

І. Блехман

Професор, д-р фіз.-мат. наук,
Інститут проблем машинознавства
РАН, НПК «Механобр-техніка»,
м. Санкт-Петербург, Росія

Т. Ярошевич

Аспірант,
Луцький національний
технічний університет,
м. Луцьк, Україна

УДК 621.9.048.6

ПРОХОДЖЕННЯ РЕЗОНАНСНОЇ ЗОНИ ІНЕРЦІЙНО – ЗБУРЮВАЛЬНИМИ ВІБРАЦІЙНИМИ ПРИСТРОЯМИ З КІЛЬКОМА СТУПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ

Розглядається задача про рух інерційного віброзбудника під час проходження зони резонансу у випадку, коли коливальна частина системи являє собою тримке (несуче) тіло, що здійснює малі плоско-паралельні коливання. Отримано вираз для вібраційного моменту й рівняння напівповільних коливань ротора збудника. Звертається увага на можливість складної поведінки системи в діапазоні між частотами власних коливань системи.

коливальна система, дебалансний віброзбудник, зона резонансу, вібраційний момент

У вібраційних технологічних машинах і пристроях великого розповсюдження набув інерційний (дебалансний) привід, завдяки простоті й можливості отримання значних змушуючих збурювальних сил за невеликих габаритів і відносно малої маси. Машини з інерційними віброзбудниками переважно є зарезонансними. При роботі в усталеному режимі таким машинам властива достатньо висока стабільність. Проте, в періоди розбігу та вибігу виникає проблема проходження зони резонансних частот. Зокрема, під час пуску можливе «зависання» частоти обертання ротора двигуна поблизу однієї з власних частот, тобто виникнення ефекту Зомерфельда. У такому разі проходження резонансної зони пов'язане зі значними коливаннями в системі й, відповідно, динамічними навантаженнями на елементи конструкції; крім цього, потрібна завищена потужність електродвигуна.

Ефект Зомерфельда розглядається різними методами в багатьох працях, огляд яких можна знайти в [1 — 7], а також у [8 — 10]. Строге дослідження ефекту Зомерфельда методом Пуанкаре було виконано в [1]. У праці

[4] показано, що теоретичне пояснення й кількісний опис відомих закономірностей ефекту Зомерфельда досить просто отримати шляхом використання методу прямого розділення рухів. У [7] задачу для випадку коливальної системи з одним ступенем вільності розв'язано методом послідовних наближень у поєднанні з методом прямого розділення рухів. Показано, що за такого грубішого, ніж у відомих працях підходу, порівняно просто можна отримати опис поведінки системи як у до-, так і в зарезонансній області частот обертання ротора.

Розгляд динаміки проходження резонансу вібраційними машинами з інерційним збуренням коливань важливий при проектуванні систем керування пуском. Такі системи дають змогу істотно понизити потужність електроприводу, потрібну для подолання резонансної зони [11].

Схема системи та рівняння руху. Широкий клас вібраційних машин і пристроїв може бути ідеалізований у вигляді системи, схематично наведеної на рис. 1. Тримке тіло (віброуючий орган машини), вважається за абсолютно

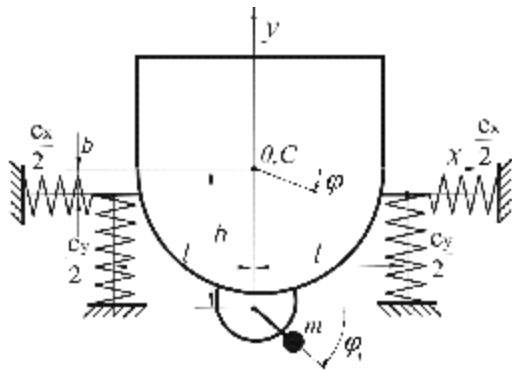


Рис. 1. Схема коливальної системи з плоским рухом робочого органа

тверде тіло, яке може здійснювати малі плоскопаралельні коливання, тобто має, у загальному випадку, три коливальні ступені вільності. З нерухою основою тримке тіло зв'язане системою пружних і демпфувальних елементів. На ньому встановлено незрівноважений ротор, який приводиться в обертання асинхронним електродвигуном або двигуном постійного струму. Вісь ротора збудника перпендикулярна площині, паралельно до якої відбувається рух тримкового тіла.

Нехай x та y — координати центра мас C в нерухомій системі координат xOy , а φ, φ_1 — кути повороту тримкового тіла й ротора збудника. Диференціальні рівняння руху розглянутої коливальної системи запишемо у вигляді:

$$I\ddot{\varphi}_1 = L(\dot{\varphi}_1) - R(\dot{\varphi}_1) + m\varepsilon(\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1); \quad (1)$$

$$M\ddot{x} + \beta_x \dot{x} + c_x x = m\varepsilon(\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1),$$

$$M\ddot{y} + \beta_y \dot{y} + c_y y = m\varepsilon(\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1),$$

$$J\ddot{\varphi}_1 + \beta_\varphi \dot{\varphi}_1 + c_\varphi \varphi_1 = -m\varepsilon h(\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1), \quad (2)$$

де M, J — сумарна маса тримкового тіла та його момент інерції відносно осі, яка проходить через центр мас; I — сумарний момент інерції ротора віброзбудника відносно його осі обертання; m, ε — відповідно, маса збудника та його ексцентриситет; $\beta_x, \beta_y, \beta_\varphi$ — коефіцієнти в'язкого опору; c_x, c_y — поздовжні жорсткості горизонтальних і вертикальних пружин; $c_\varphi = c_y l^2 + c_x b^2$; l, b — параметри, які визначають положення точок кріплення верхніх кінців пружин відносно центра мас тримкового тіла; h — відстань від центра мас тримкового тіла до осі ротора збудника; $L(\dot{\varphi}_1), R(\dot{\varphi}_1)$ — обертальний момент двигуна та момент сил опору обертанню.

