

О. Андрейків

Член. кор. НАН України,
професор, докт. техн. наук,
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
м. Львів

В. Скальський

Професор, докт. техн. наук,
Фізико-механічний інститут
НАН України,
м. Львів

Ю. Матвійв

Доцент, канд. техн. наук

Т. Крадінова

Інженер-механік

Луцький національний
технічний університет,
м. Луцьк

УДК: 539.375

ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛИШКОВОЇ ДОВГОВІЧНОСТІ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ ЗА ДОВГОТРИВАЛОГО СТАТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ І НИЗЬКОТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Сформульована розрахункова модель для визначення довговічності тривимірного тіла з тріщинами за довготривалого розтягу і низькотемпературного поля. На основі цього досліджений аналог задачі Сакка про визначення залишкового ресурсу нескінченного тіла з круговою тріщиною за довготривалого статичного розтягу.

тріщина повзучості, коефіцієнт інтенсивності напружень, період докритичного росту тріщини повзучості, залишковий ресурс, низькотемпературна повзучість

Вступ. Відомо [1 – 3], що в більшості випадків матеріали елементів конструкцій мають дефекти типу тріщин. Вони з'являються при виготовленні самих матеріалів або елементів, а також у результаті довготривалої їх експлуатації. В таких елементах при довготривалому статичному навантаженні розвиваються тріщини повзучості, які ростуть, досягають критичного значення і настає можливе катастрофічне руйнування конструкції. Для того, щоб передбачити і відвернути таке руйнування проводять профілактичні огляди і діагностику відповідальних (несучих) елементів. При цьому виявляються дефекти типу тріщин різних розмірів. І тому дуже важливим є визначення періоду їх докритичного росту в залежності від розмірів і геометрії розміщення. Для того, щоб не було катастрофічного руйнування конструкції, порівнюють період докритичного росту тріщини, який повинен бути більший від часу між профілактичними оглядами. Якщо він буде менший, то

приступають до ремонту або заміни елемента конструкції. Тому на протязі багатьох останніх років не припиняються спроби створити теорії поширення тріщин повзучості в твердих тілах [4– 12].

У цій статті зроблена спроба створити таку теорію, зокрема, розрахункову модель для визначення періоду докритичного росту тріщин низькотемпературної повзучості в тривимірних тілах, використовуючи сформульований раніше [11, 12] авторами енергетичний підхід. Суть такої моделі полягає в наступному.

Формулювання розрахункової моделі. Розглянемо тривимірне тіло з плоскою тріщиною початкової площі S_0 , яке піддане дії низької температури T ($T < 0,5T_p$ [10], тобто температура T тіла менша половини температури T_p плавлення його матеріалу) і довготривалого статичного навантаження p (рис. 1).

При цьому, вважається, що тріщина макроскопічна, а зовнішні розтягуювальні навантаження прикладені так, що

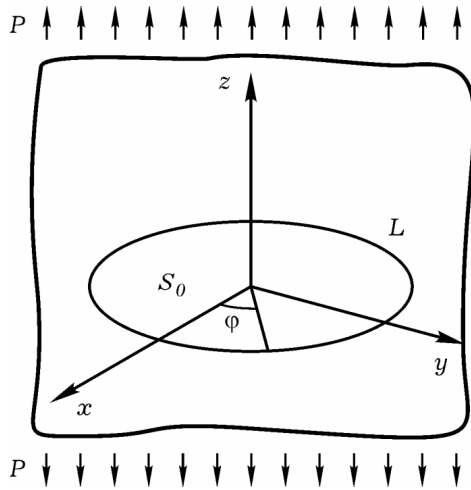


Рис. 1. Схема навантаження тривимірного тіла з тріщиною

відносно площі розміщення тріщини напружено-деформований стан симетричний, тобто описується в околі її вершини тільки коефіцієнтом інтенсивності напружень K_I . Задача полягає у визначенні часу $t = t_*$, коли в результаті низькотемпературної повзучості тріщина підросте до критичного розміру S_* і тіло зруйнується.

