

**О. Андрейків**

Член-кор. НАН України,  
професор, докт. техн. наук,  
Львівський національний університет  
імені Івана Франка,  
м. Львів

**В. Скальський**

Професор, докт. техн. наук,  
Фізико-механічний інститут  
НАН України,  
м. Львів

**Ю. Матвіїв**

Доцент

**Т. Крадінова**

Магістр

Луцький національний  
технічний університет,  
м. Луцьк

УДК: 539.375

## **ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРІОДУ ДОКРИТИЧНОГО РОСТУ ТРІЩИН У БАЛКОВИХ ЕЛЕМЕНТАХ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ ЗА ДОВГОТРИВАЛОГО СТАТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*Побудовано розрахункову модель для визначення періоду докритичного росту тріщини низькотемпературної повзучості в балкових елементах відкритого профілю за довготривалого статичного навантаження. На основі цього визначено залишковий ресурс таких елементів за довготривалого статичного розтягу і згину.*

**балковий елемент відкритого профілю, тріщина повзучості, коефіцієнт інтенсивності напружень, період докритичного росту тріщини повзучості, залишковий ресурс, низькотемпературна повзучість**

Стрижневі системи, особливо металеві, широко застосовують в інженерній практиці. Тому оцінювання надійності, ресурсу (залишкового ресурсу) таких систем має важливе значення. У більшості випадків такі металеві конструкції працюють за довготривалих статичних навантажень. Для оцінювання їх міцності за однорозового навантаження розроблені достатньо ефективні методи. Ці методи отримали певне узагальнення для випадків довготривалого статичного навантаження бездефектних елементів конструкцій, особливо за високих температур [1 – 5]. Для дефектних елементів конструкцій, особливо з тріщинами і за низьких температур, такі методи розвинуті недостатньо (див. наприклад [6 – 9]). Тут постає питання про розвиток таких дефектів, їхню кінетику і, взагалі, про період їх до критичного росту. Дослідити цю проблему суто емпірично, шляхом експериментальних досліджень, є технічно досить складно і не завжди в можливо. Виникає потреба у створенні надійної теорії проти-

кання і розрахунку цих процесів, методик для визначення залишкового ресурсу таких елементів конструкцій.

У статті зроблена спроба створити методику і застосувати її до розрахунку балкових елементів відкритого профілю.

**Постановка задачі.** Розглянемо балковий елемент металокопункції відкритого профілю, який послаблений поверхневою прямолінійною тріщиною довжини  $l$  і підданий дії довготривалих статичних навантажень розтягу-стиску або згину за невисокої температури  $T$  ( $T < T_p$ ,  $T_p$  – температура плавлення матеріалу елемента). Задача полягає у визначенні періоду докритичного росту тріщини  $t = t_*$  (залишковий ресурс). Тут за період докритичного росту тріщини вважається час, по досягненню якого в заданому випадку тріщина низькотемпературної повзучості [1] підросте до величини  $l = l_*$ , коли експлуатувати конструкцію можна тільки після усунення такого дефекту.

Розв'язок цієї задачі реалізуємо за допомогою узагальнення відомого [8, 9] енергетичного підходу на випадок поширення тріщин низькотемпературної повзучості. У цьому випадку визначення залишкового ресурсу тонкостінного балкового елемента відкритого профілю зведеться до такої математичної задачі:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{A(K_I^{2m} - K_{thc}^{2m})}{K_{CC}^{2m}(1 - K_I^2 K_{CC}^{-2})} \quad (1)$$

за початкових і кінцевих умов:

$$t = 0, \quad l(0) = l_0; \quad t = t_*, \quad l(t_*) = l_*, \quad K_I(l_*) = K_{CC}.$$

Тут  $K_I$  – коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершини тріщини;  $K_{thc}$  – значення  $K_I$ , за якого не буде поширення тріщини повзучості (нижнє порогове значення на кінетичній діаграмі росту тріщини повзучості);  $K_{CC}$  – критичне значення  $K_I$ , за якого настає руйнування пластини з тріщиною (верхнє порогове значення на кінетичній діаграмі росту тріщини повзучості).

Задачу (1) розв'язуємо для кожного конкретного випадку навантаження конкретних балкових елементів. У зв'язку з цим розглянемо конкретні профілі елементів. В інженерних стрижневих металоконструкціях, елементи яких працюють на розтяг-стиск та згин, використовують металеві балки різних профілів. Геометрію цих профілів вибирають так, щоб при найменших затратах металу балки могли чинити максимальний опір навантаженням розтягу-стиску та згину.