Записуючи рівняння (2), для спрощення вважали, що осі x та y є «головними» як щодо жорсткостей, так і щодо коефіцієнтів в'язкого опору, тобто що «перехресні» значення параметрів $c_{xy}, \dots, \beta_{xy}, \dots$ дорівнюють нулю; вважалось також, що поперечні жорсткості пружних елементів є незначними. Дослідження загальнішого випадку не викликає принципових ускладнень, проте пов'язане з громіздкішими викладками.

Перше наближення, особливості прояву ефекту Зоммерфельда в системі. Для дослідження руху ротора

дебалансного віброзбудника під час проходження зони резонансу скористаємося методом прямого розділення рухів [4]. Відповідно до основної передумови методу припустимо, що розглянуті рухи можуть бути подані у вигляді

$$\varphi_1 = \omega t + \psi(t, \omega t), \quad q_i = q_i(t, \omega t), \quad (3)$$

де $\omega = \omega(t)$ — повільна, а ψ і $q_i = x, y, \varphi$ — швидкі функції часу, причому вони є 2π -періодичними за $\tau = \omega t$ і їхні середні значення в цей період дорівнюють нулю:

$$\langle \psi(t, \tau) \rangle = 0, \quad \langle q_i(t, \tau) \rangle = 0; \quad (4)$$

припускаємо також, що $\omega \ll \omega$. У формулі (4) і далі в тексті кутові дужки вказують на усереднення за період $T = 2\pi$ за швидким часом τ .

Таке подання розв'язків рівнянь (1), (2) при дослідженні проходження ротором віброзбудника зони резонансу, коли спостерігається ефект Зоммерфельда, і, відповідно, частота обертання ротора $\dot{\varphi}_1$ змінюється досить повільно, вважається правомірним; нижче воно буде перевірене «апостеріорі».

Підставимо перший вираз (3) у вихідне диференціальне рівняння (1) і усереднимо його праву та ліву частини за швидким часом τ . Далі, віднявши отримане співвідношення від вихідного, прийдемо до такої системи інтегро-диференціальних рівнянь повільних і швидких рухів ротора віброзбудника:

$$I\ddot{\varphi}_1 = L(\dot{\varphi}_1) - R(\dot{\varphi}_1) + \langle \Phi(\dot{\varphi}_1, \varphi_1) \rangle, \quad (5)$$

$$I\ddot{\varphi}_1 + k\dot{\varphi}_1 = \Phi(\dot{\varphi}_1, \varphi_1) - \langle \Phi(\dot{\varphi}_1, \varphi_1) \rangle, \quad (6)$$

де

$$\Phi(\dot{\varphi}_1, \varphi_1) = m\varepsilon[(\dot{\varphi}_1 - h\dot{\varphi}_1)\sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1].$$

Для отримання цієї системи виконано лінеаризацію виразів $L(\dot{\varphi}_1), R(\dot{\varphi}_1)$, як в [1], поблизу значення $\dot{\varphi}_1 = \omega$ (де ω — частота «зависання» ротора), причому

$$k = -\left. \frac{d(L-R)}{d\dot{\varphi}_1} \right|_{\dot{\varphi}_1=\omega} > 0$$
 — сумарний коефіцієнт

демпфування.

Згідно з методом прямого розділення рухів спочатку знаходять наближені періодичні розв'язки рівнянь швидких рухів (2), (6) за сталих («заморожених») $\omega(t), \dot{\varphi}_1(t)$.

Як і в працях [4, 7], за перше наближення візьмемо $\psi = \psi^{(1)} = 0, \varphi_1 = \varphi_1^{(1)} = \omega t$ і відповідний періодичний розв'язок рівнянь (2):

$$x = x^{(1)} = A_x^{(1)} \cos(\omega t + \gamma_x), \quad y = y^{(1)} = A_y^{(1)} \sin(\omega t + \gamma_y),$$

$$\varphi = \varphi^{(1)} = A_\varphi^{(1)} \cos(\omega t + \gamma_\varphi), \quad (7)$$

$$\text{де } A_x^{(1)} = \frac{m\varepsilon}{MB_x}, \quad B_x = \sqrt{(1-\lambda_x^2)^2 + 4n_x^2}, \quad \lambda_x = \frac{p_x}{\omega},$$

$$p_x = \sqrt{\frac{c_x}{M}}, \quad n_x = \frac{\beta_x}{2M\omega}, \quad \sin \gamma_x = -\frac{2n_x}{B_x},$$

$$A_y^{(1)} = -\frac{m\epsilon}{MB_y}, \quad B_y = \sqrt{(1-\lambda_y^2)^2 + 4n_y^2}, \quad \lambda_y = \frac{p_y}{\omega},$$

$$p_y = \sqrt{\frac{c_y}{M}}, \quad n_y = \frac{\beta_y}{2M\omega}, \quad \sin \gamma_y = -\frac{2n_y}{B_y},$$

$$A_\phi^{(1)} = -\frac{m\epsilon h}{JB_\phi}, \quad B_\phi = \sqrt{(1-\lambda_\phi^2)^2 + 4n_\phi^2}, \quad \lambda_\phi = \frac{p_\phi}{\omega},$$

$$p_\phi = \sqrt{\frac{c_\phi}{J}}, \quad n_\phi = \frac{\beta_\phi}{2J\omega}, \quad \sin \gamma_\phi = -\frac{2n_\phi}{B_\phi}. \quad (8)$$

