

УДК: 539.4

ІМОВІРНІСНІ РОЗРАХУНКИ НАДІЙНОСТІ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ

Р. Квіт

Доцент, канд. фіз.-мат. наук

Т. Сало

Доцент, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет
«Львівська політехніка»,
м. Львів

Записано вирази функції розподілу руйнівного навантаження для плоского макроелемента композитного матеріалу (пружна однорідна матриця зі стохастично розподіленими жорсткими стержневими включеннями) за різних співвідношень прикладеного навантаження. Встановлено діапазон навантаження, якому відповідає мала ймовірність зруйнування. Досліджено залежності ймовірності зруйнування композитного матеріалу від характеру напруженого стану, закону розподілу розміру включень, кількості включень та коефіцієнта Пуассона матриці.

пластина, жорстке включення, функція розподілу, руйнування

Вступ. У механіці композитних матеріалів актуальним завданням є дослідження напруженого стану і руйнування тіл, ослаблених дефектами різних типів, зокрема жорсткими лінійними включеннями. Імовірнісна оцінка руйнівного стану при заданому навантаженні є важливим етапом у розрахунках на міцність і надійність деталей машин та елементів конструкцій. Міцність матеріалу залежить від дефектів структури і завжди є деякою випадковою величиною. Тому при розв'язуванні задач прогнозування граничного стану конструкційних матеріалів корисним є застосування ймовірнісно-статистичних методів. Ці методи, застосовані до дослідження міцності матеріалів з дефектами структури, зокрема до композитів, за останні роки отримали розвиток в [1 – 6].

Метою дослідження є побудова співвідношень для визначення функції розподілу граничного (руйнівного) навантаження та ймовірності зруйнування певних композитних матеріалів за різних видів навантаження.

Постановка задачі. Розглядаємо пружну прямокутну пластину, у якій рівномірно розподілені жорсткі лінійні (стержневі) включення, які не взаємодіють між собою. Пластина перебуває в умовах всебічного розтягу-стиску за дії однорідного навантаження p та q ($q = \eta p$) [7].

Величини p та q можна розглядати як головні напруження за плоского напруженого стану. Включення характеризуються довжиною $2l$ та орієнтацією α (кут нахилу включення відносно напрямку дії сили p , що змінюється на інтервалі $[-\pi/2; \pi/2]$). Параметри включень l та α є незалежними випадковими величинами, які мають певні закони ймовірнісного розподілу.

У праці [8], ґрунтуючись на детерміністичному розв'язку задачі про знаходження граничного навантаження пластини з жорстким лінійним орієнтованим включенням за умов плоского напруженого стану [9, 10], визначено низку статистичних характеристик руйнівного навантаження для пластини з такими випадково розподіленими включеннями. Дослідження виконувалися за умови, що порогове значення міцності вказаної пластини дорівнює нулю (для спрощення моделі та математичних розрахунків було зроблено припущення про необмеженість максимального розміру включень). Як і в [11], розглянемо більш адекватний випадок про обмеження можливих розмірів включень у матеріалі.

Нехай випадкова півдовжина включень встановлюється з умови: $0 \leq l \leq c$, де c – скінченна структурна характеристика. Тоді для опису випадкової величини l

використаємо бета-розподіл [11], інтегральна функція розподілу якого визначається співвідношенням

$$F_2(l) = 1 - (1 - l/c)^{r+1}. \quad (1)$$

За будь-яких значень параметра $r \geq 0$ розподіл (1) відображає зменшення ймовірності зустрічі включень зі збільшенням їх розміру.

Випадкову величину α задаємо густиною рівномірного розподілу ймовірностей

$$f_1(\alpha) = 1/\pi. \quad (2)$$

У праці [8] записано формули для обчислення руйнівного навантаження (за якого в околі жорсткого прямолінійного включення утворюється тріщина) пластини в умовах плоского напруженого стану, які подамо у такому загальному вигляді:

$$|p| = K_0 l^{-0,5} \varphi_i(\alpha, \eta, \varkappa) \quad (i=1, 2). \quad (3)$$

Тут позначено:

$$\varphi_1(\alpha, \eta, \varkappa) = (\chi_1(\eta, \varkappa) + \chi_2(\eta, \varkappa) \cos 2\alpha)^{-1},$$

$$\varphi_2(\alpha, \eta, \varkappa) = (\chi_3(\eta, \varkappa) + \chi_4(\eta, \varkappa) \cos 2\alpha)^{-1},$$

$$\chi_1(\eta, \varkappa) = \frac{(1+\eta)(\varkappa-1)(3+\varkappa)}{8\sqrt{2}\varkappa},$$

$$\chi_2(\eta, \varkappa) = \frac{(1-\eta)(3+\varkappa)}{4\sqrt{2}\varkappa},$$

$$\chi_3(\eta, \varkappa) = \frac{(1+\eta)(\varkappa-1)}{12\varkappa} \sqrt{\frac{(3\varkappa-1)^3}{12(2\varkappa+1)}},$$

$$\chi_4(\eta, \varkappa) = \frac{(1-\eta)}{6\varkappa} \sqrt{\frac{(3\varkappa-1)^3}{12(2\varkappa+1)}},$$

$\varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини,

константа K_0 характеризує опір матеріалу локальному руйнуванню.

