УДК 539.3

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ТОВСТОЇ ПЛИТИ, ПОСЛАБЛЕНОЇ ДВОМА ОТВОРАМИ

Л. Фильштинський
Професор, д-р фіз.-мат. наук
О. Бондар
Математик
Сумський державний університет,
м. Суми

Äîñë³äæåíà äèíàì³÷íà çâ'ÿçàíà çàäà÷à òåðìîïðóæíîñò³ äëÿ ³çîòðîïíî¿ òîâñòî¿ ïëèòè, ïîñëàáëåíî¿ äâîìà íàñêð³çíèìè îòâîðàìè, ïðè êîâçíîìó çàêð³ïëåíí³ ¿¿ òîðö³â (êîñîñèìåòðè÷íèé âèïàäîê) çà óìîâè ¿õ òåïëîîáì³íó ç íàâêîëèøí³ì ñåðåäîâèùåì çà çàêîíîì Íüþòîíà. Êðàéîâà çàäà÷à çâåäåíà äî ñèñòåìè îäíîâèì³ðíèõ ñèíãóëÿðíèõ ³íòåãðàëüíèõ ð³âíÿíü äðóãîãî ðîäó, ùî ðîçâ'ÿçóºòüñÿ ÷èñåëüíî ìåòîäîì ìåõàí³÷íèõ êâàäðàòóð. Äîñë³äæåíà äèíàì³÷íà êîíöåíòðàö³ÿ íàïðóæåíü ó ïëèò³, ïðîäåìîíñòðîâàíî âïëèâ çâ'ÿçàíîñò³ òåðìîïðóæíèõ ïîë³â íà ðîçïîä³ë íàïðóæåíü íà ïîâåðõí³ îòâîð³â.

товста плита, отвір, термонапружений стан

Дослідження і розрахунок параметрів надійності та міцності елементів конструкцій, деталей машин і приладів, що перебувають під дією інтенсивного динамічного силового навантаження в умовах теплової взаємодії з оточенням, є важливим як з теоретичної, так і з практичної точок зору. В сучасній промисловості широко використовують матеріали, в яких ефект зв'язаності полів деформацій та температури є досить істотним. До таких матеріалів, що застосовуються при виробництві електроізоляційних покриттів, будівельних конструкцій, броньованого скла і т. д., належать полімерні матеріали альдегідних груп, такі як полівінілбутираль, полівінілформаль, полістирол тощо. У зв'язку з цим, при проектуванні конструкцій та їхніх елементів виникає потреба у створенні методик розрахунку, які б давали можливість оцінити зв'язані термопружні поля в умовах великих перепадів температур та ударних механічних напружень.

У загальному вигляді задача термопружності є складною задачею математичної фізики. В літературі існують розв'язки окремих задач для тонкостінних пластин та оболонок, просторів і півпросторів з порожниною тощо [1 — 11]. Тому розроблення аналітичних і числових процедур розв'язування просторових задач зв'язаної термопружності в теперішній час є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла.

Одним з ефективних методів розв'язування задач математичної фізики є метод однорідних розв'язків, що широко застосовується при розв'язуванні різноманітних задач теплопровідності, термопружності, електропружності [12]. Наразі з методом однорідних розв'язків широке застосування при розв'язуванні граничних задач знаходить новий підхід, запропонований одним з авторів [13, 14], та названий ним Ф-розв'язками. Цей підхід, що спирається на Ф-розв'язки для шару, дає можливість розв'язувати просторові задачі теорії пружності для багатозв'язних плит і циліндричних оболонок, а також звести задачу до досить добре вивчених інтегральних рівнянь [15 — 17]. Нижче схема застосування Ф-розв'язків поширюється на зв'язану задачу термопружності.

Вихідні співвідношення та Ф-розв'язки для шару. В системі прямолінійних декартових координат $0x_1x_2x_3$ розглянемо шар $-\infty < x_1, x_2 < \infty, |x_3| \le h$, на основах якого задані граничні умови змішаного типу:

$$u_3 = s_{13} = s_{23} = \partial_3 u_4 = 0, \quad x_3 = \pm h. \qquad (1.1)$$

Розглянемо гармонічні коливання такого шару. Однорідні розв'язки для цього кососиметричного випадку побудовані в [15].

Основна система рівнянь зв'язаної термопружності [5], після виключення з неї часового множника e^{-iwt}, має вигляд

$$\Delta U_j + s\partial_j e - \frac{3l+2m}{m} a_T \partial_j U_4 + g_2^2 U_j + \frac{1}{m} X_j^* = 0\,,$$
$$(j = 1,2,3)$$

$$\Delta U_4 + \left(g_T^2 + ig^2\right) U_4 + mw\left(i + t^* w\right) e + \frac{Q^*}{l_T}\left(1 - iwt^*\right) = 0$$

$$g_T^2 = \frac{w^2}{V_T^2},\; g^2 = \frac{w}{a^2},\; g_2^2 = \frac{w^2}{V_2^2},\; m = s\, ET_0 \frac{a_T}{l_T},$$
$$a^2 = \frac{l_T}{r\, c_e},\; s = \frac{1}{1-2n},\; \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j},\; \Delta = \partial_j \partial_j\,, \qquad (1.2)$$
$$e = \partial_k U_k,\; k = 1,2,3.$$

де $U_j\left(j = \overline{1,4}\right)$, X_j^* і Q^* — амплітуди переміщень u_j, температури $q = T - T_0$, інтенсивностей об'ємних сил F_j та теплових джерел Q відповідно; E, n, ρ — модуль Юнга, коефіцієнт Пуасона та густина матеріалу; a_T, l_T, c_e — коефіцієнти лінійного теплового розширення, теплопровідності та теплоємності матеріалу; l, m — параметри Ламе; V_T і V_2 — швидкості поширення теплових та механічних зсувних збуджень; T_0 — температура тіла в початковому незбудженому стані, t^* — час релаксації теплового потоку, w — кругова частота.

