

УДК 539.3: 624.153.6

М. Марчук

Ст. наук. співр., докт. фіз.-мат. наук,
Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача
НАН України,
м. Львів

Г. Шевчук

Інженер,
Національний лісотехнічний
університет України,
м. Львів

ВИЗНАЧЕННЯ ТИСКУ ПІД ПІДКРІПЛЮЮЧИМ ОБОЛОНКОВИМ ЕЛЕМЕНТОМ ФУНДАМЕНТУ

Розглянуто спосіб підкріплення фундаменту споруд шляхом використання оболонкових підкріплюючих елементів. Запропоновано розрахункову схему для визначення тиску підкріплюючого елемента на ґрунт. Отримано розв'язок поставленої задачі в замкненому вигляді. Записано аналітичну формулу для функції розподілу тиску в залежності від геометричних і фізико-механічних характеристик оболонки, коефіцієнта податливості ґрунту та інтенсивності навантаження на фундамент. Проаналізовано рівень і характер розподілу тиску для конкретної конструкції.

циліндрична оболонка, пружна основа, контактний тиск, розрахункова схема

Вступ. Підсилення основ фундаментів споруд тривалої експлуатації є найскладнішими та відповідальними ремонтними роботами, які виконуються при ослабленні ґрунтів під підшвами фундаментів. Основною причиною якісних змін у ґрунтах основи під існуючими будівлями є ґрунтові води, які епізодично змінюють свій рівень. Ці зміни негативно впливають на тримку здатність фундаментів. Існують різноманітні способи їх підсилення [1, 2, 6 – 8] зі своїми перевагами та недоліками. Одним з ефективних є використання оболонкових елементів, зокрема циліндричного типу, що дозволяє розподілити навантаження на всю площу ґрунту під фрагментом будівлі. Це, в свою чергу, потребує визначення тиску на межі заглибини та оболонкового елемента для оцінювання деформацій ущільнення в ґрунті.

Нижче, на основі узагальненої теорії оболонок, запропонована розрахункова схема для визначення тиску підкріплюючого елемента у вигляді фрагмента циліндричної оболонки на ґрунт.

1. Постановка задачі. Розглянемо фрагмент циліндричної оболонки, який утворюється шляхом перерізу кругової оболонки площиною, паралельною координатній осі OZ на відстані $R - h - f$ від цієї ж осі (рис. 1). Тут

R – радіус серединної поверхні оболонки; h – півтовщина оболонки; f – стріла підйому фрагмента оболонки відносно перерізуючої площини. Фрагмент оболонки притискається рівномірно розподіленим по його внутрішній лицевій поверхні навантаженням q та зосередженими на його краях зусиллями P до виїмки циліндричної форми

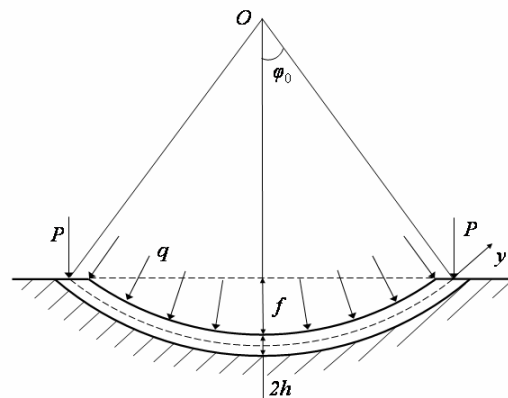


Рис. 1. Схема взаємодії фрагмента циліндричної оболонки з пружним середовищем

радіуса $R+h$ в пружній основі з коефіцієнтом податливості k .