Тоді для випадку $p > 0$, $\eta \leq 1$ можна записати

$$p = K_0 l^{-0,5} \varphi_1(\alpha, \eta, \varkappa), \quad \begin{cases} |\alpha| \leq \pi/2, \frac{3-\varkappa}{1+\varkappa} \leq \eta \leq 1, \\ |\alpha| \leq \alpha_1, -\infty < \eta \leq \frac{3-\varkappa}{1+\varkappa}; \end{cases} \quad (4)$$

$$p = -K_0 l^{-0,5} \varphi_2(\alpha, \eta, \varkappa), \quad |\alpha| \geq \alpha_1, -\infty < \eta \leq \frac{3-\varkappa}{1+\varkappa}. \quad (5)$$

Для випадку $p < 0$, $\eta \geq 1$ матимемо:

$$p = -K_0 l^{-0,5} \varphi_2(\alpha, \eta, \varkappa), \quad \begin{cases} |\alpha| \leq \pi/2, 1 \leq \eta \leq \frac{1+\varkappa}{3-\varkappa}, \\ |\alpha| \geq \alpha_1, \frac{1+\varkappa}{3-\varkappa} \leq \eta < \infty; \end{cases} \quad (6)$$

$$p = K_0 l^{-0,5} \varphi_1(\alpha, \eta, \varkappa), \quad |\alpha| \leq \alpha_1, \frac{1+\varkappa}{3-\varkappa} \leq \eta < \infty. \quad (7)$$

Тут величина α_1 визначається таким співвідношенням:

$$\alpha_1 = 0,5 \arccos \frac{(1+\eta)(1-\varkappa)}{2(1-\eta)}. \quad (8)$$

Функція розподілу руйнівного навантаження. Для знаходження функції розподілу руйнівного навантаження пластини з випадково розподіленими включеннями обмеженої довжини у плоскому полі напружень застосуємо методику, запропоновану у [8].

Оскільки руйнівне навантаження p залежить від випадкових величин α та l , тому воно теж є випадковою величиною, що змінюється на інтервалі $|p_{min}| < |p| < \infty$, де порогове значення міцності визначається з формули:

$$|p_{min}| = K_0 c^{-0,5} \min_{\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]} \varphi_i(\alpha, \eta, \varkappa) \neq 0 \quad (i=1, 2).$$

Мінімальне значення руйнівного навантаження $|p_{min}|$ визначається аналогічно, як і для пластини з тріщинами [12], структурною характеристикою c матеріалу та кутом $0 \leq \alpha_*^{(i)} \leq \pi/2$ ($i=1, 2$), для якого за заданого η та \varkappa досягає мінімуму функція $\varphi_i(\alpha, \eta, \varkappa)$ ($i=1, 2$).

Функцію розподілу руйнівного навантаження для елемента пластини з одним випадковим включенням знаходимо так:

$$F_1(|p|, \eta) = \int_{D_\alpha} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_i^2(\alpha, \eta, \varkappa) \right) \right] d\alpha, \quad (9)$$

де $i=1, 2$, а D_α – множина всіх можливих значень α , для яких за заданих p , η , \varkappa виконується умова

$$0 \leq K_0^2 p^{-2} \varphi_i^2(\alpha, \eta, \varkappa) \leq c. \quad (10)$$

Встановимо область допустимих значень випадкової величини α для різних видів навантаження.

Розглянемо випадок $p > 0$.