Максимальні розтягувальні напруження в поперечному перерізі балки при її розтягу і згині можна обчислити на основі відомих формул опору матеріалів [9] відповідно:

$$\sigma_{max} = PF^{-1}, \quad \sigma_{max} = MW_x^{-1},$$

де  $P$  – величина сили розтягу елемента;  $F$  – площа його поперечного перерізу;  $M$  – величина згинаючого моменту,  $W_x$  – момент опору поперечного перерізу при згині відносно осі  $xx$ .

Очевидно, щоб форма поперечного перерізу була раціональною, потрібно за можливості вибирати її геометрію так, щоб величина  $W_x$  була максимальною. Цього можна досягти розподіляючи площу профілю якомога далі від нейтральної осі поперечного перерізу. Так виникли стандартні профілі типу швелерів, кутників, таврів та інші (див. наприклад рис. 1).

**Швелер.** Розглянемо балку, поперечний переріз якої представляє собою швелер з типовим дефектом – крайовою тріщиною (рис. 1,а). Для визначення  $N = N_*$  на основі (1) потрібно спочатку знайти коефіцієнт інтенсивності напружень  $K_I$ , визначимо  $K_I$  під дією згинаючого моменту  $M$ . Розв'язок подібної задачі пов'язаний зі значними труднощами через складну конфігурацію перерізу балки. Порівняно просте, зручне для прикладного застосування співвідношення для розрахунку КІН можна побудувати на основі наступних міркувань.

Припустимо, що довжина тріщини  $l$  порівняно з іншими розмірами перерізу  $\varepsilon_1 = l/(H + 2h) \rightarrow 0$ . Тоді

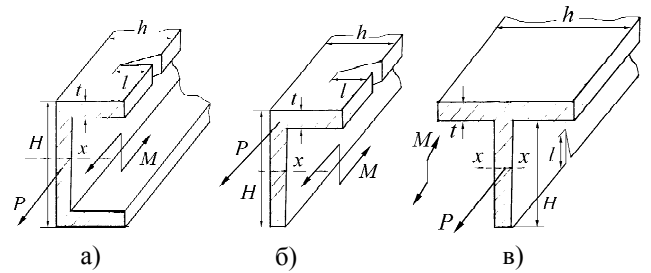


Рис. 1. Схеми поперечного перерізу балок з дефектом: а – швелер, б – кутник, в – тавр

напружений стан в околі вершини тріщини еквівалентний розтягуванню напруженнями  $\sigma$  півнескінченної пластини з крайовою тріщиною [11]. Враховуючи це, подамо КІН для тріщини у вигляді

$$K_I = \sigma_{ном} \sqrt{\pi l} (1,12 + F(\varepsilon)), \quad (2)$$

де  $\varepsilon = l/D$ ;  $D$  – найбільший діаметр поперечного перерізу розглянутого елемента конструкції;  $\sigma_{ном}$  – номінальне напруження у вершині тріщини;  $F(\varepsilon)$  – деяка безрозмірна функція, причому  $F(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . У кожному конкретному випадку функція  $F(\varepsilon)$  визначається по різному залежно від специфіки елемента конструкції і наявній в ньому тріщині.

Якщо розміри тріщини такі, що її контур знаходиться в зоні, близькій до нейтральної осі поперечного перерізу, то для визначення  $K_I$  можна скористатись розв'язком задачі про згин моментом  $M$  смуги, що має ту ж товщину  $t$  і той же момент інерції  $I$ , що і швелер [11, 12]:

$$K_I = 4,2 M h_1^{-3/2} \sqrt{(1 - l_1/h_1)^{-3} + (1 - l_1/h_1)^3}, \quad (3)$$

де

$$h_1 = \sqrt{12I/t}; \quad l_1 = (h_1 - H)/2 - b_1 + l.$$

Подамо у співвідношенні (3) функцію  $F(\varepsilon)$  у вигляді полінома, коефіцієнти якого підберемо так, щоб вирази (2) і (3) були максимально близькі при  $\varepsilon_1 \approx 0,5$ . У результаті цього отримаємо

$$K_I = \frac{M}{I} (H + 2h)^{3/2} F_1(\varepsilon_1), \quad (4)$$

$$F_1(\varepsilon_1) = 0,52 \sqrt{\varepsilon_1} (1 + 6,42\varepsilon_1^2 - 6,53\varepsilon_1^3 + 5,86\varepsilon_1^4).$$