Для розв'язання такої задачі насамперед побудуємо математичну модель, тобто математичні рівняння, які описують цей процес. При цьому будемо вважати, що тріщина рухається неперервно від початкового розміру $S = S_0$ до кінцевого $S = S_*$. Це припущення є коректним, оскільки реальний стрибкоподібний рух тріщини низькотемпературної повзучості супроводжується стрибками малого розміру ΔS_c за відносно великі проміжки часу Δt_c . У зв'язку з цим можемо подати швидкість росту тріщини наближено у такому вигляді:

$$V = \frac{dS}{dt} \approx \frac{\Delta S_c}{\Delta t_c}. \quad (1)$$

Енергетичний баланс цього процесу для кожного стрибка тріщини малого розміру ΔS_c запишеться [11, 12] в такому вигляді:

$$A = W + \Gamma + Q + K. \quad (2)$$

Тут A – робота зовнішніх сил; W – енергія деформування тіла після просування тріщини на величину ΔS_c , яку подамо у вигляді

$$W = W_s + W_p^{(1)}(S) - W_p^{(2)}(t), \quad (3)$$

де W_s – пружна складова W ; $W_p^{(1)}(S)$ – частина енергії пластичних деформацій, що залежить тільки від площі тріщини S ; $W_p^{(2)}(t)$ – частина енергії пластичних деформацій, яка виділяється при сталій площі тріщини під час інкубаційного періоду підготовки її стрибка ΔS_c , залежить тільки від часу t і генерується самим тілом; Γ – енергія руйнування тіла, яка залежить тільки від площі тріщини; Q – величина виділеної теплової енергії, яку вважають відносно малою величиною і нею будемо

нехтувати при обчисленнях; K – кінетична енергія, яка в нашому випадку буде також малою величиною.

Оскільки виконується умова балансу енергії, то звідси слідує, що буде виконуватися умова балансу швидкостей зміни енергій:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial t}. \quad (4)$$

Підставляючи вираз (3) в (4), цю умову можемо записати в такому вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial S} \left[\Gamma - (A - W_s - W_p^{(1)}) \right] \frac{dS}{dt} - \frac{\partial W_p^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

З рівняння (5) знайдемо величину швидкості поширення тріщини $V = dS/dt$:

$$\frac{dS}{dt} = \left[\frac{\partial W_p^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t} \right] / \frac{\partial}{\partial S} \left[\Gamma - (A - W_s - W_p^{(1)}) \right]. \quad (6)$$

Використовуючи результати праць [11, 12], похідну від виразу в квадратних дужках у правій частині рівняння (6) знайдемо в такому вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial S} \left[\Gamma - (A - W_s - W_p^{(1)}) \right] = \gamma_f - L^{-1} \sigma_t \int_L \delta_t(0, \xi) d\xi. \quad (7)$$

Тут $\gamma_f = \sigma_t \delta_c$ – питома енергія руйнування при поширенні тріщини повзучості; $\delta_t(0, \xi)$ – поточне розкриття тріщини в її вершині при усередненому напруженні σ_t в зоні передруйнування; δ_c – критичне значення $\delta_t(0, \xi)$; ξ – поточна координата вздовж контуру тріщини довжини L ; σ_t шукаємо як середнє значення між межею міцності σ_s і межею пластичності $\sigma_{0,2}$, тобто $\sigma_t = 0,5(\sigma_s + \sigma_{0,2})$.

При визначенні енергетичної складової $W_p^{(2)}(t)$ потрібно побудувати залежність деформаційної величини δ_t від часу t , врахувавши, що в зоні передруйнування відбувається процес низькотемпературної повзучості.

Моделювання низькотемпературної повзучості. Як відомо [4], за низькотемпературної повзучості і малій величині ε_0 початкової деформації у визначенні всього періоду повзучості t_p рівнозначними є як перша ($0 < t < t_1$), так і друга ($t_1 < t < t_2$) ділянки кривої повзучості (рис. 2).