Нехай вздовж відрізку $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, |x_3| \le h$ розподілені зусилля $Y_j = \mathrm{Re}\left(e^{-iwt} X_j\right)$ або теплові джерела $q = \mathrm{Re}\left(e^{-iwt} Q\right)$ з амплітудами

$$\left\{X_1, X_2, Q\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{P_{1n}, P_{2n}, P_{4n}\right\}\sin\left(l_n x_3\right),$$
$$X_3 = \sum_{n=1}^{\infty} P_{3n}\cos\left(l_n x_3\right), \quad l_n = \frac{p\left(1+2n\right)}{2h}.$$

Польові величини подамо у вигляді:

$$\left\{U_1, U_2, U_4\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{U_{1n}, U_{2n}, U_{4n}\right\}\sin\left(l_n x_3\right),$$
$$U_3 = \sum_{n=0}^{\infty} U_{3n}\cos\left(l_n x_3\right),$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \sin\left(l_n x_3\right), \quad e_n = \partial_1 U_{1n} + \partial_2 U_{2n} - l_n U_{3n}\,,$$

$$T^e - T_0 = \mathrm{Re}\left\{e^{-iwt} U^e\right\}, \quad U^e = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^e \sin\left(l_n x_3\right),$$

де T^e — температура зовнішнього середовища.

Виключаючи з (1.2) товщинну координату x_3, отримуємо систему диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів Фур'є польових величин. Розглядаючи окремо кожний з чотирьох варіантів збудження, отримуємо згідно з [15 — 17] матрицю Ф-розв'язків $\left\|g_{kn}^{(m)}\right\|$ у такому вигляді:

$$U_{kn}^{(m)} = \frac{P_{mn}}{4im} g_{kn}^{(m)} \qquad \left(k, m = \overline{1,4};\; n = 0,1,\ldots\right) \qquad (1.3)$$

$$g_{1n}^{(1)} = -H_0^{(1)}\left(m_n r\right) + s\, a_n \sum_{j=0}^{2}(-1)^j B_{jn}\partial_1^2 H_0^{(1)}\left(m_{jn} r\right),$$
$$g_{2n}^{(1)} = s\, a_n \sum_{j=0}^{2}(-1)^j B_{jn}\partial_1\partial_2 H_0^{(1)}\left(m_{jn} r\right),$$
$$g_{3n}^{(1)} = s\, a_n\, l_n \sum_{j=0}^{2}(-1)^j B_{jn}\partial_1 H_0^{(1)}\left(m_{jn} r\right),$$
$$g_{4n}^{(1)} = -w a_n m^* \partial_1 H_n(r),$$
$$g_{1n}^{(2)} = g_{2n}^{(1)},$$
$$g_{2n}^{(2)} = -H_0^{(1)}\left(m_n r\right) + s\, a_n \sum_{j=0}^{2}(-1)^j B_{jn}\partial_2^2 H_0^{(1)}\left(m_{jn} r\right),$$
$$g_{3n}^{(2)} = s\, a_n\, l_n \sum_{j=0}^{2}(-1)^j B_{jn}\partial_2 H_0^{(1)}\left(m_{jn} r\right),$$
$$g_{4n}^{(2)} = -w a_n m^* \partial_2 H_n(r),$$

$$g_{1n}^{(3)} = -g_{3n}^{(1)},\; g_{2n}^{(3)} = -g_{3n}^{(2)},$$
$$g_{3n}^{(3)} = -H_0^{(1)}\left(m_n r\right) - a_n\, l_n^2 s \sum_{j=0}^{2}(-1)^j B_{jn} H_0^{(1)}\left(m_{jn} r\right),$$
$$g_{4n}^{(3)} = a_n\, l_n w m^* H_n(r),$$
$$g_{1n}^{(4)} = s b_n a_T m\left(1+n\right)\sum_{j=1}^{2}(-1)^j C_{jn}\partial_1 H_0^{(1)}\left(m_{jn} r\right),$$
$$g_{2n}^{(4)} = s b_n a_T m\left(1+n\right)\sum_{j=1}^{2}(-1)^j C_{jn}\partial_2 H_0^{(1)}\left(m_{jn} r\right),$$
$$g_{3n}^{(4)} = s b_n a_T m l_n\left(1+n\right)\sum_{j=1}^{2}(-1)^j C_{jn} H_0^{(1)}\left(m_{jn} r\right),$$
$$g_{4n}^{(4)} = b_n m \sum_{j=1}^{2}(-1)^j \left(g_1^2 - m_{jn}^2 - l_n^2\right) H_0^{(1)}\left(m_{jn} r\right),$$