Підставивши розв'язок (7) у праву частину рівняння повільних рухів (5) і виконавши усереднення, отримуємо наближену формулу для, так званого, вібраційного моменту [1, 2, 4]:

$$V^{(1)}(\omega) = -(m\epsilon\omega)^2 \left[\frac{n_x}{MB_x^2} + \frac{n_y}{MB_y^2} + \frac{h^2 n_\phi}{J B_\phi^2} \right]. \quad (9)$$

При $\lambda_y = \lambda_\phi \rightarrow \infty$, тобто у випадку тримкого тіла з одним ступенем вільності, формула (9), як і має бути, збігається з відповідною формулою праці [7] (слід врахувати, що $n_x = n/\omega$, де через n , відповідно до праці [7], позначено величину $\beta/2M$).

Всі доданки у (9) є від'ємними. Отже, як і для системи з одним коливальним ступенем вільності, вібраційний момент завжди є гальмівним, тобто додатковим динамічним навантаженням на ротор двигуна; його залежність від частоти має резонансний характер, і тому гальмівна дія проявляється в порівняно вузькому діапазоні частот.

Враховуючи однотипність доданків у (9), за аналогією з [1, 4], вираз (9) для вібраційного моменту, що діє на ротор вібробудника, можна розглядати як суму

$$V^{(1)}(\omega) = \sum_{q=x,y,\phi} v_q, \quad \text{доданки якої}$$

$$v_q = -(m\epsilon\omega)^2 \frac{n_q}{M_q B_q^2}, \quad (10)$$

є «частковими» вібраційними моментами, що характеризують дію q -го коливального руху (коливальної координати) на обертання ротора збудника (тут, якщо $q = x$ або $q = y$, то $M_q = M$; якщо $q = \phi$, то $M_q = M\rho^2/h^2$).

Зауважимо, що вираз (10) для «часткового» вібраційного моменту можна подати у вигляді

$$v_q = \frac{1}{2} F a_q \sin \gamma_q,$$

де $F = m\epsilon\omega^2$ — амплітуда збурювальної сили, що розвивається ротором збудника за нерухомого тримкого тіла,

$$a_q = \frac{m\epsilon}{M_q \sqrt{(1-\lambda_q^2)^2 + 4n_q^2}} \quad \text{— амплітуда коливань тримкого тіла, яка відповідає } q\text{-тій коливальній координаті.}$$

Як часткові, так і загальний вібраційні моменти характеризують вібраційний зв'язок між коливальними рухами тримкого тіла та обертальним рухом ротора вібробудника.

Відповідно до формул (9), (10), гальмівна дія вібрації під час розбігу тим менша, чим більший опір системи за коливальними координатами x, y, ϕ (як і для системи з одним ступенем вільності). На рис. 2 наведено залежність вібраційного моменту від коефіцієнта в'язкого опору β ($\beta = \beta_x = \beta_y / 1,1 = \beta_\phi / 0,05$) під час проходження резонансної зони частот x, y, ϕ для системи з трьома коливальними ступенями вільності. Графік показує, що в області резонансних частот ($p_x = 30 \text{ c}^{-1}$, $p_y = 35 \text{ c}^{-1}$, $p_\phi = 44 \text{ c}^{-1}$) за відносно великих коефіцієнтів демпфування ($\beta \leq 300 \text{ кг/с}$) вібраційний момент збільшується не так істотно, як за малих ($\beta \leq 100 \text{ кг/с}$); в останньому випадку майже непомітні резонансні максимуми, що відповідають кожній з координат.

Підкреслимо, що величина максимального гальмівного вібраційного моменту відповідно до (8) і (9) істотно залежить від частот власних коливань системи: зменшуючи власні частоти, можна зменшити гальмівний момент і, як наслідок, знизити резонансні амплітуди коливань, а також потужність двигуна, потрібну для проходження резонансної частоти.

Зважаючи на залежність вібраційного моменту від власних частот, можна припустити, що найбільш значну гальмівну дію чинить частковий вібраційний момент v_ϕ , в якого частота p_ϕ для цього класу вібраційних машин, як правило, найвища (зазвичай $p_\phi > p_x \approx p_y$; $p_\phi \approx p_y l / \rho$, $l > \rho$). Так, наприклад, у разі застосування демпфера для зниження рівня коливань під час проходження через резонанс, може бути достатньо встановлення лише демпфера поворотних коливань.

