

УДК 539.3

## ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН СИМЕТРИЧНОЇ БУДОВИ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ R-ФУНКЦІЙ

Л. Курпа

Професор, д-р техн. наук

Г. Лінник

Канд. техн. наук

В. Ткаченко

Аспірантка

Національний технічний  
університет «ХПІ»,  
м. Харків

*Запропоновано метод дослідження статичної стійкості багатошарових пластин симетричної структури зі складною формою плану. В основу методу покладено використання теорії R-функцій та варіаційного методу Рітца. Запропонований метод враховує неоднорідний докритичний стан пластини. З метою аналізу вірогідності й точності розробленого підходу наведено розв'язки конкретних задач і зроблено порівняння з відомими в літературі результатами. Отримані нові результати для деяких багатошарових пластин симетричної структури зі складною формою плану.*

**метод R-функцій, статична стійкість, багатошарова пластина, складна геометрія**

Широке застосування композитних матеріалів для виготовлення елементів тонкостінних конструкцій у таких галузях промисловості як авіабудування, ракетобудування, будівельна промисловість та ін. потребує розрахунку на міцність багатошарових пластин різної геометричної форми. При цьому однією з основних проблем, що виникають при розрахунку на міцність різних об'єктів, є дослідження їх динамічної і статичної стійкості.

Задачами стійкості багатошарових пластин займалися багато вчених як у нашій країні, так і закордоном, про що свідчить велика кількість публікацій [1 — 4 та ін.]. Основні ідеї у цій області були висунуті такими вченими як Н. А. Алфугов, С. А. Амбарцумян, А. С. Вольмір, Е. І. Григолюк, А. М. Гузь, С. Г. Лехницький, С. П. Тимошенко та багатьма іншими. Аналіз наукової літератури показує, що останнім часом найінтенсивніше розвиваються методи дослідження пластин і оболонок на динамічну стійкість [5 — 8]. Але складовою частиною цих задач є задачі про статичну стійкість. Стосовно праць, в яких розглядаються проблеми на статичну стійкість багатошарових пластин і

оболонок, можна зробити висновок, що в них переважно проаналізовано пластини прямокутної форми з граничними умовами, які дають змогу будувати системи базисних функцій за допомогою тригонометричних або степеневих функцій. Однак дослідження на статичну стійкість багатошарових пластин з різними видами їх закріплення і формою серединної площини залишається актуальною проблемою.

У статті запропоновано метод дослідження статичної стійкості багатошарових пластин симетричної структури зі складною формою плану. Запропонований метод враховує неоднорідний докритичний стан пластини. Метод реалізовано в рамках системи POLE-RL та застосовано для дослідження багатошарових пластин складної геометрії.

**Математична постановка задачі.** Розглянемо тонкі багатошарові пластини, які зібрані з непарної кількості ортотропних шарів, розташованих симетрично відносно серединної площини пластини. Математичну постановку задачі виконаємо в рамках класичної теорії, згідно якою

приймаються такі припущення: пластина навантажена у своїй площині контурними зусиллями, поперечні навантаження відсутні; докритичний напружений стан описується співвідношеннями лінійної теорії пружності, при цьому зміною розмірів пластини до втрати стійкості нехтуємо; згин пластини моделюється за допомогою гіпотез Кірхгофа-Лява; усі зовнішні навантаження змінюються пропорційно деякому параметру  $l$ .

У рамках згаданих припущень умови рівноваги пластини за відсутності об'ємних сил мають такий вигляд [9]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \\ = \lambda \left( N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right), \end{cases} \quad (1) \quad (2) \quad (3)$$

де  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  — нормальні й дотичні напруження;  $N_x, N_y, N_{xy}$  — величини сил, що діють у серединній площині пластини;  $M_x, M_y, M_{xy}$  — згинальні й крутний моменти, які для багат шарових пластин симетричної структури визначаються за формулами:

