y}\,,\,\varepsilon_{13}^0=\gamma+\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{u}{R}\,. \tag{3}$$

У рівностях (1) — (3) прийнято позначення: $y=R\varphi$, φ — кутова координата на серединній поверхні панелі; N — розтягуюча (стискаюча) сила вздовж кутової координати; M — згинальний момент; Q — перерізувальна сила; u — переміщення точок серединної поверхні вздовж тангенціальної координати y (див. рис. 1); γ — кут повороту нормального до серединної поверхні елемента перед деформуванням; w — переміщення точок серединної поверхні вздовж радіальної координати; $\bar{B}=2Eh(1+\alpha)/(1-\nu^2)$ — узагальнена жорсткість панелі на розтяг; $\bar{D}=h^2\bar{B}/3$ — узагальнена згинна жорсткість панелі; $\Lambda=2k'hG'$ — зсувна жорсткість панелі; $\alpha=\frac{(1+\nu)(\nu')^2}{1-\nu-2\nu\nu'}\frac{E}{E'}$; E,ν — модуль Юнга та коефіцієнт Пуасона в серединній та еквідистантних до неї поверхнях; E',ν' — ті ж величини в площинах, перпендикулярних до серединної поверхні; G' – трансверсальний модуль зсуву; ρ — густина матеріалу панелі; $k'=14/15$.

Граничні умови на видовжених торцях панелі ($y=\pm b_0=\pm R\varphi_0$) у випадку їх шарнірного закріплення на нижній лицевій поверхні (див. рис. 1) мають вигляд:

$$N(\pm b_0)=0\,,\;M(\pm b_0)=0\,,\;w(\pm b_0)=0\,. \tag{4}$$

Рівняння (1) разом зі співвідношеннями (2), (3) і граничними умовами (4) складають математичну модель, що описує процес малих вільних коливань розглянутої видовженої циліндричної панелі. Податливість матеріалу панелі до поперечного стиснення в цій моделі враховується наявністю у виразах для узагальнених жорсткісних характеристик коефіцієнта α, що залежить від трансверсальних пружних сталих E' та ν'.

2. Побудова розв'язку задачі. Почергова підстановка $(3)\to(2)\to(1)$ та нехтування інерцією повороту γ [3] приводить до системи рівнянь руху в узагальнених переміщеннях:

$$\bar{B}\left(u''+w'/R\right)+\frac{\Lambda}{R}\left(\gamma+w'-u/R\right)=2\rho h\ddot{u}, \tag{5}$$

$$\Lambda\left(\gamma'+w''-w'/R\right)-\frac{\bar{B}}{R}\left(u'+w/R\right)=2\rho\ddot{w}, \tag{6}$$

$$\bar{D}\gamma''-\Lambda(\gamma+w'-u/R)=0\,. \tag{7}$$

Тут і надалі штрихом позначено похідну за y, а крапкою — за t.

З рівняння (7) отримуємо вираз для тангенціального переміщення u:

$$u=R\left(\gamma+w'-\gamma''/\kappa^2\right), \tag{8}$$

де $\kappa^2=\Lambda/\bar{D}$.

Підстановка рівності (8) у рівняння (5) і (6) дає можливість отримати систему розв'язувальних рівнянь задачі про малі власні коливання розглянутої панелі:

$$\begin{gathered}\gamma^{IV}+1/R^2\gamma^{II}=3\left(2\ddot{w}-\ddot{\gamma}-\ddot{\gamma}^{II}/\kappa^2\right)/\left(c_1^2h^2\right),\\ \gamma^{IV}-1/R^2\gamma^{II}-6(\gamma^{II}-\gamma^{IV}/\kappa^2+w^{III}+\\ +1/Rw)/h^2=3(\ddot{\gamma}^{II}/\kappa^2-\ddot{w})/(c_1^2h^2\,).\end{gathered} \tag{9}$$

У рівняннях (9) $c_1=\sqrt{2h\rho/\bar{B}}$ — швидкість поширення хвиль вздовж кільцевої координати.

Для задоволення двох останніх граничних умов з (4) розв'язок системи рівнянь (9) шукаємо у вигляді:

$$w=\left(\sum_{n=0}^{\infty}w_n\,cos\lambda_n y\right)e^{i\omega t},\;\gamma=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\,sin\lambda_n y\right)e^{i\omega t}, \tag{10}$$

де $\lambda_n=k_n/R$, $k_n=\frac{2n+1}{2}\pi/\varphi_0$, ω — шукана частота коливань.

Оскільки з врахуванням виразу для N та рівності (8) маємо

$$N=\bar{B}\left[R\left(\gamma'+w''-\gamma'''/\kappa^2\right)+w/R\right],$$

то перша рівність з (4) задовольняється автоматично. Для інших типів граничних умов потрібно використовувати складніші розкладання для функцій w та γ за координатою y, як і у випадку задач про мале статичне поперечне деформування.

Після підстановки (10) у (9) та прирівнювання до нуля визначника для кожної незалежної підсистеми для визначення величини $\mu_n=\omega_n/c_1$ маємо біквадратне рівняння:

$$\mu_n^4-\frac{2\left(1+k_n^2\right)}{R^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon^2k_n^2}{6}\frac{1}{1+\varepsilon^2k_n^2/\bar{\kappa}^2}\right]\mu_n^2+$$

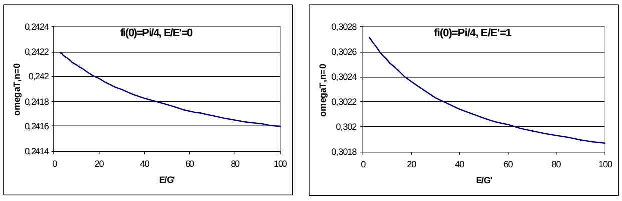
$$+\frac{\varepsilon^2k_n^2}{3}\frac{1}{R^4}\frac{\left(k_n^2-1\right)^2}{1+\varepsilon^2k_n^2/\bar{\kappa}^2}=0\,.$$

Тут $\bar{\kappa}^2=h^2\kappa^2$.