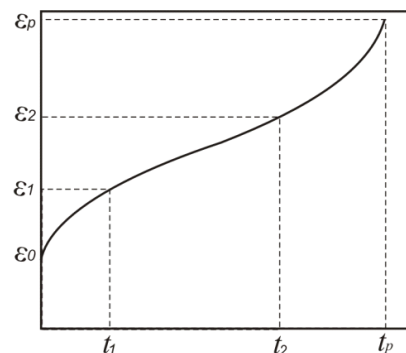


Рис. 2. Залежності деформації повзучості ε від часу t за сталих напружень

Це певною мірою і відрізняє цей підхід від аналогічного [11, 12] для високотемпературної повзучості, де весь період повзучості t_p наближався другим періодом повзучості, тобто $t_p \approx t_2 - t_1$. У зв'язку з цим зміну величини деформації ε з часом t за низькотемпературної повзучості будемо визначати таким рівнянням:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + v_2 t + v_1 \ln[(1+t)/t_1]. \quad (8)$$

Тут v_1, v_2, t_1 – сталі, які визначаються з експерименту і не залежать від часу. Перевірка коректності рівняння (8) проведена на основі результатів експериментальних даних [4] для алюмінію за низьких температур: $T=77; 273$ °К і, відповідно, сталих напружень $\sigma=152$ і 55 МПа. На рис. 3 наведено порівняння аналітичних (суцільні лінії побудовані за формулою (8)) і експериментальних [4] даних (квадратики).

У цьому випадку сталі v_1, v_2, t_1 визначені порівнянням (8) з результатами експериментальних даних і вони відповідно рівні: для $T=77$ °К $v_1 = 0,025, t_1 = 0,241$ s, $v_2 = 0,005$ s⁻¹; для $T=273$ °К $v_1 = 0,011, v_2 = 0,001$ s⁻¹, $t_1 = 0,0001$ s. Як видно з рис. 3, результати експериментальних досліджень підтверджують коректність (8).

На основі результатів праці [3] між розкриттям зони передруйнуванням $\delta_t(x, t)$ і величиною деформації $\varepsilon(x, t)$ в цій зоні можна записати таку формулу:

$$\delta_t(x, t) = \delta_c \varepsilon_c^{-1} \varepsilon(x, t). \quad (9)$$

Тут δ_c, ε_c – критичні значення відповідно величин $\delta_t(x, t), \varepsilon(x, t)$ за однократного навантаження. Тоді на основі співвідношень (8) і (9) зміну величини $\delta_t(x, t)$ з часом можна аналітично подати так:

$$\delta_t(x, t) = \delta_0 + a_2 t + a_1 \ln[(1+t)/t_1]. \quad (10)$$

Тут a_1, a_2, t_1 – сталі, які визначаються з експерименту і не залежать від часу.

Зведення задачі до розв'язування диференціального рівняння. Вважаємо, що елементарний акт руйнування в пластичній зоні біля контуру тріщини (стрибок тріщини) почнеться тоді, коли величина δ_t досягне критичної величини, тобто $\delta_t = \delta_c$. Величину стрибка тріщини ΔS_c будемо визначати наступним чином.

Відомо [13], що напруження і деформації в зоні передруйнування в площині тріщини по лінії Ox , перпендикулярній до її контуру змінюється за законом

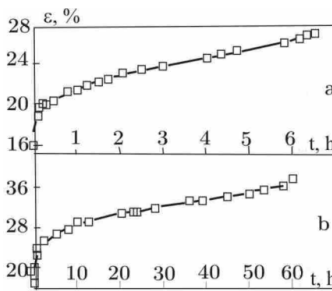


Рис. 3. Залежності деформації низькотемпературної повзучості ε для алюмінію від часу t за сталих температур і напружень: а – $T=77$ °К, $\sigma=152$ МПа; б – $T=77$ °К, $\sigma=55$ МПа

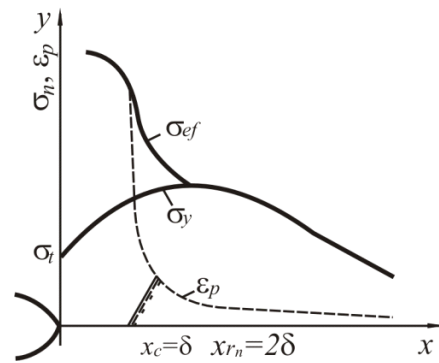


Рис. 4. Розподіл напружень σ_y і деформацій ε_p від вершини вздовж лінії тріщини Ox

спочатку зростання від контуру тріщини до точок x_{rn} і x_c , де досягається максимум, а потім спадання (рис. 4). У згаданій вище праці [13] показано, що при малому деформаційному зміцненні матеріалу $x_{rn} \approx 2\delta_t(0, \xi)$, $x_c = \delta_t(0, \xi)$. Тому величину стрибка тріщини ΔS_c можемо наближено визначити так:

$$\Delta S_c \approx \alpha_0 \int_L \delta_t(0, \xi) d\xi, \quad (11)$$

де α_0 – константа, яка визначається з експерименту.