Оскільки зміна складових вібраційного моменту має сильно резонансний характер, то відповідно до (9), частоти p_x, p_y, p_ϕ бажано вибирати різними, щоб у такий спосіб розвести в часі максимуми гальмівного вібраційного моменту, які відповідають горизонтальним, вертикальним і поворотним коливанням тримкого тіла.

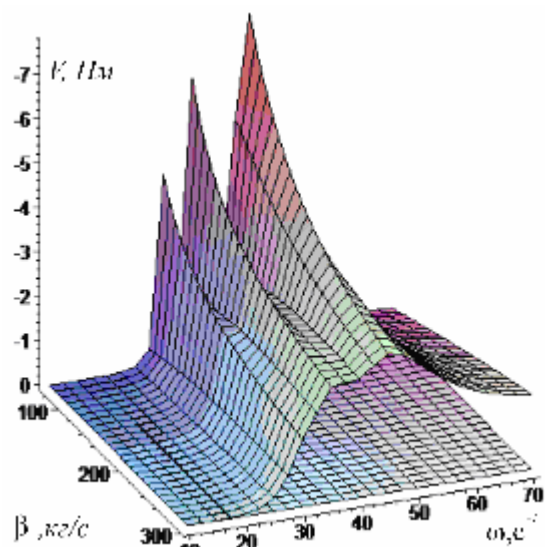


Рис 2. Залежність вібраційного моменту від частоти й коефіцієнтів опору β

Розглянемо частковий випадок системи, коли вісь незрівноваженого ротора проходить через центр мас робочої камери (рис. 3). При цьому вісь збудника й місця кріплення пружин до робочої камери розміщуються в одній площині ($b \approx 0$). Отже, тримке тіло здійснює лише поступальний рух у площині xOy .

Тоді, відповідно до (9), отримуємо такий вираз для вібраційного моменту:

$$V^{(1)}(\omega) = -\frac{(m\epsilon\omega)^2}{M} \left[\frac{n_x}{B_x^2} + \frac{n_y}{B_y^2} \right]. \quad (11)$$

Зокрема, коли $c_x \approx c_y, \beta_x \approx \beta_y$, маємо

$$V^{(1)}(\omega) = -2 \frac{(m\epsilon\omega)^2}{M} \frac{n_x}{(1-\lambda_x^2)^2 + 4n_x^2}. \quad (12)$$

Ця формула відрізняється від наведеної в [4] лише коефіцієнтом 2. Отже, у випадку плоских коливань симетричної системи величина вібраційного моменту вдвічі більша, ніж в разі прямолінійних коливань.

Друге наближення. Напівповільні коливання ротора збудника. Для подальшого аналізу руху ротора віброзбудника під час проходження резонансної зони скористаємося методикою, запропонованою в [7] для дослідження найпростішої системи.

За наступне наближення візьмемо $\varphi_1 = \varphi_1^{(2)} = \omega t + \psi$, $q_i = q_i^{(1)} + q_i^{(2)}$. Тоді приходимо до такої системи рівнянь для Ψ та $x^{(2)}, y^{(2)}, \varphi^{(2)}$:

$$I\ddot{\Psi} + k\dot{\Psi} = m\epsilon \left\{ \left[(\ddot{x}^{(1)} + \ddot{x}^{(2)}) - (\ddot{\varphi}^{(1)} + \ddot{\varphi}^{(2)})h \right] \sin(\omega t + \psi) + \right. \\ \left. + (\ddot{y}^{(1)} + \ddot{y}^{(2)}) \cos(\omega t + \psi) \right\} - \\ - m\epsilon \left\langle (\ddot{x}^{(1)} - \ddot{\varphi}^{(1)})h \sin \omega t + \ddot{y}^{(1)} \cos \omega t \right\rangle,$$

$$M\ddot{x}^{(2)} + \beta_x \dot{x}^{(2)} + c_x x^{(2)} = m\epsilon \left[(\ddot{\varphi}^{(1)} + \ddot{\varphi}^{(2)}) \sin(\omega t + \psi) + \right. \\ \left. + (\omega + \dot{\varphi}^{(1)})^2 \cos(\omega t + \psi) - \omega^2 \cos \omega t \right],$$

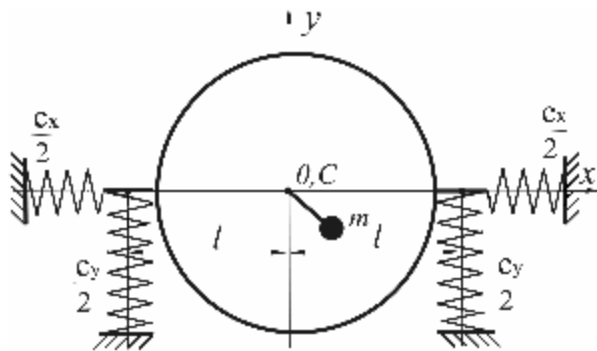


Рис. 3. Коливальна система з центрально встановленим віброзбудником

$$M\ddot{y}^{(2)} + \beta_y \dot{y}^{(2)} + c_y y^{(2)} = m\epsilon \left[(\ddot{\varphi}^{(1)} + \ddot{\varphi}^{(2)}) \cos(\omega t + \psi) + \right. \\ \left. + (\omega + \dot{\varphi}^{(1)})^2 \sin(\omega t + \psi) + \omega^2 \sin \omega t \right],$$

$$J\ddot{\varphi}^{(2)} + \beta_\varphi \dot{\varphi}^{(2)} + c_\varphi \varphi^{(2)} = m\epsilon h \left[(\ddot{\varphi}^{(1)} + \ddot{\varphi}^{(2)}) \sin(\omega t + \psi) + \right. \\ \left. + (\omega + \dot{\varphi}^{(1)})^2 \cos(\omega t + \psi) - \omega^2 \cos \omega t \right]. \quad (13)$$