$$H_n(r) = H_0^{(1)}\left(m_{1n} r\right) - H_0^{(1)}\left(m_{2n} r\right).$$

У наведених формулах $H_p^{(1)}(x)$ — функція Ганкеля першого роду порядку p, m_{1n} та m_{2n} — корені біквадратного рівняння:

$$Z^4 - A_n Z^2 + B_n = 0;$$

$$A_n = g_T^2 + ig^2 + g_1^2 + \frac{1+n}{1-n} w a_T m^* - 2 l_n^2;$$
$$B_n = \left(g_1^2 - l_n^2\right)\left(g_T^2 + ig^2 - l_n^2\right) - \frac{1+n}{1-n} w a_T m^* l_n^2;$$

$$\operatorname{Im}\{m_{1n}\}>0;\ \ \operatorname{Im}\{m_{2n}\}>0;\ \ m_{0n}^2=m_n^2=g_2^2-l_n^2;$$

$$\operatorname{Im}\{m_n\}>0;\ \ a_n=\frac{1}{(1+s)\left(m_{1n}^2-m_{2n}^2\right)};$$

$$b_n=\frac{-1+iwt^*}{l_T\left(m_{1n}^2-m_{2n}^2\right)};\ m^*=m\left(i+t^*w\right);\ d_n^2=g_T^2+ig^2-l_n^2;$$

$$r_{jn}=d_n^2-m_{jn}^2+2(1+n)a_T wm^*;\ B_{jn}=\frac{r_{jn}}{m_n^2-m_{jn}^2};$$

$$B_{0n}=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}B_{jn};$$

$$d_{jn}^*=\frac{m_{jn}^2+l_n^2}{1-n}-2\left(m_{jn}^2+l_n^2-g_1^2\right);\ C_{jn}=\frac{d_{jn}^*}{m_n^2-m_{jn}^2};$$

$$C_{0n}=0;\ \ (j=1,2;\ n=0,1,\ldots).$$

2. Інтегральні рівняння зв'язаної термопружності для шару в R^3. Користуючись Ф-розв'язками (1.3), розглянемо зв'язану динамічну задачу термопружності для шару, послабленого двома наскрізними отворами, який є моделлю товстої плити з наскрізними технологічними отворами, розташованими близько один від одного (рис. 1).

Інтегральні подання польових величин, що описують термопружний стан описаного тіла, введемо за допомогою згортки матриці фундаментальних розв'язків (1.3) зі стрибками вектора переміщень та температури. У результаті отримаємо

$$U_{kn}(z)=\int_{\Gamma}\sum_{m=1}^{4}Z_m^{(n)}(z)\,g_{kn}^{(m)}(z,z)\,ds,\ z\in\Gamma\left(k=\overline{1,4};n=0,1,\ldots\right),$$

де $Z_m^{(n)}(z)$ — «щільності», що належить визначити, Γ — контур поперечного перерізу отвору.

Компоненти тензора напружень подамо у вигляді:

$$s_{ij}=\operatorname{Re}\left\{e^{-iwt}S_{ij}\right\};$$

$$S_{ij}=m\left(\partial_i U_j+\partial_j U_i\right)+\left(l\partial_i U_i-2m(1+n)s\,a_T U_4\right)d_{ij},$$

$$(i,j=1,2,3)$$

де d_{ij} — символ Кронекера.

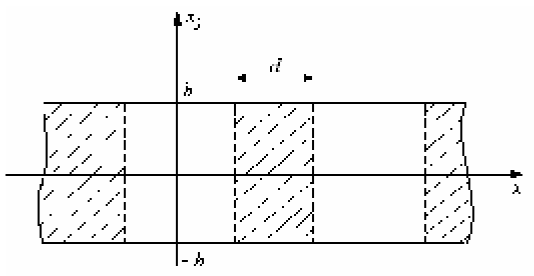

Рис. 1. Шар, послаблений двома наскрізними отворами

Нехай на поверхні отвору S задані нормальна та дотична компоненти вектора напруження, а тепловий потік задовольняє умову теплообміну із зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Тоді граничні умови на S можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}
&S_1^{(n)}-e^{2iy}S_2^{(n)}=2\left(N^{(n)}-iT^{(n)}\right),\\
&S_1^{(n)}-e^{-2iy}\tilde{S}_2^{(n)}=2\left(N^{(n)}+iT^{(n)}\right),\\
&S_3^{(n)}e^{iy}+\tilde{S}_3^{(n)}e^{-iy}=2Z^{(n)},\\
&\frac{\partial U_{4n}}{\partial n}+h^*\left(U_{4n}-U_n^e\right)=0.
\end{aligned}\qquad(2.1)$$