$$\begin{cases} N_x = C_{11} \cdot \varepsilon_{11} + C_{12} \cdot \varepsilon_{22} + C_{16} \cdot \varepsilon_{12}, \\ N_y = C_{22} \cdot \varepsilon_{22} + C_{12} \cdot \varepsilon_{11} + C_{26} \cdot \varepsilon_{12}, \\ N_{xy} = N_{yx} = C_{16} \cdot \varepsilon_{11} + C_{26} \cdot \varepsilon_{22} + C_{66} \cdot \varepsilon_{12}, \\ M_x = D_{11} \cdot \chi_{11} + D_{12} \cdot \chi_{22} + D_{16} \cdot \chi_{12}, \\ M_y = D_{12} \cdot \chi_{11} + D_{22} \cdot \chi_{22} + D_{26} \cdot \chi_{12}, \\ M_{xy} = M_{yx} = D_{16} \cdot \chi_{11} + D_{26} \cdot \chi_{22} + D_{66} \cdot \chi_{12}, \end{cases} \quad (4)$$

тут  $e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $e_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ ;  $e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ;

$$c_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad c_{12} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad c_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Зведені жорсткісні характеристики  $C_{ij}, D_{ij}$  ( $ij = 11, 22, 12, 16, 26, 66$ ) у цьому випадку визначаються так [10]:

$$(C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s(1, z^2) dz. \quad (6)$$

Якщо шари пластини виготовлені з ортотропного матеріалу, головні напрями пружності яких не збігаються з напрямками осей координат  $x$  і  $y$ , тоді пружні константи  $B_{ij}$  кожного шару визначаються за нижче поданим формулами [10]:

$$B_{11} = \tilde{B}_{11} \cos^4 q + 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \sin^2 q \cos^2 q + \tilde{B}_{22} \sin^4 q,$$

$$B_{22} = \tilde{B}_{11} \sin^4 q + 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \sin^2 q \cos^2 q + \tilde{B}_{22} \cos^4 q, \\ B_{12} = \tilde{B}_{12} + [\tilde{B}_{11} + \tilde{B}_{22} - 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66})] \sin^2 q \cos^2 q, \quad (7)$$

$$B_{16} = \frac{1}{2} [\tilde{B}_{22} \sin^2 q - \tilde{B}_{11} \cos^2 q + (\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \cos 2q] \sin 2q,$$

$$B_{26} = \frac{1}{2} [\tilde{B}_{22} \cos^2 q - \tilde{B}_{11} \sin^2 q - (\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \cos 2q] \sin 2q,$$

$$B_{66} = \tilde{B}_{66} + [\tilde{B}_{11} + \tilde{B}_{22} - 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66})] \sin^2 q \cos^2 q,$$

де пружні сталі  $\tilde{B}_{ij}$  визначаються так:

$$\tilde{B}_{11} = \frac{E_1}{(1-\nu_1 \nu_2)}, \quad \tilde{B}_{22} = \frac{E_2}{(1-\nu_1 \nu_2)},$$

$$\tilde{B}_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{(1-\nu_1 \nu_2)} = \frac{\nu_1 E_2}{(1-\nu_1 \nu_2)},$$

$$\tilde{B}_{66} = G_{12}, \quad \tilde{B}_{44} = G_{23}, \quad \tilde{B}_{55} = G_{13}. \quad (8)$$

**Метод розв'язання задачі.** В основу запропонованого підходу покладено використання статичного методу [9], варіаційного методу Рітца і теорії R-функцій [11 — 12]. Відповідно до статичного методу дослідження стійкості пластини зводиться до послідовного розв'язання плоскої задачі теорії пружності, тобто знаходження зусиль  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$ , які відповідають розподілу внутрішніх початкових зусиль при  $l=1$  та, власне, задачі стійкості, тобто визначення таких значень параметра  $l$  з рівняння (3), при яких плоска форма рівноваги перестав бути єдиною. Найменше зі значень  $l$  є критичним, тобто при його перевищенні початковий нескривлений стан перестав бути стійким.

Отже, перший етап алгоритму передбачає розв'язання перших двох рівнянь вихідної системи (1 — 2), які моделюють задачу теорії пружності. Зауважимо, що іноді докритичний стан є однорідним і тоді цей етап можна виключити. Наприклад, якщо розглядаються рівномірно стиснуті або прямокутні пластини, при їх одновісному стиску, то значення зусиль  $N_x, N_y, N_{xy}$  будуть відомі.