Для розв'язання системи (13) знову використовуємо метод прямого розділення рухів, припустивши, що:

$$\Psi = \Psi + \gamma, \quad x^{(2)} = X + \delta_x, \\ y^{(2)} = Y + \delta_y, \quad \varphi^{(2)} = \Phi + \delta_\varphi, \quad (14)$$

де Ψ, X, Y, Φ — повільні, а $\gamma, \delta_x, \delta_y, \delta_\varphi$ — швидкі 2π -періодичні за швидким часом τ складові з нульовими середніми значеннями.

Перейдемо до рівнянь повільних і швидких рухів. У межах використовуваного методу рівняння швидких рухів можна розв'язувати наближено, не припускаючись значної похибки в рівняннях повільних рухів. Достатньо спростити задачу, отримавши рівняння повільних рухів для змінної Ψ з припущенням, що швидка змінна γ мала порівняно з Ψ , а величини $x^{(2)}, y^{(2)}, \varphi^{(2)}$ малі порівняно з $x^{(1)}, y^{(1)}, \varphi^{(1)}$ [7]. Підставивши перший вираз (14) у перше рівняння системи (13), прийдемо до такого рівняння для повільної (точніше, напівповільної) складової Ψ :

$$I\ddot{\Psi} + k\dot{\Psi} = m\epsilon \left\langle (\ddot{x}^{(1)} - h\ddot{\varphi}^{(1)}) \sin(\omega t + \Psi) + \ddot{y}^{(1)} \cos(\omega t + \Psi) - \right. \\ \left. - \left\langle (\ddot{x}^{(1)} - h\ddot{\varphi}^{(1)}) \sin \omega t + \ddot{y}^{(1)} \cos \omega t \right\rangle \right\rangle. \quad (15)$$

Виконавши усереднення в правій частині (15) з врахуванням виразів (7) і (8), подамо це рівняння у формі, отриманій у [7] для системи з прямолінійними коливаннями тримкого тіла:

$$\ddot{\Psi} + 2n_1 \dot{\Psi} + B \sin \Psi - P \sin^2 \frac{\Psi}{2} = 0, \quad (16)$$

тут $2n_1 = k/I$, $B = \sum_{q=x,y,\varphi} b_q$, $P = \sum_{q=x,y,\varphi} \rho_q^2$,

$$b_q = \frac{(m\epsilon\omega^2)^2}{2MI} \frac{p_q^2 - \omega^2}{(p_q^2 - \omega^2)^2 + 4n_q^2\omega^4}, \\ \rho_q^2 = \frac{(m\epsilon\omega^2)^2}{MI} \frac{2n_q\omega^2}{(p_q^2 - \omega^2)^2 + 4n_q^2\omega^4}. \quad (17)$$

Зазначимо, що рівняння (16), як і в [7], є рівнянням повільних (або напівшвидких) коливань кутової швидкості ротора збудника щодо рівномірного обертання (рівнянням коливань «внутрішнього маятника»); для випадку розглянутих малих коливань, лінеаризувавши рівняння (16), його можна подати у класичному вигляді $\ddot{\Psi} + 2n_1 \dot{\Psi} + B\Psi = 0$.

За виконання умови $\omega \ll \omega^2$ частота обертання ротора ω змінюється повільно й величина $q = \sqrt{|B|}$ є частотою малих вільних коливань лінеаризованої моделі внутрішнього маятника (без врахування сили опору).

Нехай $n_x \approx n_y$, $p_x \approx p_y$, $n_x \approx n_y$, $p_x \approx p_y$, тоді вираз для коефіцієнта B можна подати у вигляді

$$B = b_x \left(2 + z_b \frac{h^2}{r^2} \right), \quad (18)$$

$$\text{де } z_b = \frac{p_\phi^2 - \omega^2}{p_x^2 - \omega^2} \frac{(p_x^2 - \omega^2)^2 + \beta_x^2 \omega^2 / M^2}{(p_\phi^2 - \omega^2)^2 + \beta_\phi^2 \omega^2 / J^2}.$$

Зазначимо, якщо p_x — найменша з власних частот, то $z_b \leq 1$. З аналізу формул (17), (18) випливає, що для системи з плоским рухом робочого органа, частота q напівповільних вільних коливань швидкості ротора, в разі відносної близькості усіх власних частот, приблизно в $\sqrt{3}$ разів вища за частоту q_x для системи з одним коливальним ступенем вільності. До того ж, нескладно встановити, що чим вища будь-яка з власних частот, тим менший її внесок у величину q ; максимального значення частота q набуває в разі рівності всіх власних частот.

На рис. 4 подано графіки зміни частоти q в дорезонансній зоні ($p_x = 30 \text{ c}^{-1}$, $p_y = 30 \text{ c}^{-1}$, $p_\phi = 44 \text{ c}^{-1}$) для систем з одним, двома, і трьома коливальними ступенями вільності.