де

$$S_1^{(n)}=S_{11}^{(n)}+S_{22}^{(n)};$$

$$S_2^{(n)}=S_{22}^{(n)}-S_{11}^{(n)}+2iS_{12}^{(n)};\ \ \tilde{S}_2^{(n)}=S_{22}^{(n)}-S_{11}^{(n)}-2iS_{12}^{(n)};$$

$$S_3^{(n)}=S_{13}^{(n)}-iS_{23}^{(n)};\ \ \tilde{S}_3^{(n)}=S_{13}^{(n)}+iS_{23}^{(n)}$$

$$S_j^{(n)}=m\int_{\Gamma}\sum_{m=1}^{4}Z_m^{(n)}(z)\,G_{jn}^{(m)}(z,z)ds\quad(j=1,2,3),$$

$$\tilde{S}_i^{(n)}=m\int_{\Gamma}\sum_{m=1}^{4}Z_m^{(n)}(z)\,\tilde{G}_{in}^{(m)}(z,z)ds\quad(i=2,3),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\int_{\Gamma}\sum_{m=1}^{4}Z_m^{(n)}(z)\,g_{4n}^{(m)}(z,z)ds+$$

$$+h^*\int_{\Gamma}\sum_{m=1}^{4}Z_m^{(n)}(z)\,g_{4n}^{(m)}(z,z)ds=h^*U_n^e.$$

$$G_{1n}^{(m)}=2s\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(g_{1n}^{(m)}+ig_{2n}^{(m)}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(g_{1n}^{(m)}-ig_{2n}^{(m)}\right)-\right.$$

$$\left.-2nl_n g_{3n}^{(m)}-2(1+n)a_T g_{4n}^{(m)}\right],$$

$$G_{2n}^{(m)}=-4\frac{\partial}{\partial z}\left(g_{1n}^{(m)}-ig_{2n}^{(m)}\right),$$

$$G_{3n}^{(m)}=2\frac{\partial}{\partial z}g_{3n}^{(m)}+l_n\left(g_{1n}^{(m)}-ig_{2n}^{(m)}\right),$$

$$\tilde{G}_{2n}^{(m)}=-4\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(g_{1n}^{(m)}+ig_{2n}^{(m)}\right),$$

$$\tilde{G}_{3n}^{(m)}=2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}g_{3n}^{(m)}+l_n\left(g_{1n}^{(m)}+ig_{2n}^{(m)}\right).$$

У наведених формулах h^* — відносний коефіцієнт теплообміну, y — кут між зовнішньою нормаллю до контуру Γ в точці z та віссю $0x_1$.

Виконуючи операцію граничного переходу в комбінаціях (2.1), приходимо до системи з чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь другого роду при кожному фіксованому $n=0,1,\ldots$

$$\begin{aligned}
&-4iW_p^{(n)}(z_0)+\int_{\Gamma}\sum_{m=1}^{4}W_m^{(n)}(z)\,K_{pm}^{(n)}(z,z_0)\,ds=F_p(z_0),\\
&z_0\in\Gamma\ \ \left(p=\overline{1,4}\right),\ \Gamma=\cup\Gamma_k\,(k=1;2),\\
&\cap\Gamma_k=\varnothing,(k=1;2),
\end{aligned}\qquad(2.2)$$

де

$$Z_1^{(n)}=W_1^{(n)}e^{iy}+W_2^{(n)}e^{-iy},\ Z_2^{(n)}=-i\left(W_1^{(n)}e^{iy}-W_2^{(n)}e^{-iy}\right),$$

$$Z_3^{(n)}=W_3^{(n)},\quad Z_4^{(n)}=\frac{1}{ma_T}W_4^{(n)};$$

$$F_1^{(n)}(z_0)=\frac{1}{m}\left(N^{(n)}+iT^{(n)}\right),\quad F_2^{(n)}(z_0)=\frac{1}{m}\left(N^{(n)}-iT^{(n)}\right),$$

$$F_3^{(n)}(z_0)=\frac{2}{m}Y_3^{(n)},\quad F_4^{(n)}(z_0)=\frac{2a_T l_T}{1-iwt^*}h^*U_n^e$$

$$K_{11}^{(n)}=-e^{i(y-a_0)}\left[\frac{m_n l_n^2}{g_2^2}H_1^{(1)}(m_n r_0)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left\{s^2a_nB_{jn}\left(m_{jn}^2+2nl_n^2\right)+sb_n^*\right\}m_{jn}H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right]-$$
$$-e^{i(y-2y_0+a_0)}\left[\left(1+\frac{l_n^2}{g_2^2}\right)m_nH_1^{(1)}(m_nr_0)+\right.$$
$$\left.+sa_n\sum_{j=1}^{2}(-1)^jB_{jn}m_{jn}^3H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right],$$

$$K_{12}^{(n)}=-e^{i(a_0-y)}\left[\frac{m_n l_n^2}{g_2^2}H_1^{(1)}(m_n r_0)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left\{s^2a_nB_{jn}\left(m_{jn}^2+2nl_n^2\right)+sb_n^*\right\}m_{jn}H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right]+$$
$$+e^{i(3a_0-y-2y_0)}sa_n\sum_{j=0}^{2}(-1)^jB_{jn}m_{jn}^3H_3^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right),$$

$$K_{13}^{(n)}=-\frac{m_n^2l_n}{g_2^2}H_0^{(1)}(m_nr_0)+$$
$$\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left\{sa_nl_n\left(m_{jn}^2+2nl_n^2\right)B_{jn}+l_nb_n^*\right\}sH_0^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)+$$
$$+e^{2i(a_0-y_0)}sa_nl_n\sum_{j=0}^{2}(-1)^jB_{jn}g_{jn}^{(2,2)}(r_0),$$

$$K_{14}^{(n)}=-b_ns(1+n)\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left\{e^{2i(a_0-y_0)}C_{jn}g_{jn}^{(2,2)}(r_0)+\right.$$
$$\left.+\left[2\left(m_{jn}^2+l_n^2-g_1^2\right)-C_{jn}s\left(m_{jn}^2+2nl_n^2\right)\right]H_0^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right\},$$