Напружено-деформований стан фрагмента циліндричної оболонки описується [4]:

а) рівняннями рівноваги

$$\frac{dN}{dy} + \frac{1}{R}Q = 0; \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dy} - Q = 0; \quad (2)$$

$$\frac{dQ}{dy} - \frac{1}{R}N = q - kw; \quad (3)$$

б) співвідношеннями пружності

$$N = B\varepsilon_1^0; \quad M = D\varepsilon_1^1; \quad Q = \Lambda\varepsilon_{13}^0; \quad (4)$$

в) деформаційними співвідношеннями

$$\varepsilon_1^0 = \frac{du}{dy} + w/R; \quad \varepsilon_1^1 = \frac{d\gamma}{dy};$$

$$\varepsilon_{13}^0 = \gamma + \frac{dw}{dy} - u/R. \quad (5)$$

У співвідношеннях (1) – (5) прийняті позначення: $y = R\varphi$, φ – кутова координата на серединній поверхні; N – розтягуюче зусилля в серединній поверхні оболонки; M – згинаючий момент; Q – перерізуюча сила; u – переміщення точок серединної поверхні вздовж координати φ ; w – функція прогину вздовж радіальної координати; γ – кут повороту нормального до серединної поверхні

елемента перед деформуванням; $B = \frac{2Eh}{1-\nu^2}$ – жорсткість

оболонки на розтяг; $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} = \frac{h^2}{3}B$ – згинна жорст-

кість оболонки; $\Lambda = 2k'G'h$ – зсувна жорсткість оболонки; E , ν , G' – модуль Юнга, коефіцієнт Пуасона та трансверсальний модуль зсуву матеріалу оболонки; $k' = 5/6$.

Оскільки крайові зрізи фрагмента оболонки при $\varphi = \varphi_0$ знаходяться під непрямым кутом до її серединної поверхні, то дію зосереджених сил замінюємо еквівалентною системою зусиль (рис. 2). Тоді граничні умови з урахуванням симетрії відносно променя $\varphi = 0$, запишемо у вигляді:

$$u(0) = 0; \quad \gamma(0) = 0; \quad \frac{dw(0)}{dy} = 0. \quad (6)$$

$$N(\varphi_0) = N_0; \quad M(\varphi_0) = M_0; \quad Q(\varphi_0) = Q_0. \quad (7)$$

Рівняння (1) – (3) разом зі співвідношеннями (4), (5) та граничними умовами (6), (7) складають замкнену систему для визначення характеристик напружено-деформованого стану розглянутого фрагмента циліндричної оболонки, зокрема радіального переміщення $w(\varphi)$ точок

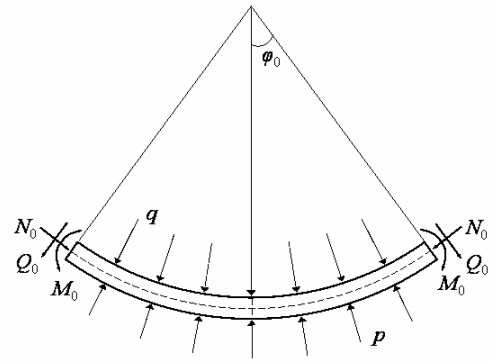


Рис. 2. Розрахункова схема фрагмента циліндричної оболонки із пружною основою

зовнішньої лицевої поверхні $r = R+h$, через яке визначається тиск на пружну основу за формулою [5]

$$p(\varphi) = k w(\varphi). \quad (8)$$

2. Розв'язування задачі. Підставивши у рівняння (1) вираз для перерізуючого зусилля Q з (2) та виконавши інтегрування, отримуємо

$$N = C_1 R - M/R, \quad (9)$$

де C_1 – стала інтегрування, яку визначаємо з двох перших граничних умов (7):

$$C_1 = N_0/R - M_0/R^2. \quad (10)$$

З рівняння (2) при врахуванні виразів для згинного моменту M та перерізуючої сили Q за двома останніми формулами (4) отримуємо вираз для переміщення u точок серединної поверхні вздовж кільцевої координати через функції кута повороту γ та прогину w :

$$u = R(\gamma + w' - \gamma''/\kappa^2); \quad \kappa^2 = \Lambda/D. \quad (11)$$

У (3) та в подальших викладках штрих над знаком функції означатиме похідну за змінною y .