На рис. 5 наведено графіки зміни частоти q в дорезонансній зоні для систем з трьома коливальними ступенями вільності для різних значень коефіцієнтів в'язкого опору $\beta = \beta_x = \beta_y / 1,1 = \beta_\phi / 0,05$.

Висновки, зроблені в [7] щодо справедливості рівняння (16) для системи з одним коливальним ступенем вільності, стосуються також випадку системи з двома і трьома ступенями вільності. Так, відповідно до [7], для справедливості рівняння (16) потрібно, щоб частота q була значно нижчою за ω , тобто щоб виконувалося припущення про відносні темпи зміни функцій Ψ та $x^{(2)}$, $y^{(2)}$, $\phi^{(2)}$. При цьому практично достатньо, щоб виконувалася нерівність $q / \omega < 1/3$. Тоді, наприклад, для розглянутої системи з двома коливальними ступенями вільності (рис. 3) нескладно прийти до умови справедливості рівняння (16) для будь-яких $\lambda = \omega / p$ у вигляді

$$\frac{2}{9} v(1+v) > \eta^2,$$

$$\text{де } v = \frac{n_x}{p_x}, \quad \eta = \frac{m\epsilon}{\sqrt{2MI}}.$$

Остання нерівність у розмірній формі має вигляд

$$\frac{m^2 \epsilon^2}{MI} < \frac{2 \beta_x}{9 M p_x}. \quad (19)$$

Зазначимо, що ця нерівність відрізняється від отриманої в [7] лише числовим коефіцієнтом.

Продовжимо аналіз рівняння (16). За $B > 0$ стійким є розв'язок $\Psi = \Psi_1 = 0$, $\Psi = \Psi_1 = 0$, що відповідає «ниж-

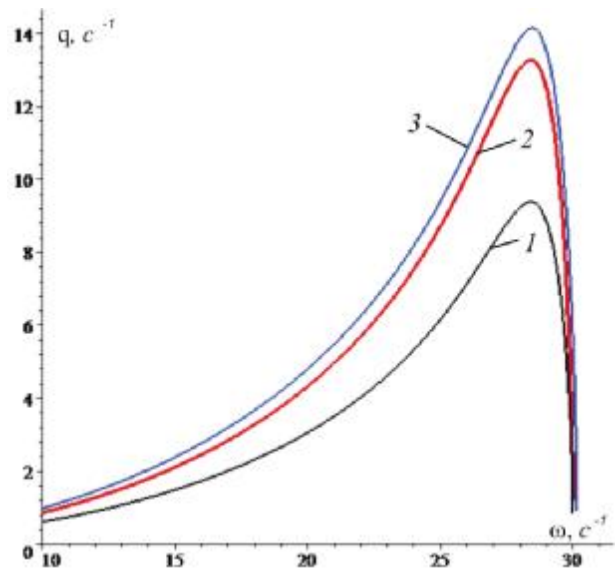


Рис. 4. Зміна частоти напівповільних вільних коливань внутрішнього маятника в разі системи з одним (1), двома (2) і трьома (3) коливальними ступенями вільності

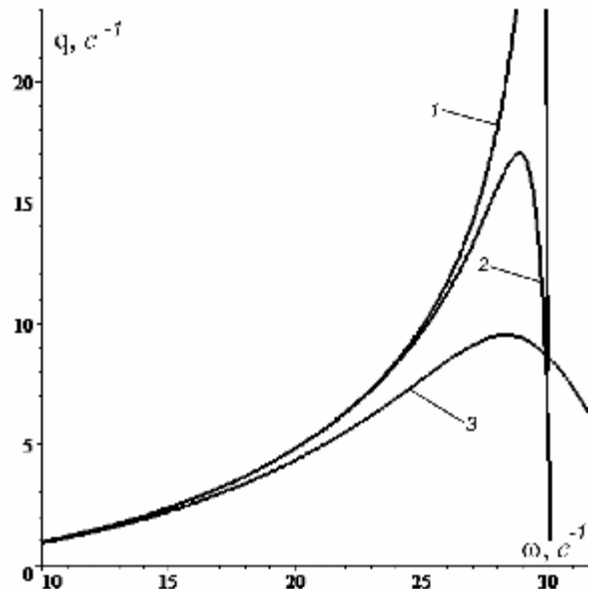


Рис. 5. Зміна частоти напівповільних[повільних] вільних коливань внутрішнього маятника в разі[в разі] системи з[із] трьома коливальними ступенями вільності для різних значень коефіцієнтів в'язкого опору: 1 — $\beta = 30 \text{ кг/с}$; 2 — $\beta = 100 \text{ кг/с}$; 3 — $\beta = 300 \text{ кг/с}$

ньому» положенню внутрішнього маятника, а за $B < 0$ — розв'язок $\Psi = \Psi_2 = \pi$, $\Psi = \Psi_2 = p$, що відповідає «верхньому» положенню. Тому в дорезонансній зоні зміни частоти $\omega < p_{min}$, де p_{min} — найменше серед значень p_x, p_y, p_ϕ , стійким є розв'язок $\Psi_1 = 0$, $\Psi_1 = 0$, а в зарезонансній — розв'язок $\Psi_2 = 0$. Тому, як і в разі коливальної системи з одним ступенем вільності, можна зробити висновок, що в зарезонансній зоні частот $\omega > p_{max}$ внутрішній маятник перекидається. Істотною відмінністю розглянутої системи є те, що в проміжній зоні $p_{min} < \omega < p_{max}$ маятник може встигнути перекинутися

кілька разів. Іншими словами, у вказаній області можна очікувати складної поведінки системи. Природно, що такий ефект спостерігатиметься також у системах з будь-якою кількістю коливальних ступенів вільності.