Графік безрозмірної функції  $F_1(\varepsilon_1)$  зображено на рис. 2, де для порівняння штриховими лініями нанесені криві, що відповідають випадкам малої та великої тріщин. Це порівняння і підтверджує коректність співвідношень (4). Для визначення періоду докритичного росту тріщини  $t = t_*^{(1M)}$  при згині швелера підставимо співвідношення (4) у диференціальне рівняння (1) і проінтегруємо його за початкових і кінцевих умов. У результаті отримаємо

$$t_*^{(1M)} = \frac{K_{CC}^{2m} (H + 2h)^{3m}}{A} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_*} \frac{1 - K_{CC}^{-2} M^2 \Gamma^2 (H + 2h)^3 F_1^2(\varepsilon_1)}{M^{2m} \Gamma^{-2m} (H + 2h)^{3m} F_1^{2m}(\varepsilon_1) - K_{thc}^{2m}} d\varepsilon_1$$

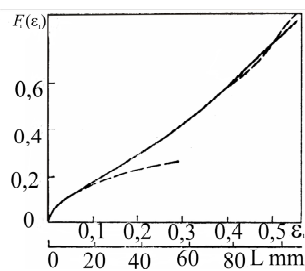


Рис.2. Порівняння графічної залежності  $F_1(\varepsilon_1)$  з граничними випадками

$$\varepsilon_{1*} = \frac{l_*}{H + 2h}, \quad \varepsilon_{10} = \frac{l_0}{H + 2h}. \quad (5)$$

Для випадку розтягу балки силою  $P$  (рис. 1,а) напружений стан біля вершини тріщини (для невеликої довжини  $l$ ) буде еквівалентним розтягу півнескінченної пластини з крайовою тріщиною довжиною  $l$ . Тому для цього випадку можна записати

$$K_I = 1,12 p \sqrt{\pi l}, \quad p = P/F. \quad (6)$$

Для визначення  $t = t_*^{(1p)}$  у випадку розтягу швелера з тріщиною підставимо (6) в (1) і проінтегруємо в межах початкових і кінцевих умов. У результаті отримаємо

$$t_*^{(1p)} = \frac{K_{CC}^{2m} l_*}{A} \int_{l_0}^{l_*} \frac{1 - 3,94 p^2 l K_{CC}^{-2}}{3,94^m p^{2m} l^m - K_{thc}^{2m}} dl. \quad (7)$$

**Кутник.** Розглянемо стандартний профіль – кутник з крайовою тріщиною, навантажений згинаючим моментом  $M$  (рис. 1,б). Для визначення КІН у вершині такої тріщини можна скористатись методом аналогічним описаному вище. Розглянемо два випадки. Перший випадок – довжина тріщини  $l$  сумірна з іншими розмірами поперечного перерізу кутника. Тоді напружений стан в околі вершини тріщини еквівалентний розтягу напруженнями  $\sigma_{max}$  півнескінченної пластини з крайовою тріщиною. Враховуючи це

$$K_I = \frac{M}{W_x} \sqrt{2h} F_2(\varepsilon_2), \quad (8)$$

де  $\varepsilon_2 = l/2h$ ; при  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  безрозмірна функція  $F_2(\varepsilon_2) \rightarrow 1,12\sqrt{\pi\varepsilon_2}$ .

Другий випадок – розміри тріщини такі, що її контур знаходиться в зоні, близькій до нейтральної осі поперечного перерізу, то для визначення КІН можна скористатись розв'язком задачі про згин моментом  $M$  смуги з крайовою тріщиною (3). Подавши функцію  $F_2(\varepsilon_2)$  у вигляді полінома з коефіцієнтами, що максимально наближають співвідношення для КІН у цих двох граничних випадках, отримаємо формулу для  $K_I$ :

$$K_I = \frac{\sqrt{2hM}}{W_x} F_2(\varepsilon_2), \quad (9)$$

$$F_2(\varepsilon_2) = \sqrt{\pi\varepsilon_2} \left[ 1,12 + 0,52\sqrt{\varepsilon_2}(1 + 6,42\varepsilon_2^2 - 6,53\varepsilon_2^3 + 5,86\varepsilon_2^4) \right].$$

Підставимо (9) у рівняння (1) і проінтегруємо його в межах початкових і кінцевих умов. У результаті цього для визначення періоду докритичного росту тріщини  $t = t_*^{(2M)}$  отримаємо формулу

$$t_*^{(2M)} = \frac{K_{CC}^{2m} 2h \varepsilon_{1*}}{A} \int_{\varepsilon_{10}}^{\varepsilon_{1*}} \frac{1 - 8K_{CC}^{-2} M^2 W_x^{-2} h^3 F_1^2(\varepsilon_2)}{M^{2m} (2h)^{3m} W_x^{-2m} F_2^{2m}(\varepsilon_2) - K_{thc}^{2m}} d\varepsilon_2. \quad (10)$$