Нехай $\frac{3-\varkappa}{1+\varkappa} \leq \eta \leq 1$. Тоді $\alpha_*^{(1)} = 0$. Отримаємо

$$\varphi_{1min}(\alpha, \eta, \varkappa) = \varphi_1(0, \eta, \varkappa) = (\chi_1(\eta, \varkappa) + \chi_2(\eta, \varkappa))^{-1}. \quad (11)$$

Відповідно

$$p_{min} = K_0 c^{-0,5} (\chi_1(\eta, \varkappa) + \chi_2(\eta, \varkappa))^{-1}. \quad (12)$$

Межі зміни величини p визначаємо зі співвідношень:

$$K_0^2 p^{-2} (\chi_1(\eta, \varkappa) - \chi_2(\eta, \varkappa))^{-2} \geq c,$$

$$K_0^2 p^{-2} (\chi_1(\eta, \varkappa) + \chi_2(\eta, \varkappa))^{-2} \leq c.$$

Отримаємо такий інтервал зміни навантаження:

$$K_0 c^{-0,5} (\chi_1(\eta, \varepsilon) + \chi_2(\eta, \varepsilon))^{-1} \leq p \leq \\ \leq K_0 c^{-0,5} (\chi_1(\eta, \varepsilon) - \chi_2(\eta, \varepsilon))^{-1} \quad (\eta \neq 1).$$

Тоді на основі виразу (9) отримаємо функцію розподілу

$$F_1(p, \eta) = \int_{-\alpha_2}^0 f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_1^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha + \\ + \int_0^{\alpha_2} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_1^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha, \quad (13)$$

де α_2 – розв’язок рівняння $K_0^2 p^{-2} \varphi_1^2(\alpha, \eta, \varepsilon) = c$, що належить інтервалу $(0; \pi/2)$:

$$\alpha_2 = 0,5 \arccos \frac{K_0 p^{-1} c^{-0,5} - \chi_1(\eta, \varepsilon)}{\chi_2(\eta, \varepsilon)}. \quad (14)$$

Для $K_0 c^{-0,5} (\chi_1(\eta, \varepsilon) - \chi_2(\eta, \varepsilon))^{-1} \leq p < \infty$ ($\eta \neq 0$) будемо мати функцію розподілу

$$F_1(p, \eta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_1^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha. \quad (15)$$

Розглянемо частковий випадок двовісного симетричного розтягу ($\eta = 1$, $p = q > 0$), для якого суттєво спрощується вираз $F_1(p, \eta)$. З формули, відповідно до умови нормування для диференційної функції розподілу, отримаємо:

$$F_1(p, 1) = 1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2 \chi_1^2(1, \varepsilon)} \right), \\ K_0 c^{-0,5} \chi_1^{-1}(1, \varepsilon) \leq p < \infty. \quad (16)$$

Нехай $-1 \leq \eta \leq \frac{3-\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Тоді $\alpha_*^{(1)} = 0$. Значення p_{min} запишемо формулою.

Межі зміни величини p визначаємо зі співвідношень

$$K_0^2 p^{-2} (\chi_1(\eta, \varepsilon) + \chi_2(\eta, \varepsilon) \cos 2\alpha_1)^{-2} \geq c, \\ K_0^2 p^{-2} (\chi_1(\eta, \varepsilon) + \chi_2(\eta, \varepsilon))^{-2} \leq c.$$

Отримаємо такий інтервал зміни навантаження:

$$K_0 c^{-0,5} (\chi_1(\eta, \varepsilon) + \chi_2(\eta, \varepsilon))^{-1} \leq p \leq \\ \leq K_0 c^{-0,5} (\chi_1(\eta, \varepsilon) + \chi_2(\eta, \varepsilon) \cos 2\alpha_1)^{-1},$$

для якого функцію розподілу запишемо формулою (13).

За навантаження

$$K_0 c^{-0,5} (\chi_1(\eta, \varepsilon) + \chi_2(\eta, \varepsilon) \cos 2\alpha_1)^{-1} \leq p < \infty \quad (\eta \neq -1)$$

будемо мати функцію розподілу

$$F_1(p, \eta) = \int_{-\pi/2}^{-\alpha_3} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha + \\ + \int_{-\alpha_2}^0 f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_1^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha + \\ + \int_0^{\alpha_2} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_1^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha + \\ + \int_{\alpha_3}^{\pi/2} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha, \quad (17)$$

де α_3 – більший корінь рівняння $K_0^2 p^{-2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \varepsilon) = c$, що належить інтервалу $(\alpha_1; \pi/2)$:

$$\alpha_3 = 0,5 \arccos \frac{-K_0 p^{-1} c^{-0,5} - \chi_3(\eta, \varepsilon)}{\chi_4(\eta, \varepsilon)}. \quad (18)$$

Зокрема, у випадку двовісного симетричного розтягустиску ($\eta = -1$, $p > 0$, $q = -p$) функція розподілу матиме такий вигляд:

$$F_1(p, -1) = \int_{-\alpha_2}^0 f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2 (\chi_2(-1, \varepsilon) \cos 2\alpha)^2} \right) \right] d\alpha + \\ + \int_0^{\alpha_2} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2 (\chi_2(-1, \varepsilon) \cos 2\alpha)^2} \right) \right] d\alpha, \\ K_0 c^{-0,5} \chi_2^{-1}(-1, \varepsilon) \leq p < \infty. \quad (19)$$

Нехай $-\infty < \eta < -1$. Тоді $\alpha_*^{(1)} = 0$. Значення p_{min} запишемо формулою.