Однак, якщо розглядаються пластини з отвором або навантаження діє тільки на частині контуру, і в багатьох інших випадках, докритичний стан пластини є неоднорідним. Тому для його визначення і потрібно розв'язувати задачу теорії пружності. Варіаційна постановка цієї задачі зводиться до знаходження мінімуму функціоналу

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy}) d\Omega + \\ + \int_{\partial\Omega} (P_1^0 u_{1n} + P_2^0 v_{1n}) ds, \quad (9)$$

де  $u_{1n} = u \cos \alpha + v \sin \alpha$ ;  $v_{1n} = -u \sin \alpha + v \cos \alpha$ ,  $\alpha$  — кут між зовнішньою нормаллю до контуру  $\partial\Omega$  та віссю  $Ox$ ,  $P_1^0, P_2^0$  — зусилля, прикладене до межі пластини в напрямі нормалі й дотичної відповідно.

Мінімум функціоналу шукається на множині функцій, що задовольняють умови:

$$\begin{cases} N_n = P_1^0; \\ S_n = P_2^0. \end{cases} \quad (10)$$

Зауважимо, що ці умови є природними для функціоналу (9). Тому функції  $u$  та  $v$  можуть бути обрані у вигляді:

$$u = \sum_{i=1}^n a_i j_i; \quad v = \sum_{i=1}^m b_i y_i. \quad (11)$$

Тут  $\{\phi_i\}$  і  $\{\psi_i\}$  — відомі повні системи функцій (наприклад, степеневі поліноми, тригонометричні функції, сплайни), а  $\{a_i\}$  і  $\{b_i\}$  — невизначені коефіцієнти, які визначаються з умови стаціонарності функціоналу (9):

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial b_i} = 0. \quad (12)$$

Після того, як знайдено функції  $u$  і  $v$ , за допомогою формул (4) визначимо розподіл зусиль  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$  в серединній площині пластини.

Другий етап алгоритму передбачає власне розв'язання задачі стійкості (3). Варіаційна постановка цієї задачі зводиться до знаходження мінімуму функціоналу

$$I(w) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ (M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) + \lambda \left( N_x^0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy. \quad (13)$$

Мінімізацію функціоналу будемо виконувати на множині функцій, що задовольняють головним граничним умовам для функції прогину  $w$ . Наприклад, якщо пластина шарнірно оперта, то відповідно до методу Р-функцій (RFM) будується структура вигляду

$$w = wP, \quad (14)$$

а якщо жорстко закріплена, то

$$w = w^2 P. \quad (15)$$

Тут  $P(x, y)$  — невизначена компонента структури розв'язку, яка подається у вигляді розвинення в ряд за деякою повною системою функцій  $\{j_i\}$ :

$$P = \sum_{i=1}^n a_i j_i. \quad (16)$$

Функція  $w(x, y)$  описує рівняння межі пластини  $\partial\Omega$  і будується в аналітичному вигляді за допомогою теорії Р-функцій для будь-якої межі області. Після того, як побудовано структурні формули і зроблено розвинення невизначених компонент, отримуємо потрібні послідовності координатних функцій: для шарнірного опирання  $w_i = \{\omega \cdot \phi_i\}$ , для жорсткого закріплення  $w_i = \{\omega^2 \cdot \phi_i\}$ .

У результаті застосування методу Рітца друга задача зводиться до розв'язання задачі на власні значення. Власні числа останньої задачі знаходяться за допомогою стандартних програм системи POLE-RL [12], які використовують метод Холецкого, перетворення Хаусхолдера та QL-методу. Ці власні числа і визначають значення критичного навантаження.

**Результати досліджень.** Для перевірки достовірності запропонованого методу розглянемо тестову задачу про стійкість шарнірно опертої багатшарової ортогонально армованої квадратної пластини, яка стискається зусиллями, спрямованими паралельно осі  $Ox$  (рис. 1).

Геометричні параметри пластини:  $a/b = 1$ ;  $h/(2b) = 0.01$ . Передбачалося, що пластина складається з непарної кількості шарів однакової товщини й таким способом укладання:  $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, \dots)$ .