$$K_{21}^{(n)}=-e^{i(y-a_0)}\left[\frac{l_n^2}{g_2^2}m_nH_1^{(1)}(m_n r_0)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left\{s^2a_nB_{jn}\left(m_{jn}^2+2nl_n^2\right)+sb_n^*\right\}m_{jn}H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right]-$$
$$-e^{i(y+2y_0-3a_0)}sa_n\sum_{j=1}^{2}(-1)^jB_{jn}g_{jn}^{(3,3)}(r_0),$$

$$K_{22}^{(n)}=-e^{i(a_0-y)}\left[\frac{l_n^2}{g_2^2}m_nH_1^{(1)}(m_n r_0)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left\{s^2a_nB_{jn}\left(m_{jn}^2+2nl_n^2\right)+sb_n^*\right\}m_{jn}H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right]+$$
$$+e^{i(2y_0-y-a_0)}\left[\left(1+\frac{l_n^2}{g_2^2}\right)m_nH_1^{(1)}(m_nr_0)+\right.$$
$$\left.+sa_n\sum_{j=0}^{2}(-1)^jB_{jn}m_{jn}^3H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right],$$

$$K_{23}^{(n)}=-\frac{m_n^2l_n}{g_2^2}H_0^{(1)}(m_nr_0)+$$
$$l_n\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left\{sa_n\left(m_{jn}^2+2nl_n^2\right)B_{jn}+b_n^*\right\}sH_0^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)+$$
$$+e^{2i(y_0-a_0)}sa_nl_n\sum_{j=1}^{2}(-1)^jB_{jn}g_{jn}^{(2,2)}(r_0),$$

$$K_{24}^{(n)}=sb_n(1+n)\left\{\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left[2\left(g_1^2-m_{jn}^2-l_n^2\right)+\right.\right.$$
$$\left.+C_{jn}s\left(m_{jn}^{22}+2nl_n\right)\right]H_0^{(1)}\left(m_{jn}r_o\right)+$$
$$\left.+e^{2i(y_0-a_0)}a_T\sum_{j=1}^{2}(-1)^jC_{jn}m_{jn}^2H_2^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right\},$$

$$K_{31}^{(n)}=-e^{i(y+y_0-2a_0)}2sa_nl_n\sum_{j=1}^{2}(-1)^jB_{jn}g_{jn}^{(2,2)}(r_0)-$$
$$e^{i(y-y_0)}\left[2\frac{l_n^2}{g_2^2}H_0^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)+\right.$$
$$\left.+2sa_nl_n\sum_{j=1}^{2}(-1)^jB_{jn}m_{jn}^2H_0^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right],$$

$$K_{32}^{(n)}=-e^{i(y_0-y)}\left[2\frac{l_n^3}{g_2^2}H_0^{(1)}(m_nr_0)+\right.$$
$$\left.+2sa_nl_n\sum_{j=1}^{2}(-1)^jB_{jn}m_{jn}^2H_0^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right]-$$
$$-e^{i(2a_0-y-y_0)}2sa_nl_n\sum_{j=1}^{2}(-1)^jB_{jn}g_{jn}^{(2,2)}(r_0),$$

$$K_{33}^{(n)}=\left[-\frac{m_n^2-l_n^2}{g_2^2}m_nH_1^{(1)}(m_nr_0)-\right.$$
$$\left.-2a_nl_n^2s\sum_{j=1}^{2}(-1)^jB_{jn}m_{jn}H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right]2\cos\left(y_0-a_0\right),$$

$$K_{34}^{(n)}=4sb_nl_n\frac{1+n}{a_T}\sum_{j=1}^{2}(-1)^jC_{jn}m_{jn}H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\cos\left(y_0-a_0\right),$$

$$K_{41}^{(n)}=ia_T^2wa_n s\,ET_0\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left[-m_{jn}^2H_2^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)e^{i(y_0-2a_0+y)}+\right.$$
$$\left.+m_{jn}^2H_0^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)e^{i(y-y_0)}-2h^*m_{jn}H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)e^{i(y-a_0)}\right],$$

$$K_{42}^{(n)}=ia_T^2wa_n s\,ET_0\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left[m_{jn}^2H_0^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)e^{i(y_0-y)}-\right.$$
$$\left.-m_{jn}^2H_2^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)e^{i(2a_0-y_0-y)}-2m_{jn}h^*H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)e^{i(a_0-y)}\right],$$

$$K_{43}^{(n)}=2iwa_n s\,ET_0a_T^2l_n\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left[-h^*H_0^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)-\right.$$
$$\left.-m_{jn}H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\cos\left(y_0-a_0\right)\right],$$

$$K_{44}^{(n)}=\frac{2}{m_{1n}^2-m_{2n}^2}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left(m_{jn}^2+l_n^2-g_1^2\right)\left[h^*H_0^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)+\right.$$
$$\left.m_{jn}H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\cos\left(y_0-a_0\right)\right];$$

$$g_{jn}^{(2,2)}\left(r_0\right)=m_n^2H_2^{(1)}\left(m_nr_0\right)-m_{jn}^2H_2^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right),$$
$$g_{jn}^{(3,3)}\left(r_0\right)=m_n^3H_3^{(n)}\left(m_nr_0\right)-m_{jn}^3H_3^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right),$$
$$b_n^*=2(1+n)a_Twm^*a_n,\quad r_0=\left|z-z_0\right|,$$
$$a_0=\arg\left(z-z_0\right),\quad y_0=y\left(z_0\right).$$