Межі зміни величини p визначаємо із співвідношень

$$K_0^2 p^{-2} (\chi_3(\eta, \varepsilon) + \chi_4(\eta, \varepsilon) \cos 2\alpha_1)^{-2} \geq c, \\ K_0^2 p^{-2} (\chi_1(\eta, \varepsilon) + \chi_2(\eta, \varepsilon))^{-2} \leq c.$$

Отримаємо такий інтервал зміни навантаження:

$$K_0 c^{-0,5} (\chi_1(\eta, \varepsilon) + \chi_2(\eta, \varepsilon))^{-1} \leq p \leq \\ \leq K_0 c^{-0,5} (\chi_3(\eta, \varepsilon) + \chi_4(\eta, \varepsilon) \cos 2\alpha_1)^{-1},$$

для якого функцію розподілу запишемо формулою (17).

За навантаження

$$K_0 c^{-0,5} (\chi_3(\eta, \varepsilon) + \chi_4(\eta, \varepsilon) \cos 2\alpha_1)^{-1} \leq p < \infty$$

будемо мати функцію розподілу

$$F_1(p, \eta) = \int_{-\pi/2}^{-\alpha_1} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\alpha_1}^0 f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_1^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha + \\
& + \int_0^{\alpha_1} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_1^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha + \\
& + \int_{\alpha_1}^{\pi/2} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha. \quad (20)
\end{aligned}$$

Розглянемо випадок $p < 0$.

Нехай $1 \leq \eta \leq \frac{1+\varepsilon}{3-\varepsilon}$, тоді $\alpha_*^{(2)} = \pi/2$. Отримаємо

$$\varphi_{2min}(\alpha, \eta, \varepsilon) = \varphi_2(\pi/2, \eta, \varepsilon) = (\chi_3(\eta, \varepsilon) - \chi_4(\eta, \varepsilon))^{-1}. \quad (21)$$

Відповідно

$$p_{min} = -K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \varepsilon) - \chi_4(\eta, \varepsilon))^{-1}. \quad (22)$$

Межі зміни величини $-p$ визначаємо зі співвідношень

$$\begin{aligned}
K_0^2 p^{-2} (\chi_3(\eta, \varepsilon) + \chi_4(\eta, \varepsilon))^{-2} & \geq c, \\
K_0^2 p^{-2} (\chi_3(\eta, \varepsilon) - \chi_4(\eta, \varepsilon))^{-2} & \leq c.
\end{aligned}$$

Отримаємо інтервал зміни навантаження:

$$\begin{aligned}
-K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \varepsilon) + \chi_4(\eta, \varepsilon))^{-1} & \leq -p \leq \\
\leq -K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \varepsilon) - \chi_4(\eta, \varepsilon))^{-1} & \quad (\eta \neq 1),
\end{aligned}$$

для якого функцію розподілу запишемо так:

$$\begin{aligned}
F_1(-p, \eta) & = \int_{-\pi/2}^{-\alpha_3} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha + \\
& + \int_{\alpha_3}^{\pi/2} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha, \quad (23)
\end{aligned}$$

де α_3 – корінь рівняння $K_0^2 p^{-2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \varepsilon) = c$, що знаходиться зі співвідношення (18) і належить інтервалу $(0; \pi/2)$.

За навантаження

$$-\infty < -p \leq -K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \varepsilon) + \chi_4(\eta, \varepsilon))^{-1}$$

будемо мати функцію розподілу

$$F_1(-p, \eta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_1(\alpha) \left[1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right) \right] d\alpha. \quad (24)$$

Розглянемо частковий випадок двовісного симетричного стиску ($\eta = 1$, $p = q < 0$), для якого суттєво

спрощується вираз $F_1(-p, \eta)$. З формули (24), відповідно до умови нормування для диференційної функції розподілу, отримаємо

$$\begin{aligned}
F_1(-p, 1) & = 1 - F_2 \left(\frac{K_0^2}{p^2 \chi_3^2(1, \varepsilon)} \right), \\
-\infty < -p & \leq -K_0 c^{-0.5} \chi_3^{-1}(1, \varepsilon). \quad (25)
\end{aligned}$$

Нехай $\frac{1+\varepsilon}{3-\varepsilon} \leq \eta < \infty$. Тоді $\alpha_*^{(2)} = \pi/2$. Значення p_{min}

записуємо формулою.