Підставивши у (9) вирази для N та M зі співвідношень (4) з урахуванням (11), отримаємо

$$w'' + w/R^2 + (1 + D/BR^2)\gamma' - \gamma''/\kappa^2 = C_1/B. \quad (12)$$

Оскільки

$$D/BR^2 = 1/3(h/R^2) = 1/3\varepsilon^2,$$

та з врахуванням того, що при $h = 0.1$ м, $R_{\min} = 3.0$ м

$$1/3\varepsilon^2 = 0.37 \cdot 10^{-3} \ll 1$$

рівнянню (12) надамо вигляду

$$w'' + w/R^2 + \gamma' - \gamma''/\kappa^2 = C_1/B. \quad (13)$$

Величину $\varepsilon = h/R$ прийнято називати параметром тонкостінності циліндричної оболонки.

Шляхом підстановки в рівняння (3) виразу для Q з урахуванням (9) отримуємо

$$D(\gamma'' + \gamma''' / R^2) = C_1 + q - kw, \quad (14)$$

звідки при $k \neq 0$, що при граничних умовах (6), (7) еквівалентне однозначності розв'язку поставленої двоточкової задачі, знаходимо вираз для функції прогину

$$w = (C_1 + q) / k - \frac{D}{k}(\gamma''' + \gamma' / R^2). \quad (15)$$

При $q = const$ з (14) маємо вираз для w'' :

$$w'' = -\frac{D}{k}(\gamma''' + \gamma' / R^2). \quad (16)$$

Підстановка (15) і (16) у рівняння (12) дає результат

$$-(\gamma'' + \gamma''' / R^2) + \frac{1}{DR^2}(C_1 + q) - \frac{1}{R^2}(\gamma''' + \gamma' / R^2) + \frac{k}{D}(\gamma' - \gamma''' / R^2) = \frac{k}{DB}C_1,$$

звідки шляхом інтегрування отримуємо розв'язувальне рівняння поставленої задачі:

$$\gamma'' + \frac{2}{R^2} \left(1 + \frac{R^2 k}{\Lambda} \right) \gamma'' + \frac{1}{R^4} \left(1 - \frac{R^4 k}{D} \right) \gamma = \left[\frac{1}{DR^2} q + \left(\frac{1}{DR^2} - \frac{k}{DB} \right) C_1 \right] y + C_2, \quad (17)$$

де C_2 – стала інтегрування, яка підлягає визначенню з граничних умов (6), (7).

При відомій функції кута повороту з рівності (14), з урахуванням формули (8), отримуємо вираз для знаходження розподілу тиску $p(\varphi)$ під циліндричним фрагментом:

$$p(\varphi) = q + C_1 - D(\gamma''' + \gamma' / R^2). \quad (18)$$

Для пошуку розв'язку диференціального рівняння (17) треба знайти корені характеристичного рівняння [3]

$$\mu^4 + \frac{2}{R^2}(1 + a^2/2)\mu^2 + \frac{1}{R^4}(1 - b^4) = 0, \quad (19)$$

де $a^2 = R^2 k / \Lambda$; $b^4 = R^4 k / D$.

Чотири корені бікватратного рівняння (19) визначаються з таких формул:

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= (\alpha \pm i\beta) / R; \\ \mu_{3,4} &= -(\alpha \pm i\beta) / R. \end{aligned} \quad (20)$$

У (20) α та β відповідають вирази

$$\alpha^2 = 1 + a^2/2 + \sqrt{a^2 + a^4/4 + b^2};$$

$$\beta^2 = \sqrt{a^2 + a^4/4 + b^2} - 1 - a^2/2.$$

Відповідно, розв'язок диференціального рівняння (17) запишемо у вигляді [3]

$$\begin{aligned} \gamma &= C_3 \operatorname{sh} \alpha_1 y \cos \beta_1 y + C_4 \operatorname{sh} \alpha_1 y \sin \beta_1 y + \\ &+ C_5 \operatorname{ch} \alpha_1 y \sin \beta_1 y + C_6 \operatorname{ch} \alpha_1 y \cos \beta_1 y - \\ &- \frac{R^4}{1 - b^4} \left\{ \left[\frac{1}{DR^2} q + \left(\frac{1}{DR^2} - \frac{k}{DB} \right) C_1 \right] y + C_2 \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

де $\alpha_1 = \alpha / R$, $\beta_1 = \beta / R$.