Колове нормальне напруження s_{qq} на бічній поверхні порожнини має вигляд

$$s_{qq}=\left|S_{qq}\right|\cos\left(wt-f\right),\quad f=\arg S_{qq},\tag{2.3}$$
$$S_{qq}=\sum_{n=0}^{\infty}S_{qq}^{(n)}\sin l_nx_3,$$
$$S_{qq}^{(n)}=S_{11}^{(n)}+S_{22}^{(n)}-N^{(n)}=S_1^{(n)}-N^{(n)},\quad n=0,1,2,\ldots$$

У результаті операції граничного переходу отримуємо

$$S_{qq}^{(n)}=-2im\frac{W_1^{(n)}\left(z_0\right)+W_2^{(n)}\left(z_0\right)}{1-n}+$$
$$+2ms\int_{\Gamma}\sum_{m=1}^{4}W_m^{(n)}(z)R_m^{(n)}\left(z,z_0\right)ds,\quad n=0,1,2,\ldots$$

Ядра $R_m^{(n)}\left(z,z_0\right)$ описуються такими співвідношеннями:

$$R_1^{(n)}\left(z,z_0\right)=-e^{i(y-a_0)}\left(\frac{l_n^2}{sg_2^2}m_nH_1^{(1)}\left(m_nr_0\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left[sa_n\left(m_{jn}^2+2nl_n^2\right)B_{jn}+b_n^*\right]m_{jn}H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right),$$

$$R_2^{(n)}\left(z,z_0\right)=-e^{i(a_0-y)}\left(\frac{l_n^2}{sg_2^2}m_nH_1^{(1)}\left(m_nr_0\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left[sa_n\left(m_{jn}^2+2nl_n^2\right)B_{jn}+b_n^*\right]m_{jn}H_1^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right)\right),$$

$$R_3^{(n)}\left(z,z_0\right)=\frac{l_n}{sg_2^2}m_n^2H_0^{(1)}\left(m_nr_0\right)-$$
$$-\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left[sa_n\left(m_{jn}^2+2nl_n^2\right)B_{jn}+b_n^*\right]l_nH_0^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right),$$

$$R_4^{(n)}\left(z,z_0\right)=(1+n)b_n\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\left[2\left(m_{jn}^2+l_n^2-g_1^2\right)-\right.$$
$$\left.-sC_{jn}\left(m_{jn}^2+2nl_n^2\right)\right]H_0^{(1)}\left(m_{jn}r_0\right).$$

У зв'язаних задачах термопружності особливий інтерес викликає врахування впливу ефекту зв'язаності полів на напружено-деформований стан тіла. Показником зв'язаності є коефіцієнт d, що має вигляд

$$d=s\,ET_0a_T^2\frac{(1+n)}{rc_e(1-n)}=m\frac{l_Ta_T(1+n)}{rc_e(1-n)}.$$

Значення цього коефіцієнта змінюються в межах $[0;\,0,5]$. Відомо, що для полімерних матеріалів альдегідних та формальдегідних груп, таких як полівінілформаль, полівінілбутираль та інші, цей коефіцієнт зв'язаності може дорівнювати 0.45 і більше [5], що дає підстави висловити припущення про наявність істотного впливу зв'язаності термомеханічних полів на динамічну концентрацію напружень у просторових тілах з неоднорідностями.

3. Результати розрахунків. Для визначення напружено-деформованого стану шару, послабленого двома наскрізними отворами, розраховувалася залежність амплітудних значень величини $\sigma_{\theta\theta}$ (формули (2.3)) від першого хвильового числа g_1R у точці $(R;0;h)$. Інтегральні рівняння (2.2) розв'язувались чисельно методом механічних квадратур, потім відновлювалися компоненти тензора переміщень. Параметризація контурів поперечних перетинів має вигляд

$$z=r_1\left(\cos q+C_3\cos 3q\right)+ir_2\left(\sin q-C_3\sin 3q\right),$$

де для кола $R=r_1=r_2,\ C_3=0$, для еліпса $R=\left(r_1+r_2\right)/2,\ C_3=0$, для квадрата $R=r_1=r_2$, $C_3=0,14036$.

На поверхні першого отвору діє змінне в часі за гармонійним законом нормальне навантаження, інший отвір залишався вільним від навантажень. Амплітуди навантажень визначаються співвідношенням $N=N_0\,x_3/h$.

На рис. 2 — рис. 4 наведені результати розрахунків для полівінілбутиралю, коефіцієнт зв'язаності полів для якого дорівнює 0.44. Пунктирні лінії відповідають зв'язаній задачі, суцільні — незв'язаній. Для всіх розрахунків товщина шару приймалася $h=1$, а віддаль між отворами $d=2,5$. Рис. 2 побудований для колового і квадратного (квадрат з округленими вершинами) отворів при $R_1=1,\ R_2=1$, рис. 3 — для двох еліптичних отворів при $R_{11}=1,\ R_{12}=0,5,\ R_{21}=1,\ R_{22}=0,5$, рис. 4 — для двох квадратних отворів при $R_1=1,\ R_2=1$.