Межі зміни величини $-p$ визначаємо зі співвідношень

$$\begin{aligned}
K_0^2 p^{-2} (\chi_3(\eta, \varepsilon) + \chi_4(\eta, \varepsilon) \cos 2\alpha_1)^{-2} & \geq c, \\
K_0^2 p^{-2} (\chi_3(\eta, \varepsilon) - \chi_4(\eta, \varepsilon))^{-2} & \leq c.
\end{aligned}$$

Отримаємо такий інтервал зміни навантаження:

$$\begin{aligned}
K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \varepsilon) + \chi_4(\eta, \varepsilon) \cos 2\alpha_1)^{-1} & \leq -p \leq \\
\leq -K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \varepsilon) - \chi_4(\eta, \varepsilon))^{-1},
\end{aligned}$$

для якого функцію розподілу запишемо формулою (23). Тоді значення α_3 належить інтервалу $(\alpha_1; \pi/2)$.

За навантаження

$$-\infty < -p \leq K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \varepsilon) + \chi_4(\eta, \varepsilon) \cos 2\alpha_1)^{-1}$$

функцію розподілу отримуємо з формули (17), провівши заміну у її лівій частині p на $-p$.

В отримані співвідношення для функції розподілу $F_1(|p|, \eta)$ підставимо вирази (1), (2) для $f_1(\alpha)$, $F_2(l)$. Величину l визначаємо з критерію (3) – (8).

Розглянемо випадок $p > 0$.

Нехай $\frac{3-\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq \eta \leq 1$. Тоді за формулами (13), (15)

функція розподілу набуде вигляду

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_2} \left[1 - \frac{K_0^2}{p^2 c} \varphi_1^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right]^{r+1} d\alpha, \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
K_0 c^{-0.5} (\chi_1(\eta, \varepsilon) + \chi_2(\eta, \varepsilon))^{-1} & \leq p \leq \\
\leq K_0 c^{-0.5} (\chi_1(\eta, \varepsilon) - \chi_2(\eta, \varepsilon))^{-1} & \quad (\eta \neq 1);
\end{aligned}$$

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{K_0^2}{p^2 c} \varphi_1^2(\alpha, \eta, \varepsilon) \right]^{r+1} d\alpha, \quad (27)$$

$$K_0 c^{-0.5} (\chi_1(\eta, \varepsilon) - \chi_2(\eta, \varepsilon))^{-1} \leq p < \infty \quad (\eta \neq 0).$$

Зокрема, за двовісного симетричного розтягу ($\eta = 1$, $p = q > 0$) відповідно до формули (16) функція розподілу запишеться так:

$$F_1(p, 1) = \left[1 - \frac{K_0^2}{p^2 c \chi_1^2(1, \varepsilon)} \right]^{r+1},$$

$$K_0 c^{-0.5} \chi_1^{-1}(1, \mathfrak{a}) \leq p < \infty. \quad (28)$$

Нехай $-1 \leq \eta \leq \frac{3-\mathfrak{a}}{1+\mathfrak{a}}$. Тоді функція розподілу визначається співвідношенням (26) за навантаження

$$K_0 c^{-0.5} (\chi_1(\eta, \mathfrak{a}) + \chi_2(\eta, \mathfrak{a}))^{-1} \leq p \leq K_0 c^{-0.5} (\chi_1(\eta, \mathfrak{a}) + \chi_2(\eta, \mathfrak{a}) \cos 2\alpha_1)^{-1}.$$

Відповідно до (17) отримаємо функцію розподілу

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_2} \left[1 - \frac{K_0^2}{p^2 c} \varphi_1^2(\alpha, \eta, \mathfrak{a}) \right]^{r+1} d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\pi/2} \left[1 - \frac{K_0^2}{p^2 c} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \mathfrak{a}) \right]^{r+1} d\alpha, \quad (29)$$

$$K_0 c^{-0.5} (\chi_1(\eta, \mathfrak{a}) + \chi_2(\eta, \mathfrak{a}) \cos 2\alpha_1)^{-1} \leq p < \infty.$$

Зокрема, за двовісного симетричного розтягу-стиску ($\eta = -1, p > 0, q = -p$) відповідно до формули (19) матимемо

$$F_1(p, -1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_2} \left[1 - \frac{K_0^2}{p^2 c (\chi_2(-1, \mathfrak{a}) \cos 2\alpha)^2} \right]^{r+1} d\alpha, K_0 c^{-0.5} \chi_2^{-1}(-1, \mathfrak{a}) \leq p < \infty. \quad (30)$$