У цьому випадку немає потреби виконувати перший етап алгоритму, бо докритичний стан є однорідним і значення зусиль  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$  визначаються як  $N_x^0 = P, N_y^0 = 0, N_{xy}^0 = 0$ . Однак, для тестування розробленого програмного забезпечення та запропонованого алгоритму, а також перевірки достовірності отриманого розв'язку задачі теорії пружності, цю задачу було розв'язано. Розв'язок для перемішень  $u$  і  $v$  представимо у вигляді (11). При цьому, враховуючи симетрію задачі, системи функцій  $\{\phi_i\}$  і  $\{\psi_i\}$  виберемо так:

$$\{\phi_i\}: x, x^3, xy^2, x^5, x^3y^2, xy^4, x^7, x^5y^2, \dots$$

$$\{\psi_i\}: y, x^2y, y^3, x^4y, x^2y^3, y^5, x^6y, x^4y^3, \dots$$

Для виконання другого етапу подамо функцію прогину у вигляді (14). Слід зауважити, що в цьому випадку рівняння межі області можна побудувати як

$$w(x, y) = F_1 F_2 \quad \text{або} \quad w(x, y) = F_1 F_2 / (F_1 + F_2),$$

де за допомогою функцій  $F_1, F_2$  задається множина точок площини, що знаходяться всередині смуг, заданих відповідно нерівностями:

$$F_1 = (a^2 - x^2)/(2a) \geq 0, \quad F_2 = (b^2 - y^2)/(2b) \geq 0.$$

Оскільки форма пластини симетрична щодо осей  $Ox$  і  $Oy$ , то прогин  $w$  є функцією парною відносно змінних  $x$  та  $y$ , тому невизначену компоненту в структурі (14) можна розкласти в ряд за допомогою такої системи функцій:

$$1, x^2, y^2, x^4, x^2y^2, y^4, x^6, x^4y^2, \dots$$

У табл. 1 показано порівняння отриманих результатів з результатами [3] для безрозмірного параметра

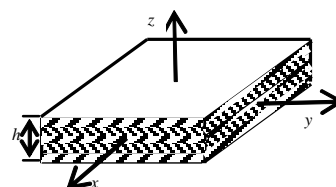


Рис. 1. Форма багатшарової пластини та схема її навантаження

Безрозмірний параметр  $\lambda$ 

Кількість шарів	Метод розв'язання	$E_1/E_2$				
		3	10	20	30	40
3	RFM	5.761	11.506	19.735	27.966	36.199
	[3]	5.754	11.492	19.712	27.936	36.160
5	RFM	5.761	11.506	19.735	27.966	36.199
	[3]	5.754	11.492	19.712	27.936	36.160
9	RFM	5.761	11.506	19.735	27.966	36.199
	[3]	5.754	11.492	19.712	27.936	36.160

$I = \frac{4P_{кр} b^2}{E_2 h^3}$  критичного навантаження. При цьому розгля-

нуто пластини з різною кількістю шарів та різними ступенями ортотропії  $E_1/E_2$ . Інші характеристики матеріалу прийняті такими:  $G/E_2 = 0.5$ ;  $n_1 = 0.25$ .

Як впливає з таблиці, відхилення в результатах не перевищує 0,13%. За наведеними результатами можна зробити висновок, що зі збільшенням ступеня ортотропії, збільшується і критичне навантаження. Зауважимо, що дослідження, виконані в рамках класичної теорії, приводять до того, що значення критичного навантаження є однаковими для різної кількості шарів, що є досить наближеним результатом та підкреслює обмеженість застосування класичної теорії для даного класу задач.

Для ілюстрації можливостей запропонованого методу проведемо дослідження стійкості багат шарових пластин зі складною формою плану.

**Приклад 1.** Розглянемо задачу стійкості пластини у вигляді тришарового двотавра (рис. 2). Передбачається, що навантаження діє паралельно осі  $Ox$ . Геометричні параметри прийняті наступними:  $a/b = 1$ ;  $h/(2b) = 0.01$ . Механічні характеристики шарів для  $G$  та  $n_1$  фіксовані:  $G/E_2 = 0.5$ ;  $n_1 = 0.25$ . Відношення модулів Юнга  $E_1/E_2$  змінюються так:  $E_1/E_2 = 3; 10; 20; 30; 40$ .

Будемо досліджувати на стійкість пластину при двох видах граничних умов: а) жорстке закріплення; б) шарнірне опирання.