Оскільки величини x_{rn} і x_c є достатньо малі, то, очевидно, на такій малій віддалі від контуру тріщини $\delta_t(x, \xi)$ змінюється неістотно і її наближено по x можна вважати константою, тобто

$$\delta_t(x, \xi) \approx \delta_t(0, \xi) \text{ при } (0 \leq x \leq x_c). \quad (12)$$

За такої умови знайдемо величину $W_p^{(2)}(t)$, яка на основі результатів праць [11, 12] може бути записана в такому вигляді:

$$W_p^{(2)}(t) = \alpha_0 \int_L \sigma_t \delta_t^2(0, \xi, t) d\xi - W_{thc}^{(2)}(t). \quad (13)$$

Тут $W_{thc}^{(2)}(t)$ – функція від факторів, які сповільнюють повзучість у зоні передруйнування. Похідну за t від цієї функції подамо так:

$$\frac{\partial W_{thc}^{(2)}}{\partial t} = 2\alpha_0 \delta_c \sigma_t \int_L [a_{2t} + a_{1t}(1+t)^{-1}] d\xi, \quad (14)$$

де a_{1t}, a_{2t} – невідомі константи, які визначаємо з експерименту.

Як впливає з результатів досліджень [4], між початковою швидкістю зміни деформації повзучості на першій ділянці діаграми і швидкістю на другій ділянці існує прямий зв'язок. На основі цього, а також, використовуючи подання в працях [14, 15] швидкості повзучості на другій ділянці діаграми (ділянці усталеної повзучості), коефіцієнти a_1, a_2, a_{1t}, a_{2t} в рівняннях (10), (14) запишемо так:

$$a_1 = A_1 \delta_0^m \delta_c^{-m}, \quad a_2 = A_2 \delta_0^m \delta_c^{-m}, \quad a_{1t} = A_1 \delta_{thc}^m \delta_c^{-m},$$

співвідношення [1 – 3] $\delta_0 \delta_c^{-1} = K_I^2 K_C^{-2}$, $\delta_0 = K_I^2 \sigma_t^{-1} E^{-1}$ (K_C – критичне значення K_I для тонкої пластини за однократного навантаження; E – модуль пружності).

На основі цього і запропонованої розрахункової моделі (22), (24) така задача зведеться до розв'язування рівняння

$$\frac{da}{dt} \approx \frac{A_{2t} K_{CC}^{-2m} (K_I^{2m} - K_{thc}^{2m})}{1 - K_{CC}^{-2} K_I^2} \quad (25)$$

за початкових і кінцевих умов

$$t = 0, a(0) = a_0; \quad t = t_*, a(t_*) = a_*. \quad (26)$$

Тут a_* – критичне значення радіуса тріщини a ; K_{thc} – значення K_I , за якого не буде поширення тріщини повзучості (нижнє порогове значення на кінетичній діаграмі росту тріщини повзучості); K_{CC} – критичне значення K_I , за якого настає руйнування тіла з тріщиною (верхнє порогове значення на кінетичній діаграмі росту тріщини повзучості).

Для задачі Сакка коефіцієнт інтенсивності напружень визначається так [10]:

$$K_I = 2p\sqrt{a/\pi}. \quad (27)$$

Підставляючи (27) у (25), отримуємо таке рівняння для визначення $t = t_*$ періоду докритичного росту тріщини повзучості:

$$\frac{da}{dt} \approx \frac{A_{2t} (\xi^{2m} - \xi_{thc}^{2m})}{1 - \xi^2}, \quad (\xi = aa_*^{-1}, \xi_{thc} = a_{thc} a_*^{-1}) \quad (28)$$

за початкових і кінцевих умов:

$$t = 0, \xi(0) = \xi_0; \quad t = t_*, \xi(t_*) = 1.$$

Тут a_{thc} – значення радіуса тріщини a , за якого не буде поширюватися тріщина при заданому p ; $\xi_0 = a_0 a_*^{-1}$.