Нехай $-\infty < \eta < -1$. Тоді функція розподілу визначається співвідношенням (29) за навантаження

$$K_0 c^{-0.5} (\chi_1(\eta, \mathfrak{a}) + \chi_2(\eta, \mathfrak{a}))^{-1} \leq p \leq K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \mathfrak{a}) + \chi_4(\eta, \mathfrak{a}) \cos 2\alpha_1)^{-1}.$$

Відповідно до (20) отримаємо функцію розподілу

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_1} \left[1 - \frac{K_0^2}{p^2 c} \varphi_1^2(\alpha, \eta, \mathfrak{a}) \right]^{r+1} d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi/2} \left[1 - \frac{K_0^2}{p^2 c} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \mathfrak{a}) \right]^{r+1} d\alpha, \quad (31)$$

$$K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \mathfrak{a}) + \chi_4(\eta, \mathfrak{a}) \cos 2\alpha_1)^{-1} \leq p < \infty.$$

Розглянемо випадок $p < 0$.

Нехай $1 \leq \eta \leq \frac{1+\mathfrak{a}}{3-\mathfrak{a}}$. Тоді за формулами (23) і (24) відповідно, функція розподілу матиме такий вигляд:

$$F_1(-p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\pi/2} \left[1 - \frac{K_0^2}{p^2 c} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \mathfrak{a}) \right]^{r+1} d\alpha, \quad (32)$$

$$-K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \mathfrak{a}) + \chi_4(\eta, \mathfrak{a}))^{-1} \leq -p \leq -K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \mathfrak{a}) - \chi_4(\eta, \mathfrak{a}))^{-1} \quad (\eta \neq 1);$$

$$F_1(-p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{K_0^2}{p^2 c} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \mathfrak{a}) \right]^{r+1} d\alpha, \quad (33)$$

$$-\infty < -p \leq -K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \mathfrak{a}) + \chi_4(\eta, \mathfrak{a}))^{-1}.$$

Зокрема, за двовісного симетричного стиску ($\eta = 1, p = q < 0$) відповідно до виразу (25) функція розподілу запишеться так:

$$F_1(-p, 1) = \left[1 - \frac{K_0^2}{p^2 c \chi_3^2(1, \mathfrak{a})} \right]^{r+1}, \quad (34)$$

$$-\infty < -p \leq -K_0 c^{-0.5} \chi_3^{-1}(1, \mathfrak{a}).$$

Нехай $\frac{1+\mathfrak{a}}{3-\mathfrak{a}} \leq \eta < \infty$. Тоді функція розподілу визначається співвідношенням (32) за навантаження

$$K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \mathfrak{a}) + \chi_4(\eta, \mathfrak{a}) \cos 2\alpha_1)^{-1} \leq -p \leq -K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \mathfrak{a}) - \chi_4(\eta, \mathfrak{a}))^{-1}.$$

Замінивши у лівій частині виразу (29) p на $-p$, отримаємо функцію розподілу за навантаження

$$-\infty < -p \leq K_0 c^{-0.5} (\chi_3(\eta, \mathfrak{a}) + \chi_4(\eta, \mathfrak{a}) \cos 2\alpha_1)^{-1}.$$

Використовуючи отримані співвідношення для функції розподілу $F_1(|p|, \eta)$, можна визначити статистичні характеристики міцності пластини з випадково розподіленими жорсткими лінійними включеннями за різних видів напруженого стану: ймовірність зруйнування, найімовірніше і середнє значення, дисперсію та коефіцієнт варіації руйнівного навантаження тощо.

Ймовірність зруйнування пластини. Ймовірність зруйнування пластини, що містить N жорстких лінійних включень, за фіксованих p та η визначаємо [8] так:

$$P_f = 1 - [1 - F_1(|p|, \eta)]^N. \quad (35)$$

Підставивши по чергово вирази (26) – (34) функції розподілу $F_1(|p|, \eta)$ у формулу (35), знаходимо ймовірність зруйнування P_f пластини з N включеннями за різних видів та співвідношень прикладеного навантаження p і q . Вказана статистична характеристика руйнування залежить від характеру напруженого стану (параметр η), закону розподілу розміру включень (параметр r , який характеризує структуру матеріалу), кількості N включень у пластині (від її розмірів, якщо вважати число включень пропорційним площі пластини) та коефіцієнта Пуассона ν матриці.