Отримані результати підтверджуються числовим експериментом. На рис. 6 продемонстровано ефект виникнення напівповільних коливань кутової швидкості ротора збудника поблизу резонансної зони у випадку «зависання» ротора в резонансній зоні для системи з одним і двома коливальними ступенями вільності з параметрами: $M = 39$ кг, $m = 3,2$ кг, $c_x = c_y = 45000$ Н/м, $\beta_x = \beta_y = 135$ кг/с, $\varepsilon = 0,037$ м, $l = 0,23$ м, $I = 0,006$ кг.м.

Відповідно до наведених графіків, відношення частот напівповільних вільних коливань швидкості ротора збудника для таких коливальних систем становить приблизно 1,4, як і має бути за формулою (17).

На рис. 7 подано графіки напівповільних вільних коливань швидкості ротора у біларезонансній зоні для різних значень коефіцієнтів в'язкого опору β . За графіками, збільшення опору по коливальних координатах у 10 разів, призводить до зменшення частоти q приблизно в 1,4 рази. При цьому спостерігається значно помітніше збільшення темпу згасання коливань.

Зазначимо, що для розглянутої симетричної системи з двома ступенями вільності робочого органу відсутні швидкі коливання кутової швидкості обертання ротора з частотою 2ω , тоді як для системи з одним ступенем вільності вони добре помітні (див. рис. 6). Нескладно встановити, що для останньої системи відповідні коливання визначаються виразом

$$\dot{\varphi} = \frac{m^2 \varepsilon^2 \omega}{4IM \sqrt{(1 - \lambda_x^2)^2 + \beta_x^2 / M^2 \omega^2}} \cos 2\omega t; \text{ для системи ж з}$$

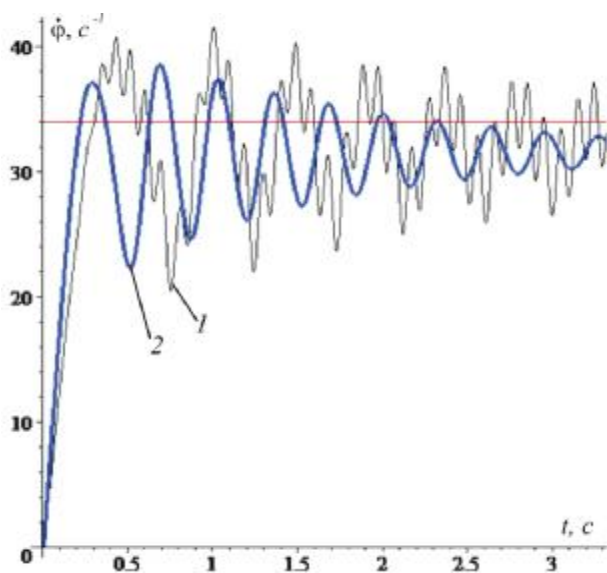


Рис. 6. Зміна частоти збудника при моделюванні розбігу в разі її «зависання» в резонансній зоні: 1 — система з одним коливальним ступенем вільності; 2 — система з двома ступенями вільності

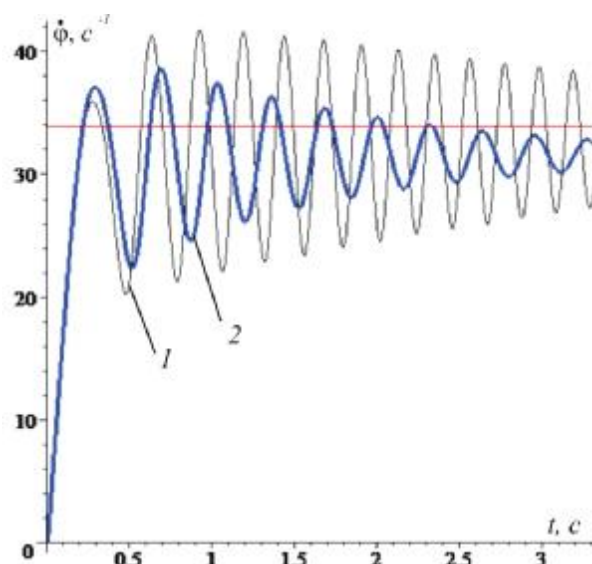


Рис. 7. Вплив в'язкого опору на частоту обертання ротора під час розбігу в разі «зависання» частоти в резонансній зоні (система з двома коливальними ступенями вільності): 1 — $\beta_x = \beta_y = 13,5$ кг/с; 2 — $\beta_x = \beta_y = 135$ кг/с

двома ступенями вільності (випадок $n_x = n_y$, $p_x = p_y$) — $\dot{\varphi} = 0$.