Для випадку розтягу силою  $P$  аналогічно, як і для швелера, отримаємо  $K_I$  у вигляді

$$K_I = 1,12 p \sqrt{\pi l}. \quad (11)$$

Для визначення  $t = t_*^{(2p)}$  в цьому випадку підставимо (11) у рівняння (1) і проінтегруємо його в межах початкових і кінцевих умов. У результаті отримаємо

$$t_*^{(2p)} = \frac{K_{CC}^{2m} l_*}{A} \int_{l_0}^{l_*} \frac{1 - 3,94 p^2 l K_{CC}^{-2}}{3,94^m p^{2m} l^m - K_{thc}^{2m}} dl. \quad (12)$$

**Тавр.** Розглянемо таврову балку, схема навантаження і розміри якої подані на рис. 1,в. Визначимо КІН для випадків згину та розтягу, як показано на рис. 1,в. Вважаючи довжину тріщини невеликою, для випадку згину напружений стан біля вершини тріщини буде еквівалентний згину півнескінченної пластини з крайовою тріщиною довжиною  $l$ . Тоді для  $K_I$  отримаємо [12]

$$K_I = \frac{M}{W_x} \sqrt{\pi l} F_3(\xi), \quad (13)$$

$$F_3(\xi) \approx 1,122 - 1,40\xi + 7,33\xi^2 - 13,08\xi^3 + 14,0\xi^4 \quad \xi = l/H.$$

Підставимо (13) у рівняння (1) і проінтегруємо його в межах початкових і кінцевих умов. У результаті цього для визначення періоду докритичного росту тріщини повзучості  $t = t_*^{(3M)}$  в тавровій балці отримаємо формулу

$$t_*^{(3M)} = \frac{K_{CC}^{2m} H \xi_*}{A} \int_{\xi_0}^{\xi_*} \frac{1 - K_{CC}^{-2} M^2 W_x^{-2} H^3 F_3^2(\xi)}{M^{2m} W_x^{-2m} H^{3m} F_3^{2m}(\xi) - K_{thc}^{2m}} d\xi. \quad (14)$$

Для випадку розтягу силою  $P$  (рис. 1,в) і малої тріщини  $l$  коефіцієнт інтенсивності напружень  $K_I$  будемо визначати такою формулою:

$$K_I = 1,12 p \sqrt{\pi l}. \quad (15)$$

Період  $t = t_*^{(3p)}$  докритичного росту тріщини за такої схеми навантаження тавра будемо визначати так. Проінтегруємо рівняння (1) з врахуванням (15) і отримаємо

$$t_*^{(3p)} = \frac{K_{CC}^{2m} l_*}{A} \int_{l_0}^{l_*} \frac{1 - 3,94 p^2 l K_{CC}^{-2}}{3,94^m p^{2m} l^m - K_{thc}^{2m}} dl. \quad (16)$$

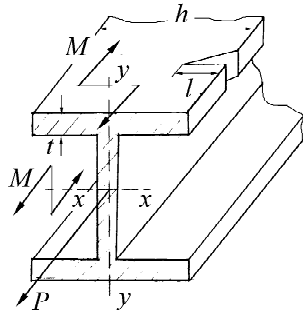


Рис. 3. Схема навантаження двотаврової балки з тріщиною

**Двотавр.** Розглянемо стандартний двотавровий профіль, що працює на згин відносно осі  $x-x$  і розтягується силою  $P$  (рис. 3). Нехай у верхній полиці двотавра розташована поверхнева тріщина довжиною  $l$ . Тоді для визначення  $K_I$  у вершині такої тріщини міркуємо наступним чином. Будемо вважати, що довжина тріщини є малою порівняно з іншими розмірами поперечного перерізу ( $h \gg l$ ). Тоді напружений стан в околі такої тріщини буде еквівалентний розтягу півнескінченої пластини з крайовою тріщиною і, або з врахуванням (11),

$$K_I = 1,12(MW_x^{-1} + PF^{-1})\sqrt{\pi l}. \quad (17)$$

Підставимо (17) у рівняння (1) і проінтегруємо його в межах початкових і кінцевих умов. У результаті цього для визначення періодів докритичного росту тріщини при згині  $t = t_*^{(4Mx)}$  і розтягу  $t = t_*^{(4p)}$  отримуємо відповідно такі формули:

$$t_*^{(4Mx)} = \frac{K_{CC}^{2m} l_*}{A} \int_{l_0}^{l_*} \frac{1 - 3,94M^2 W_x^{-2} K_{CC}^{-2}}{3,94^m M^{2m} W_x^{-2m} l^m - K_{thc}^{2m}} dl, \quad (18)$$

$$t_*^{(4p)} = \frac{K_{CC}^{2m} l_*}{A} \int_{l_0}^{l_*} \frac{1 - 3,94P^2 F^{-2} K_{CC}^{-2}}{3,94^m P^{2m} F^{-2m} l^m - K_{thc}^{2m}} dl. \quad (19)$$

Розглянемо випадок, коли цей же профіль з такою ж тріщиною працює на згин відносно осі  $y-y$ . Тоді, вважаючи тріщину малою ( $h \gg l$ ), напружений стан біля вершини тріщини буде еквівалентний чистому згину смуги з крайовою тріщиною. З літератури відомо [12], що розв'язок цієї задачі має вигляд

$$K_I = \frac{M}{W_y} \sqrt{\pi l} F_4(\xi_1), \quad (20)$$

$$F_4(\xi_1) \approx 1,122 - 1,40\xi_1 + 7,33\xi_1^2 - 13,08\xi_1^3 + 14,0\xi_1^4.$$

Для визначення періоду  $t = t_*^{(4My)}$  докритичного росту тріщини в двотаврі при згині відносно осі  $y-y$  підставимо (20) у рівняння (1) і проінтегруємо його в межах початкових і кінцевих умов. У результаті отримаємо

$$t_*^{(4My)} = \frac{K_{CC}^{2m} l_*}{A} \int_{l_0}^{l_*} \frac{1 - 3,14M^2 W_y^{-2} F_4^2(\xi_1) K_{CC}^{-2}}{3,14^m M^{2m} F_4^{2m} W_y^{-2m} l^m - K_{thc}^{2m}} dl.$$

Величини  $W_x$ ,  $W_y$  залежать лише від геометрії поперечного перерізу і для стандартних профілів наведені в довідковій літературі [10].

## Література

1. Garofalo F. Fundamentals of creep and creep-rupture in metals. – New York – London: Mac Millan Company, 1970. – 343 p.
2. Ленин Г.Ф. Ползучесть металлов и критерии жаропрочности. – М.: Металлургия, 1976. – 375 с.
3. Тайра С., Отани Р. Теория высокотемпературной прочности материалов. – М.: Металлургия, 1986. – 280 с.
4. Jakowluk A. Procesy pelzania i zmniejszenia w materialach. – Warszawa: WNT, 1993. – 271 S.
5. Надау А. Пластичность и разрушение твёрдых тел. – Т. 2. – М.: Мир. – 1969. – 863 с.
6. Каминский А.А. Механика разрушения вязкоупругих тел. – К.: Наук. думка, 1980. – 157 с.
7. Kaminsky A.A. Subcritical crack growth in polymer composite materials under creep // Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity: Selected papers from the 8<sup>th</sup> Int. Conf. on Fracture (ICF 8), Kyiv, Ukraine, 8-14 June 1993. – Pergamon, 1994. – P. 513-520.
8. Андрейків О.Є., Сас Н.Б. Механіка руйнування металічних пластин при високотемпературній повзучості // Фіз.-хім. механ. матеріалів. – 2006. – № 2. – С. 62-68.
9. Андрейків О.Є., Сас Н.Б. Математична модель для визначення періоду докритичного поширення тріщин високотемпературної повзучості в твердих тілах // Доп. НАН України. – 2006. – №5 – С. 47-52.
10. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наук. думка, 1988. – 734 с.
11. Панасюк В.В., Андрейків А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения. – К.: Наук. думка, 1988. – 488 с.
12. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / Под. ред. Мураками. – М.: Мир, 1990 – Т.1,2. – 1016 с.

Отримана 12.06.10

O. Andreykiv, V. Skalskyi, Yu. Matviyiv, T. Kradinova  
**The determination of sub-critical growth cracks period in beam elements of the opened type under the long-term static loadings**

Ivan Franko Lviv National University, Lviv;  
 Karpenko Physico-Mechanical Institute of National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv;  
 Lutsk National Technical University, Lutsk

The calculation model for determination of sub-critical creep crack growth period in the beam elements of the opened type under the long-term static loadings and low temperature is built. On the basis of it the residual resource of such elements for the long-term static tension and bend is determinate.