Тоді для конкретизації структурних формул (14) та (15) потрібно побудувати функцію  $w(x, y)$ . Використовуючи метод теорії R-функцій, її можна подати в такому вигляді:

$$w = F_1 \wedge_0 F_2 \wedge_0 (\bar{F}_3 \vee_0 F_4),$$

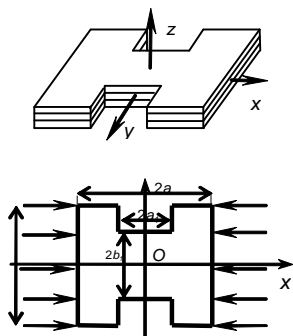


Рис. 2. Форма багат шарової пластини і схема її навантаження

Безрозмірний параметр  $\lambda$ 

$\frac{a_1}{2b}$	$\frac{E_1}{E_2}$	$\frac{b_1}{2b} =$	$\frac{b_1}{2b} =$	$\frac{b_1}{2b} =$	$\frac{b_1}{2b} =$
		-0.3	-0.35	-0.4	-0.45
Вільно оперта пластинка					
0.15	40	78,4	63,6	54,1	47,9
	30	62,9	50,6	43,1	37,9
	20	45,7	37,7	32,0	27,9
	10	29,6	24,8	20,9	17,7
	3	17,1	15,0	12,6	10,3
0.2	40	66,2	57,4	51,2	46,2
	30	52,3	45,6	40,6	36,4
	20	38,5	33,8	29,9	26,6
	10	24,5	21,8	19,1	16,7
	3	13,3	12,5	11,1	9,5
0.25	40	56,4	51,9	47,9	44,2
	30	44,2	41,0	37,7	34,7
	20	32,2	30,0	27,6	25,2
	10	20,2	19,0	17,4	15,6
	3	11,1	10,7	9,9	8,7
0.3	40	50,3	47,3	44,7	42,3
	30	39,3	37,2	35,1	33,1
	20	28,6	27,1	25,5	23,8
	10	17,9	17,0	15,9	14,6
	3	10,1	9,6	8,9	8,0
Жорстко закріплена пластинка					
0.15	40	137,7	139,0	139,8	139,3
	30	105,0	105,9	106,6	106,3
	20	73,1	73,4	73,8	73,3
	10	42,2	41,7	41,3	40,4
	3	21,1	20,0	18,8	17,5
0.2	40	126,2	134,0	137,7	138,6
	30	96,5	102,0	105,0	105,6
	20	67,4	70,6	72,5	72,8
	10	39,0	40,0	40,5	40,1
	3	19,6	19,0	18,4	17,4
0.25	40	131,6	136,4	138,0	138,3
	30	100,2	103,4	105,1	105,4
	20	69,4	71,4	72,5	72,6
	10	39,7	40,0	40,4	40,0
	3	20,0	18,9	18,2	17,3
0.3	40	146,0	140,7	138,7	138,2
	30	110,2	106,5	105,6	105,4
	20	75,5	73,1	72,7	72,6
	10	42,5	40,7	40,4	40,0
	3	21,0	19,1	18,1	17,2

де символи  $\wedge_0, \vee_0$  позначають R-операції: R-кон'юнкцію та R-диз'юнкцію, відповідно, які визначаються за такими формулами [11, 12]:

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

За допомогою функцій  $F_1, F_2, F_3, F_4$  задаються множини точок площини, що знаходяться всередині смуг:

$$F_1 = (a^2 - x^2)/(2a) \geq 0, \quad F_2 = (b^2 - y^2)/(2b) \geq 0,$$

$$F_3 = (a_1^2 - x^2)/(2a) \geq 0, \quad F_4 = (b_1^2 - y^2)/(2b) \geq 0.$$

Системи апроксимуючих функцій для невизначених компонент обирались як і у попередньому прикладі.

У табл. 2 наведені отримані результати безрозмірного параметра  $I = \frac{4P_{кр} b^2}{E_2 h^3}$  критичного навантаження

пластини в залежності від розмірів вирізів і виду закріплення.