Розглянемо випадок, коли нескінченне тіло виготовлене з полімерного композиційного матеріалу (величини $K_{CC} = 11,111 \text{ МПа}\sqrt{m}$, $m \approx 0,7$, $K_{thc} = 5,783 \text{ МПа}\sqrt{m}$, $A_{2t} \approx 0,013m/h$, [10]) і навантажене зусиллями $p=31 \text{ МПа}$. Тоді рівняння (28) набуде такого вигляду:

$$\frac{d\xi}{dt} \approx \frac{0,013(\xi^{1,4} - 0,161)}{1 - \xi^2}, \quad (29)$$

за початкових і кінцевих умов:

$$t = 0, \xi(0) = \xi_0; \quad t = t_*, \xi(t_*) = 1. \quad (30)$$

Інтегруючи (29) за умов (30), отримуємо

$$t_* = \int_{\xi_0}^1 \frac{(1 - \xi^2) d\xi}{0,013(\xi^{1,4} - 0,161)}. \quad (31)$$

На рис. 4 побудована графічна залежність (31) залишкової довговічності t_* нескінченного тіла від початкового

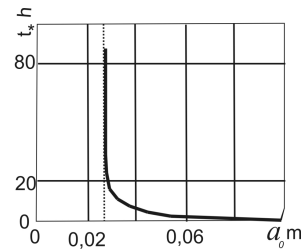


Рис. 4. Залежність залишкової довговічності t_* від початкового радіуса тріщини a_0 .

радіуса тріщини a_0 . Як видно з рисунка, при підході початкової довжини радіуса тріщини a_0 до критичної величини $a = a_*$ залишкова довговічність t_* тіла прямує до нуля.

Література

1. Панасюк В. В., Андрейків О. С., Партон В. З. Основы механики разрушения. – К.: Наук. думка, 1988. – 488 с.
2. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. Андрейків А. Е. Пространственное задачи теории трещин. – К: Наук. думка, 1982. – 348 с.
4. Garofalo F. Fundamentals of creep and creep-rupture in metals. – New York-London: Mac Millan Company, 1970. – 343 p.
5. Ленин Г. Ф. Ползучесть металлов и критерии жаропрочности. – М.: Металлургия, 1976. – 375 с.
6. Тайра С., Отани Р. Теория высокотемпературной прочности материалов. – М.: Металлургия, 1986. – 280 с.
7. Jakowluk A. Procesy pelzania i zmeńzenia w materiałach. – Warszawa: WNT, 1993. – 271 S.
8. Надау А. Пластичность и разрушение твёрдых тел. – т.2. – М.: Мир. – 1969. – 863 с.
9. Каминский А. А. Механика разрушения вязкоупругих тел. – К.: Наук. думка, 1980. – 157 с.
10. Kaminsky A. A. Subcritical crack growth in polymer composite materials under creep // Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity: Selected papers from the 8th Int. Conf. on Fracture (ICF 8), Kyiv, Ukraine, 8-14 June 1993. – Pergamon, 1994. – P. 513-520.
11. Андрейків О. С., Сас Н. Б. Механіка руйнування металічних пластин при високотемпературній повзучості // Фіз.-хім. механ. матеріалів. – 2006. №2. – С. 62-68.
12. Андрейків О. С., Сас Н. Б. Математична модель для визначення періоду докритичного поширення тріщин високотемпературної повзучості в твердих тілах // Доп. НАН України. – 2006. – №5 – С. 47–52.
13. Me. Meeking R. M. Finite deformation analysis of crack tip opening in elastic-plastic materials and implications for fracture // J. Mech. and Phys. Solids. – 1977. – 25, № 5. – P. 357–381.

Отримана 16.03.11

O. Andreykiv, V. Skalskyi, Yu. Matviyiv, T. Kradinova
The life-time determination of three-measurable bodies with cracks under long-term static loading and low temperature field

Ivan Franko Lviv National University, Lviv;
 Lutsk National Technical University, Lutsk

The calculation model for life-time determination of three-measurable body with the cracks under long-term static tension and the low temperature field is formulated. On the basis of it the analogue of Sakk task about determination of residual resource of endless body with a circular crack under the long-term static tension is investigated.