У (21) C_i ($i = 3, 6$) – сталі, що визначаються з граничних умов (6) та (7).

З другої граничної умови (6) отримуємо рівняння

$$C_4 + C_6 + \frac{R^4}{1 - b^4} C_2 = 0.$$

Перша гранична умова (6) разом з другою та третьою з урахуванням співвідношення (11) для функції переміщення u вздовж кутової координати має вигляд

$$\gamma''(0) = 0. \quad (22)$$

З виразу (15) для функції прогину w знаходимо її першу похідну:

$$w' = -\frac{D}{k}(\gamma'' + \gamma''' / R^2).$$

Для $(\gamma'' + \gamma''' / R^2)$ з розв'язувального рівняння (17) маємо

$$\begin{aligned} \gamma'' + \gamma''' / R^2 &= \left[\frac{1}{DR^2} q + \left(\frac{1}{DR^2} - \frac{k}{DB} \right) C_1 \right] y + C_2 - \\ &- \frac{1}{R} (1 + a^2) \gamma'' - \frac{1}{R^4} (1 - b^4) \gamma. \end{aligned}$$

Тоді з третьої умови (6) маємо

$$w'(0) = -\frac{D}{k} \left[C_2 + \frac{1}{R^2} (1 + a^2) \gamma''(0) - \frac{1}{R^4} (1 - b^4) \gamma(0) \right] = 0,$$

звідки випливає, що $C_2 = 0$. Наслідком симетрії задачі є рівності $C_4 = C_6 = 0$.

Для визначення невідомих сталих C_3 та C_5 слугують дві невикористані останні рівності в граничних умовах (6), котрим надамо вигляду:

$$\begin{cases} (\alpha \operatorname{ch} \alpha \varphi_0 \cos \beta \varphi_0 - \beta \operatorname{sh} \alpha \varphi_0 \sin \beta \varphi_0) C_3 + \\ \quad + (\alpha \operatorname{sh} \alpha \varphi_0 \sin \beta \varphi_0 + \beta \operatorname{ch} \alpha \varphi_0 \cos \beta \varphi_0) C_5 = \\ \quad = MR / D + (q + C_1) / Rk + C_1 R / B; \\ [(\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sh} \alpha \varphi_0 \cos \beta \varphi_0 - 2\alpha\beta \operatorname{ch} \alpha \varphi_0 \sin \beta \varphi_0] C_3 + \\ \quad + [(\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{ch} \alpha \varphi_0 \sin \beta \varphi_0 + 2\alpha\beta \operatorname{sh} \alpha \varphi_0 \cos \beta \varphi_0] C_5 = \\ \quad = Q_0 R^2 / D. \end{cases}$$

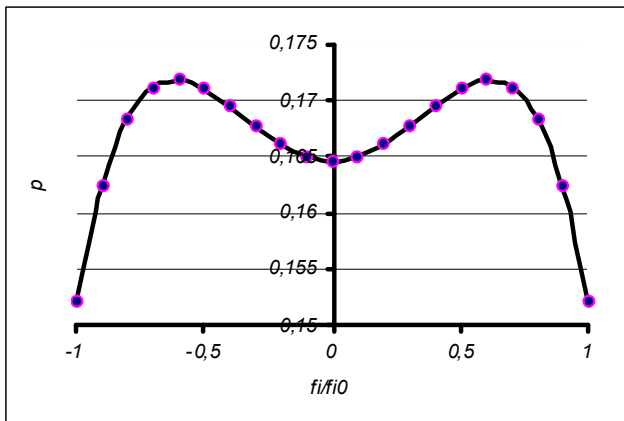


Рис. 3. Розподіл тиску на границі пружного середовища та зовнішньої лицевої поверхні циліндричного оболонкового фрагмента