На всіх графіках вплив зв'язаності полів простежується виразно, спостерігається зміна амплітудних

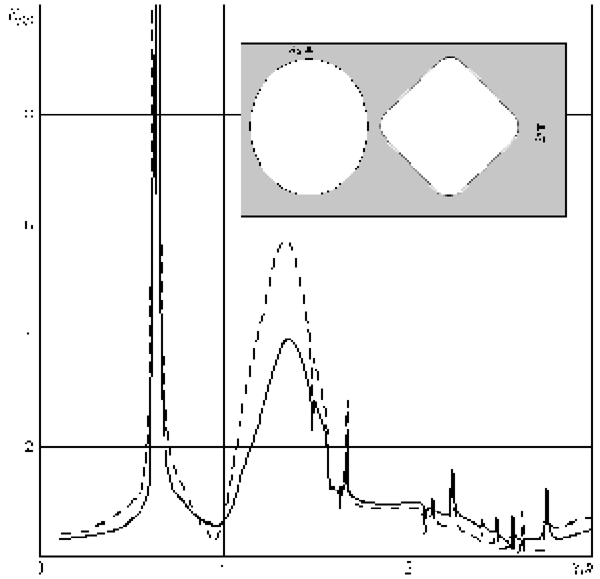

Рис. 2

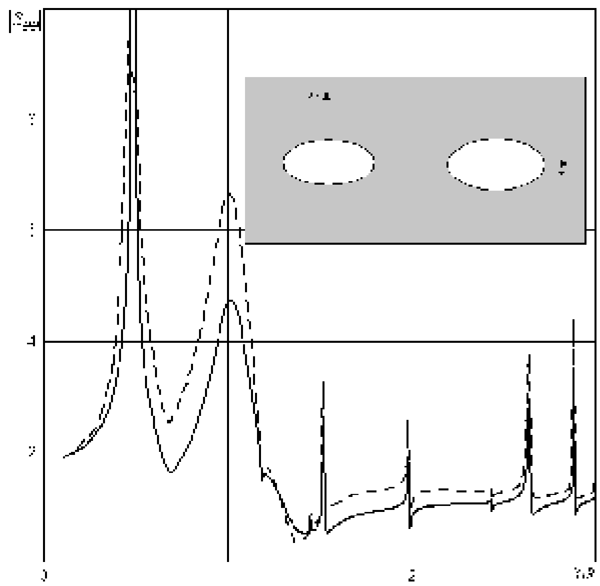

Рис. 3

значень колового нормального напруження, однак власні частоти лишаються незмінними. Можна зробити висновок, що для матеріалів, яким притаманна значна термомеханічна взаємодія полів деформацій і температури, слід використовувати модель зв'язаної термопружності, оскільки вона істотно уточнює результати розрахунків порівняно з незв'язаною задачею.

Слід зазначити, що такий алгоритм дає змогу проводити розрахунки для різних товщин плити і різних геометричних характеристик отворів без внесення змін у текст програми. Отримані результати розрахунків та розроблений аналітичний алгоритм можна використовувати в науково-дослідних закладах та конструкторських бюро, що займаються розрахунком на міцність машинобудівних конструкцій з матеріалів, яким притаманний істотний зв'язок термомеханічних полів.

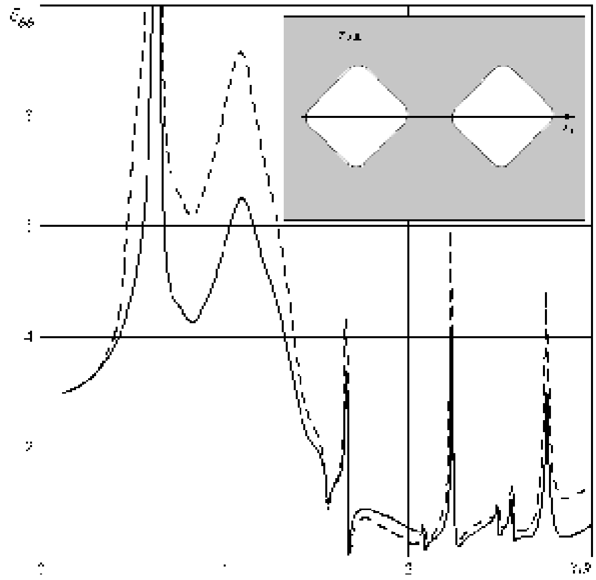

Рис. 4

Література

1. *Бородин П.Ю., Галанин М.П., Дубовицкий И.В.* Численное решение задачи об импульсном тепловом воздействии на слоистую упругую среду в сферически-симметричном и двумерном плоском случаях // Препр./ Ин.-т прикл. мат. РАН. — 1997. — №41. — С. 1—29.

2. *Cho H., Kardomateas G.A., Valle C.S.* Elastodynamic Solution for the Thermal Shock Stresses in an Orthotropic Thick Cylindrical Shell // Trans. ASME. S. Appl. Mech. — 1998. — 65, №1. — С. 184—193.

3. *Sumi Vaobumi.* Propagation of Thermal and Thermal Stress Waves in Finite MediumUnder Laser-Pulse Heating // Nihon Kikai Gakai Ronbunshu. A=Trans Jap. Soc. Mech. Eng. A. — 1998.— 64, №625.— С. 2257—2262.