Про достовірність отриманих результатів свідчить наступне:

1) якщо при зменшенні розмірів вирізу, пластина прагне виродитися в квадратну, то отримані результати для критичного навантаження прямують до відповідних результатів щодо квадратної пластини (табл. 1);

2) при збільшенні кількості координатних функцій і застосуванні точніших формул Гауса для обчислення елементів матриці Рітца, спостерігалась стабілізація результатів, тобто практична збіжність. Було встановлено, що стабілізація результатів у третьому знакові починається при збереженні 21 координатної функції для кожного з переміщень  $u(x,y)$  та  $v(x,y)$ , та 28 координатних функцій, для прогину  $w(x,y)$ , що відповідає 12-ій степені апроксимуючого полінома у формулі (16). Для обчислення елементів матриці Рітца було застосовано 10-точкову формулу Гауса.

**Приклад 2.** Розглянемо тришарову пластину ( $0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ ) з такою ж формою плану та механічними характеристиками, як і в попередній задачі, але при іншому способі навантаження. Вважаємо, що навантаження діє тільки на частині контуру (рис.3). Геометричні параметри й параметри вирізу фіксуємо:  $a/b = 1$ ;  $h/(2b) = 0.01$ ;  $a_1/(2b) = 0.3$ ;  $b_1/(2b) = 0.4$ .

Проаналізуємо вплив граничних умов і механічних параметрів на величину критичного навантаження. Результати проведених досліджень наведено на рис. 4.

За результатами проведених досліджень (рис. 4), можна зробити деякі висновки, а саме: якісний характер впливу ширини ділянки навантаження на критичне значення є подібним до відповідної поведінки прямокутної пластини, яка була проаналізована в праці [4]. Тобто при зменшенні ділянки, на якій діє сила, критичне навантаження зменшується, а відношення параметра критичного

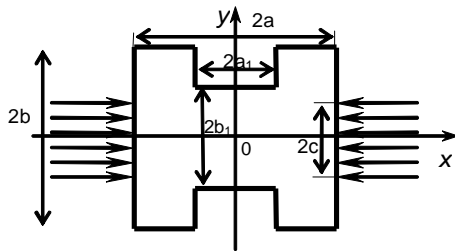


Рис. 3. Пластина, що навантажена по частині контуру

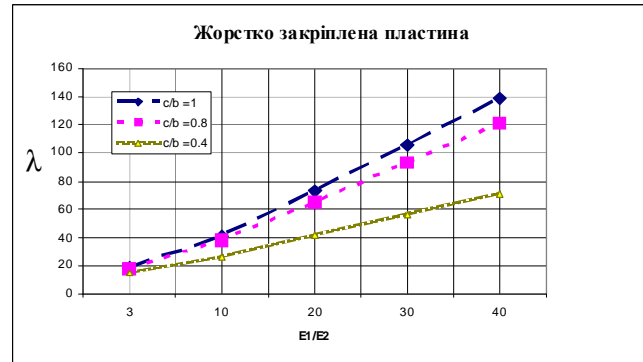
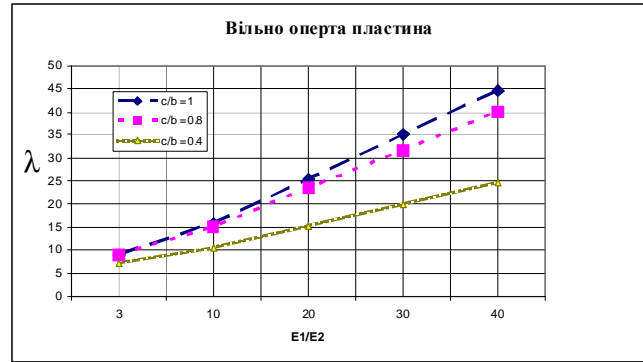


Рис. 4. Безрозмірний параметр  $\lambda$  критичного навантаження для тришарової пластини

навантаження до відповідного параметра пластини, навантаженої уздовж всієї сторони збільшується. Крім цього, зауважимо, що зменшення рівня ортотропії, зменшує відхилення між результатами для різної ширини ділянки навантаження. Істотний вплив на критичне навантаження мають граничні умови. З наведених графіків випливає, що значення критичного параметра для жорстко закріпленої пластини майже втричі перебільшує відповідні величини для вільно опертої тришарової пластини.