При відомій функції кута повороту γ для контактного тиску p можна записати

$$p = C_1 + q - D(\gamma''' + \gamma' / R^2).$$

3. Аналіз числових результатів. Розрахунок був виконаний для випадку циліндричного фрагмента оболонки, виготовленого з бетону марки 200 з модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^4$ МПа і коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,16$ [3, с.397, табл. 5]. Геометричні параметри фрагмента оболонки покладалась рівними $h = 0,1$ м; $R = 6,0$ м; $\varphi_0 = 0,199317$ рад. За пружне середовище приймався щільний пісок зі значенням коефіцієнта податливості $k = 100$ МПа/м [3, с. 193].

На рис. 3 наведений графік розподілу тиску на пружне середовище, який зумовлений дією навантаженого фрагмента оболонки згідно зі схемою на рис. 2. Інтенсивності зосередженого та розподіленого зусиль покладалась такими $P = 0,06$ МПа; $q = 0,015$ МПа.

Як видно з графіка, розподіл $p(\varphi)$ має досить нерівномірний характер по кутовій координаті. Тобто наявні області більш інтенсивної та менш інтенсивної навантаженості як пружного середовища, так і самого підкріплюючого елемента.

Висновки. Отриманий вираз для розподілу тиску під оболонковим підкріплюючим елементом фундаменту дозволяє оцінити рівень максимальної дії на ґрунт та визначити відповідне допустиме значення навантаження.

Нерівномірний характер розподілу тиску дозволяє зробити висновок про використання в якості підкріплюючих елементів оболонок змінної товщини з метою раціонального розходу матеріалу. Такі дослідження доцільно провести в подальшому.

Література

1. Гольшев А. Б., Ткаченко И. Н. Проектирование усиленной несущих железобетонных конструкций производственных зданий и сооружений. – К.: Логос, 2001. – 172 с.
2. Далматов Б. И. Проектирование фундаментов зданий и подземных сооружений. – М.: АСВ, 2001. – 440 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
4. Пелех Б. Л., Сухорольський М. А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – К.: Наук. думка, 1980. – 216 с.
5. Посацький С. Опір матеріалів. – Львів: Вид-во Львівського університету, 1973. – 403 с.
6. Тетиор А.Н., Логинов В. Ф. Проектирование и строительство подземных зданий и сооружений. – К: Будівельник, 1990. – 168 с.
7. Хильмер К. Повреждение подземных конструкций. Перевод с немецкого: Марков А. И. – Запорожье: ООО «ИПО «Запоріжжя», ООО «Настрой», 2009.– 408 с.
8. Haack A., Emig K.-F. Abdichtungen im Gьrндungsbe-reich und auf genutzten Deckenflдchen. – Berlin: Ernst & Sohn, 2002. – 566 P.

Отримана 24.05.10

M. Marchuk¹, G. Shevchuk²

Determination of pressure under the reinforcement shell element of the foundation

¹Pidstryhach Institute for Applied Problem of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, L'viv

²National Forestry University of Ukraine, L'viv

The way of reinforcement of the foundation works through the use of shell reinforcement elements are considered. The calculation scheme for determining the pressure reinforcement element in ground is proposed. A solution of the problem in a closed form is obtained. The analytical formula for the distribution function of pressure depending on the geometrical and physical and mechanical properties of shell and ground pliability coefficient and intensity loading on the foundation is wrote. The level and character of pressure distribution for specific constructions are analyzed.

Дисертація

5th MPA Meeting (International Meeting on Developments in Materials, Processes and Applications of Emerging Technologies)

Alvor, Portugal, 27-29 June 2011

<http://www.mpa-meeting.com/>