4. *Suh C.S., Burger C.P.* Effects of Thermomechanical Coupling and RelaxationTimes on Wave Spectrum in Dynamic Theory of Generalized Thermoelasticity // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1998. — 65, №3.— С. 605—613.

5. *Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Р.* Связанные и динамические задачи термоупругости. — М.: Машиностроение, 1984. — 184 с.

6. *Молотов М.В., Киль И.Д.* Связанная динамическая задача термоупругости для полупространства // Прикл. мат. и мех. — 1996.— 60, №4. — С. 687—696.

7. *Пырьев Ю.А.* Распространение волн в упругих средах с учетом связанности физико-механических полей. — М.: СИП РИА, 1999. — 206 с.

8. *Kim W. S., Hector L.G. (Jr.), Hetnarski R.B.* Thermoelastic Stresses in a Bounded Layer Due to Repetitively Pulsed Laser Radiation // Acta Mech. — 1997. — 125, №1 — 4. — С. 107—128.

9. *Кушнір Р., Максимович Я., Соляр Т.* Термопружний стан багатозв'язних пластин з тепловіддачею // Машинознавство. — 2004. — №3 (81). — С. 13—17.

10. *Авраменко Л.Е., Шевченко В.П.* Теплопроводность и термоупругость тонких изотропных оболочек при

импульсном нагреве движущимися источниками // Прикл. механика. — 2006. — Вип. 42. — №11. — С. 86—95.

11. *Шевченко В.П., Гольцев А.С.* Термоупругий изгиб локально нагретых ортотропных оболочек // Прикл. механика. — 2007. — Вып. 43, №3. — С. 80— 85.

12. *Космодамианский А.С., Шалдырван В.А.* Толстые многосвязные пластины. — К.: Наук. думка, 1978. — 237 с.

13. ***Fil'shtinskii L.A., Kovalev Yu.D, Ventsel E.S.*** Solution of the Elastic Boundary Value Problems for a Layer With Tunnel Stress Raisers // Int. Journal of Solids and Structures. — 2002. — №39. — 6385—6402.

14. ***Fil'shtinskii l.*** Fundamental Solutions of Electroelasticity Equations for a Piezoceramic Layer in R^3 // Mechanics of Composite Materials. — 2001, Vol. 37, №3. — P. 237—244.

15. *Фильштинський Л., Бондар О.* Зв'язані термопружні поля в шарі при зосереджених збудженнях (кососиметричний розв'язок) // Машинознавство. — 2004, №6 (84). — С. 30—38.

16. *Фильштинський Л.А., Бондар О.В.* Динамічна кососиметрична задача зв'язаної термопружності для шару з отвором // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2007. — Т. 43, №6. — С. 5—13.

17. *Фильштинский Л.А., Бондарь А*.В. Прочность толстостенных плит и опор с учетом связанности термоупругих полей // Проблемы машиностроения. — 2008. — Т. 11, № 5 — 6. — С. 60—69.

Отримана 14.05.09

L. Filshtynskyi, O. Bondar

Thermoelastic state of a thick plate, weakened by two holes

Sumy State University, Sumy

Dynamic coupled thermoelasticity problem for isotropic thick plate, weakened by two through-the-thickness holes has been explored in the paper (skew-symmetric case). Plate faces considered to satisfy the mixed mechanical boundary conditions and the condition of heat exchange with an environment using Newton law. Boundary problem has been reduced to a system of one-dimensional singular integral equations of the second order, which has been solved numerically with the help of the mechanical quadrature method. Dynamic stresses distribution has been explored, influence of the thermomechanical coupling on stresses distribution has been showed.

² í ô î ð ì àö³ÿ

NONLINEAR NORMAL MODES, DIMENSION REDUCTION AND LOCALIZATION IN VIBRATING SYSTEMS

27 September 2009 - 2 October 2009
Frascati (Rome), Italy

Information:

The Colloquium aims at presenting the latest developments in the areas of Nonlinear Normal Modes, Dimension Reduction and Localization, and their applications in vibrating systems. Nonlinear Normal Modes (NNMs) is a classical topic which is presently given a more modern interpretation mostly as regards their formulation for continuous or discontinuous systems, strongly nonlinear regimes, and discretized structures, as well as their use in various applications. They are also of major interest in the framework of Dimension Reduction of dynamical systems, an area where various methods are being formulated and compared with each other, along with the reduced order models – developed for different purposes/systems – based on just nonlinear (vs linear) normal modes or proper orthogonal modes or multi-modes ensuing from nonlinear finite element analyses. In turn, Localization is one major topic (to be possibly addressed via NNMs) in wave propagation and targeted energy transfer. In this context, there is special interest towards analyzing possible occurrence in mechanics of such dynamic phenomena as the discrete breathers highlighted in applied mathematics and physics, where they are paradigmatic solutions in periodic lattices. Cross-fertilization among such companion areas could allow to exploit results useful to describe analogous phenomena likely to occur in engineered materials and devices, with nontrivial effects in terms of efficient/robust energy focusing/transfer, and material/system design.

Contact: *Prof. Giuseppe Rega*
Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Universita' di Roma La Sapienza
Via A. Gramsci 53
00197 Roma, Italy
Ph: +39-06-49919195; Fax: +39-06-49919192 or +39-06-3221449
e-mail: Giuseppe.Rega@uniroma1.it