Висновки. У статті розглянуто задачу проходження зони резонансних частот під час розбігу та вибігу вібраційної машини з інерційним збуренням коливань. Досліджено випадок, коли коливальна частина системи лінійна і є тримким тілом, що здійснює плоскопаралельні коливання. Як і в найпростішому випадку системи з одним коливальним ступенем вільності, задача порівняно просто розв'язується з використанням методу прямого розділення рухів у поєднанні з методом послідовних наближень.

Вираз для гальмівного вібраційного моменту, який має подолати двигун під час проходження зони резонансу, складається, в такому разі, з трьох доданків, що відповідають кожній з трьох частот вільних коливань тримкого тіла. Ці доданки мають сильно виражений резонансний характер. Відповідно, з трьох доданків складається й отриманий вираз для квадрата частоти напівповільних коливань внутрішнього маятника («гойдань» ротора). Як і в найпростішій системі, під час проходження через резонансну частоту, цей маятник ніби перевертається: у дорезонансній зоні стійким є його «нижнє», а в зарезонансній — «верхнє» положення. У проміжку між найменшою та найбільшою резонансними частотами стійкі положення можуть чергуватися. Можна очікувати, що в цьому діапазоні система виявлятиме складну поведінку.

Особливістю розглянутої системи є відсутність швидких коливань ротора з подвійною частотою обертання в разі симетрії коливальної частини системи.

Проведене аналітичне дослідження виявило добру узгодженість з результатами числового моделювання.

Література

1. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. — М.: Наука, 1971. — 896 с.
2. Колебания нелинейных механических систем. Вибрации в технике. Справочник. Т.2 /Ред. И.И. Блехман. — М.: Машиностроение, 1978. — 551 с.
3. Алифов Ф.Ф., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. — М.: Наука, 1985. — 328 с.
4. Блехман И.И. Вибрационная механика. — М.: Физматлит, 1994. — 400 с.
5. Fildin A. Nonlinear Oscillations in Mechanical Engineering. — Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag, 2006. — 358 p.
6. Краснопольская Т.З., Швец А.Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. — Москва — Ижевск: НИИ «Регулярная хаотическая динамика», 2008. — 280 с.
7. Блехман И.И., Индейцев Д.А., Фрадков А.Л. Медленные движения в системах с инерционным возбуждением колебаний // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2008. — №1. — С. 25—31.
8. Rand R.H., Kinsey R.J., Mingori D.L. Dynamics of spin-up through resonance // Intern. J. of Nonlinear Mechanics. — vol. 27, N3. — 1992. — p. 489—502.

9. Balthazar J.M., Mook D.T., Weber H.I. et al. An overview on non-ideal vibrations // Meccanica 38 (6): 613-621, 2003.

10. Zhiber A. Quinn D.D. Resonance capture in a damped three-degree-of-freedom system: Experimental and analytical comparison // Intern. Of Nonlinear Mechanics, 41 (10): 1128-1142, 2006.

11. Томчин Д.А., Фрадков А.Л. Управление прохождением ротора через зону резонанса на основе метода скоростного градиента // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2005. — №5. — С. 66—71.

Отримана 22.09.08

I. Blekhman¹, T. Yaroshevich²

Passing through resonance zone by inertially excited vibrational devices with several degrees of freedom

¹Institute for Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences and Mekhanobr-Tekhnika Corp., St. Petersburg, Russia;

²Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine

Regimes of start and run – out of trans-resonant vibration devices with inertial (rotational unbalance) excitation of oscillations are considered. The problem of passage through the resonance zone arises in such devices. As a result, increased power of the motor is required. Moreover, the near-resonant locking effect (“Sommerfeld effect”) can occur. The intensive oscillations in the start and run – out regimes are undesirable.

21 01 01 203y

NONLINEAR NORMAL MODES, DIMENSION REDUCTION AND LOCALIZATION IN VIBRATING SYSTEMS

27 September 2009 - 2 October 2009
Frascati (Rome), Italy

Information:

The Colloquium aims at presenting the latest developments in the areas of Nonlinear Normal Modes, Dimension Reduction and Localization, and their applications in vibrating systems. Nonlinear Normal Modes (NNMs) is a classical topic which is presently given a more modern interpretation mostly as regards their formulation for continuous or discontinuous systems, strongly nonlinear regimes, and discretized structures, as well as their use in various applications. They are also of major interest in the framework of Dimension Reduction of dynamical systems, an area where various methods are being formulated and compared with each other, along with the reduced order models – developed for different purposes/systems – based on just nonlinear (vs linear) normal modes or proper orthogonal modes or multi-modes ensuing from nonlinear finite element analyses. In turn, Localization is one major topic (to be possibly addressed via NNMs) in wave propagation and targeted energy transfer. In this context, there is special interest towards analyzing possible occurrence in mechanics of such dynamic phenomena as the discrete breathers highlighted in applied mathematics and physics, where they are paradigmatic solutions in periodic lattices. Cross-fertilization among such companion areas could allow to exploit results useful to describe analogous phenomena likely to occur in engineered materials and devices, with nontrivial effects in terms of efficient/robust energy focusing/transfer, and material/system design.

Contact: Prof. Giuseppe Rega

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica

Universita' di Roma La Sapienza

Via A. Gramsci 53

00197 Roma, Italy

Ph: +39-06-49919195; Fax: +39-06-49919192 or +39-06-3221449

e-mail: Giuseppe.Reg@uniroma1.it