**Висновки.** У статті запропоновано метод для дослідження статичної стійкості багатошарових пластин, симетричної структури з довільною формою плану та різними видами крайових умов. Математична постановка задачі виконана в рамках класичної теорії, яка не враховує деформації зсуву. Розроблений метод базується на використанні теорії R-функцій та варіаційних методів. Метод реалізовано в рамках системи POLE-RL [12]. За допомогою створеного програмного забезпечення проведено тестування і розв'язані нові задачі стійкості пластин складної форми при різних способах закріплення й навантаження.

#### Література

1. Kormannikova E. Buckling analysis of a laminated plate / E. Kormannikova, I. Mamuzic // Metalurgija. – 2008 – 47(2). – P. 129-132.
2. Salim S. Buckling of a laminated plates with random material characteristics. / S. Salim, N.G.R. Iyengar, D. Yadav // Applied Composite Materials. – 1998. – 5. – P. 1-9

3. Putcha N.S. Stability and natural vibration analysis of laminated plates by using a mixed element based on a refined plate theory / N.S. Putcha, J.N. Reddy // J. Sound and Vibration, – 1986. – 104(2). – P. 285 – 300.

4. Кудинов С.В. Влияние ширины участка нагружения на устойчивость прямоугольных пластин / С.В. Кудинов, Б.Г. Попов // Известия вузов. Машиностроение, 1981. - №8. – С. 144-146.

5. Awrejcewicz J. Analysis of complex parametric vibrations of plates and shells using Bubnov-Galerkin approach. / J. Awrejcewicz, A.V. Krysko // Applied Mechanics. – 2003. – 73. – P. 495 – 504.

6. Ganapathi M. Non-linear dynamic stability characteristics of elastic plates subjected to periodic in-plane load. / M. Ganapathi, B.P. Patel, P. Boisse, M. Touratier // Int. J. Non-Linear Mechanics. – 35. – 2000. – P. 467 – 480.

7. Abe Akira. Nonlinear dynamic behaviors of clamped laminated shallow shells with one-to-one internal resonance. / Akira Abe, Yukinori Kobayashi, Gen Yamada // J. Sound and Vibration, – 2007. – 304. – P. 957 – 968.

8. Ganapathi M. Non-linear dynamic stability analysis of composite laminates under periodic in-plane compressive loads. / M. Ganapathi, P. Boisse, D. Solaut // Int. J. Numerical Methods in Engineering. – 46. – 1999. – P. 943 – 956.

9. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий // М.: Гостехиздат. – 1957. – 464с.

10. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин / С.А. Амбарцумян // М.: Наука, 1967. – 266с.

11. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. / Л.В. Курпа // Харьков, НТУ «ХПИ» – 2009. – 408с.

12. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R- функции в задачах теории пластин. / Рвачев В.Л., Курпа Л.В. // Киев: Наук. думка, 1987.– 176 с.

Отримана 28.01.10

L. Kurpa, A. Linnik, V. Tkachenko

**Stability investigation of the symmetric cross-ply plates by R-functions method**

National Technical University «KhPI», Kharkiv

*The method of static stability investigation of the laminated plates of the symmetric structure with complex shape is considered in this article. The application of the R-functions theory and variational Ritz's method have been used in base of the given method. The proposed method takes into account heterogeneous subcritical state of plates. Some numerical results of the concrete problems are presented and compared with those existing in the open literature in order to demonstrate the correctness and the accuracy of the present method. New results are obtained for some laminated plates with complex shape.*

—  
²í ôî ðî àö³ÿ

EUROMECH Colloquium 511

## BIOMECHANICS OF HUMAN MOTION. NEW FRONTIERS OF MULTIBODY, TECHNIQUES FOR CLINICAL APPLICATIONS

Azores, Portugal, March 9-12 2011

<http://www.dem.ist.utl.pt/euomech511>

### Colloquium Topics

- Biomechanical modelling
- Multibody formulations for biomechanics
- Finite element analysis in human motion
  - Kinematic and kinetic data acquisition
- Optimization in biomechanics of human motion
  - Musculoskeletal modelling
    - Stability analysis
    - Motor control
  - Contact mechanics in biomechanics
  - Human dynamics and rehabilitation

### Contact Us

For any information regarding the conference please send a message to the Secretariat:

Ms. Paula Jorge

IDMEC Instituto Superior Técnico

Av. Rovisco Pais 1

Portugal

Fax: +351 21 841 7915

e-mail: euomech511(at)dem.ist.utl.pt