Таблиця 1

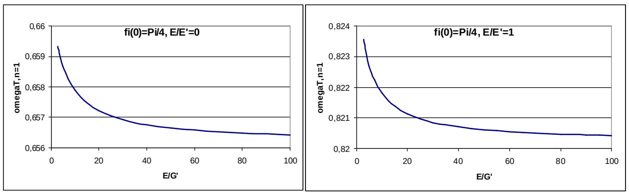
Значення безрозмірних власних частот

E/E'	$\bar{\omega}_n$		
	$\bar{\omega}_0$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$
0	0.242196	0.659325	1.087975
1	0.302707	0.823562	1.358710



а) б)

Рис. 2



а) б)

Рис. 3

Звідси для спектру безрозмірних власних частот

$$\bar{\omega}_n = \omega_n h\sqrt{\rho/E},\; n = 0,1,2. ...$$

отримуємо вираз

$$\bar{\omega}_n = \frac{\varepsilon\;\; a_n}{\sqrt{(1-\nu^2)}}, \tag{11}$$

де $\varepsilon = h/R$, $a_n^2 = (1+k_n^2)\Big[1+\alpha+\eta_n^2 +$

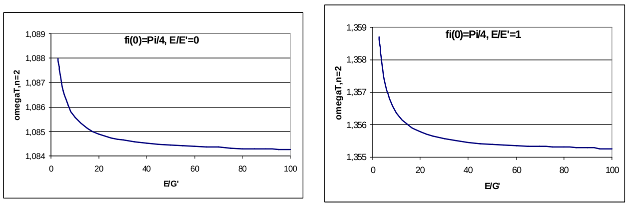
$$+\sqrt{(1+\alpha)^2+\eta_n^4+(1+\alpha)\;\;\eta_n^2\;\;\bar{k}_n}\Big]/2,$$

$$\eta_n^2 = \left(k_n^2\;\;\varepsilon^2/3\right)/\left[1/(1+\alpha)+\beta_n^2/\delta^2\right],$$

$$\beta_n^2 = k_n^2\left[\varepsilon^2(E/G')/k'\right],\; \delta^2 = 3(1-\nu^2),$$

$$\bar{k}_n = 2\left(6/k_n^2 - 1/k_n^4 - 1\right)/\left(1+1/k_n^2\right)^2.$$

3. Аналіз числових результатів та висновки. Розрахунки проводились за формулою (11) для спектру безрозмірних власних частот коливань циліндричної панелі з кутом розхилу $2\varphi_0 = \pi/2$. У табл. 1 наведені значення безрозмірних власних частот $\bar{\omega}_n$ для $n = 0,1,2$ при $h/R = 0.1$ та $\nu = 0.375$. Верхній рядок таблиці відповідає значенням за відсутності трансверсального стиснення ($E/E' = 0$), а нижній – при однакових модулях Юнга в радіальному та кільцевому напрямах ($E/E' = 1$). Спостерігається істотне збільшення значень власних



а) б)

Рис. 4

частот, а, відповідно, й підвищення жорсткості циліндричної панелі, при $E/E' = 1$ в порівнянні з випадком, коли $E/E' = 0$.

На рис. 2 — рис. 4 наведено залежності безрозмірних власних частот $\bar{\omega}_n$, $n = 0,1,2$ від параметра податливості до трансверсального зсуву E/G', де а) відповідає значенню $E/E' = 0$, а б) — значенню $E/E' = 1$.

Як видно з графіків, збільшення параметра E/G', а відповідно зменшення трансверсальної зсувної жорсткості розглянутої панелі, приводить до зниження значень її власних частот коливань.

У подальшому відповідні дослідження доцільно проводити для інших класів оболонок, де можна отримати аналітичні розв'язки, які становлять певний практичний інтерес і можуть бути тестовими для апробації числових методів.

Література

1. *Вольмир А. С., Куранов Б. А., Турбаивский А. Т.* Статика и динамика сложных структур. — М.: Машиностроение, 1989. — 248 с.

2. *Марчук М. В.* Нелінійне деформування і коливання податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок // Машинознавство. — 2005. — №10 (100). — С. 9—14.

3. *Осадчук В. А., Марчук М. В.* Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2005. — Вип. 3. — С. 43—50.

4. *Haldar S.* Free vibration of composite skewed cylindrical shell and panel by finite element method // J. Sound and Vibr. — 2008. — 311. — P. 9—19.

5. *Kurpa L. V., Timchenko G. N.* Studying the free vibrations of multilayer plates with a complex planform // Int. Appl. Mech. — 2006. — 42, No 1. — P. 103—109.

Отримана 10.11.08

O. Lesyk[1], M. Marchuk[2], V. Pakosh[2]

Free vibrations of thin composite elongated cylindrical panel

[1]*Ternopil National Economic University, Ternopil;*
[2]Pidstryhach Institute for Applied Problem of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine

On the base the relations of refined theory for dynamic deformation of shells describing small free vibrations of pliability to transversal shear and compression composite elongated cylindrical panels the solving system of equations is obtained. Analytical expression for spectrum of fundamental frequencies is found and the influence of shear and compression parameters on their values is studied.