Відповідно до формул (26), (28), (30), (35) на рис. 1 – рис. 3 побудовано графіки ймовірності зруйнування P_f за одновісного розтягу ($\eta = 0, p > 0, q = 0$), двовісного

симетричного розтягу ($\eta = 1, p = q > 0$) та двовісного симетричного розтягу-стиску ($\eta = -1, p > 0, q = -p$). На рис. 1 – рис. 2 суцільні лінії відповідають значенню коефіцієнта Пуассона $\nu = 0$, а штрихові – $\nu = 0,3$. На рис. 3 суцільні лінії відповідають випадку одновісного розтягу, штрихові – двовісного симетричного розтягу, штрихпунктирні – двовісного симетричного розтягу-стиску (для $\nu = 0$).

Висновки. З побудованих графіків видно, що існує певний рівень навантаження, якому відповідає дуже мала ймовірність зруйнування P_f . Для кожного виду і рівня навантаження притаманний свій діапазон розмірів пластини, за якого стрімко зростає ймовірність зруйнування. Характер цього зростання не залежить від коефіцієнта Пуассона ν . Можна говорити про певний масштабний поріг для P_f .

За одновісного розтягу збільшення коефіцієнта Пуассона матриці веде до зростання навантаження, що відповідає зафіксованому значенню P_f . З іншого боку, за заданого рівня навантаження, зі зменшенням коефіцієнта Пуассона зростає величина P_f (рис. 1). Дані висновки узгоджуються з результатами, отриманими у [8] для випадку степеневого розподілу параметра l . За двовісного симетричного розтягу-стиску збільшення коефіцієнта Пуассона матриці веде до зменшення навантаження, що відповідає зафіксованому значенню P_f (рис. 2). Цю особливість можна пояснити наявністю компонент стискаючих напружень.

У випадку одного рівня навантаження для пластин з однаковими розмірами та значенням коефіцієнта ν , величина P_f за двовісного симетричного розтягу-стиску є більшою, ніж за одновісного розтягу (рис. 1 – рис. 2). Зі зростанням кількості включень у пластині (збільшенням її розмірів) спостерігаємо збільшення ймовірності зруйнування, характер якого залежить від виду навантаження (від η). Виявлені закономірності зауважені також і для

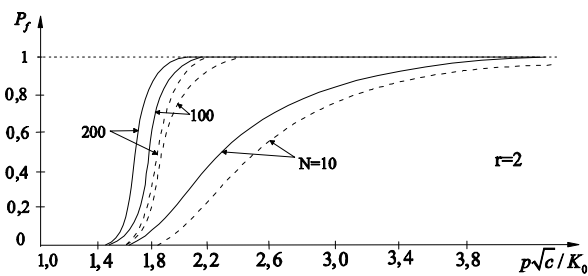


Рис. 1. Імовірність зруйнування за одновісного розтягу

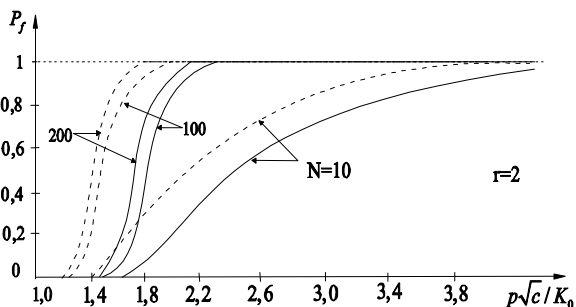


Рис. 2. Імовірність зруйнування за двовісного симетричного розтягу-стиску

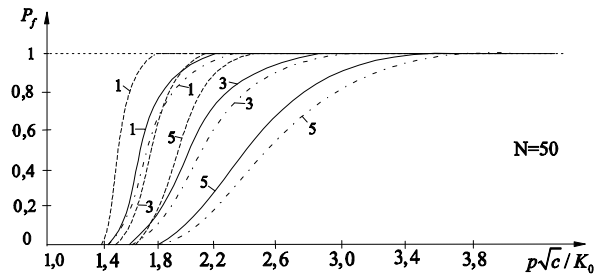


Рис. 3. Імовірність зруйнування для матеріалів різної неоднорідності

стохастично дефектних ізотропних пластин [12].

На рис. 3 показано вплив параметра r на ймовірність зруйнування. У випадку збільшення величини r за однакового навантаження зменшується значення P_f . Дана особливість виконується для всіх розглянутих випадків співвідношення p та q . Якщо зафіксувати величину прикладеного навантаження, то для пластин однакових розмірів, однорідності, та значень коефіцієнта Пуассона ймовірність зруйнування P_f за одновісного розтягу є меншою, ніж за двовісного симетричного розтягу та двовісного симетричного розтягу-стиску.

Відповідно до отриманих результатів можна стверджувати, що залежності ймовірності зруйнування P_f від p , N та r для пластини з включеннями мають такі самі особливості, як і для пластини з тріщинами [12], залежності P_f від виду навантаження (від η) будуть іншими.

Література

1. Wetherhold R.C., Ucci A.M. Probability methods for the fracture of composite materials // Compos. Struct. – 1994. – Vol. 28, №15. – P. 113 – 119.
2. Бардушкин В.В. О вероятностно-статистическом подходе к определению локального напряженно-деформированного состояния однонаправленных композитов при разрушении // Матер., технол., инструм. – 2006. – Т. 11, №3. – С. 9 – 12.
3. Каракулов В.В. Моделирование механического проведения стохастических композиционных материалов в условиях интенсивных динамических воздействий: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04: Томск, 2008. – 112с.
4. Strnadel B., Hausild P. Statistical scatter in the fracture toughness and charpy impact energy of pearlitic steel // Mater. Sci. and Eng.:A. – 2008. – Vol. 486, №1 – 2. – P. 208 – 214.
5. Bazant Z.P. Mechanics based statistical prediction of structure size and geometry effects on safety factors for composites and other quasibrittle materials // Theor. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 35, №1 – 3. – P. 53 – 71.
6. Bazant Z.P., Le J.-L., Bazant M.Z. Scaling of strength and lifetime probability distributions of quasibrittle structures based on atomistic fracture mechanics // Proc. of the Nat. Ac. of Sci. – 2009. – Vol. 106, №28. – P. 11484 – 11489.
7. Квіт П.І., Сало Т.М. Дослідження міцності матеріалів зі стохастично розподіленими жорсткими включеннями // Праці 10-го Міжнарод. симпозіуму укр. інженерів-механіків у Львові, травень 2011р. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2011. – С. 100 – 102.

8. Витвицкий П.М., Попова С.Ю. Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. – К.: Наук. думка. – 1980. – 186с.

9. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Труш И.И. О локальном разрушении хрупкого тела с остроконечными жесткими включениями // Пробл. прочности. – 1973. – №10. – С. 8 – 11.

10. Бережницкий Л.Т., Громяк Р.С., Труш И.И. О построении диаграмм локального разрушения для хрупких тел с остроконечными жесткими включениями / ФХММ. – 1975. – №5. – С. 40 – 47.

11. Kvit P.I. Статистичні характеристики міцності композитних матеріалів за складного напруженого стану // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка»: Фіз.-мат. науки. – 2008. – №601. – С. 59 – 64.

12. Kvit P.I. Стохастичне моделювання руйнування крихких матеріалів // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка»: Фіз.-мат. науки. – 2009. – №660. – С. 61 – 67.

Отримана 12.06.11

R. Kvit, T. Salo

A probabilistic design of composite materials reliability

National University «Lvivska Politechnika», Lviv

Distribution function expressions of failure loading for composite material plane macro element (elastic homogeneous matrix with stochastic distributed rigid rod inclusions) under different relationship of applied loading are derived. The loading range to which correspond small probability of failure is determined. The dependence of composite material failure probability from character of stressed state, law distribution of inclusion size, number of inclusions and matrix Poisson's ratio are investigated.

Інформація

ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИКА РАЦІОНАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ, ВИГОТОВЛЕННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИНОБУДІВНИХ КОНСТРУКЦІЙ

3-я Міжнародна науково-технічна конференція
Україна, м. Львів, 7 – 9 листопада 2012 р.

Мінісимпозіуми:

«Вплив корозійних та водневмісних середовищ на міцність і руйнування матеріалів та конструкцій»

«Діагностика матеріалів, конструкцій і машин»

Тематика конференції:

Проблеми якості та конкурентоспроможності продукції машинобудування.

Автоматизація проектування, підготовки і управління виробництвом.

Моделювання, синтез і оптимізація машинобудівних конструкцій.

Динаміка та міцність машин.

Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій.

Матеріалознавство та інженерія поверхні

Новітні техно-ло-гії у машинобудуванні.

Зварювання та споріднені процеси і технології.

Застосування вібрацій у техніці і технологіях.

Методи і засоби діагностування матеріалів та конструкцій.

Діагностика і прогнозування залишкового ресурсу конструкцій та споруд тривалої експлуатації.

Проектування, виготовлення, експлуатація і сервіс транспортних засобів.

Адреса для кореспондування:

А/с 6758, м. Львів, 79058, Україна,
e-mail: me@in.lviv.ua; zncnan@mail.lviv.ua
Тел.: (032) 261-07-19; (032) 258-21-71;
+38 0679998734; +38 0974409900
<http://www.znc.com.ua/>