

*Шатохин В.М., д-р техн. наук; Ярмак Н.С., канд. техн. наук;
Шаповалов А.В., канд. техн. наук*

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ ЛОПАТКИ ГРУНТОМЕТАТЕЛЯ КАК РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БРАХИСТОХРОНЕ ДЛЯ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Введение. Моделирование процессов, связанных с удаленным перемещением сыпучих материалов, охватывает широкий спектр инженерно-технологических задач. Устройства для транспортирования указанных материалов нашли применение при репланировании рельефа в строительстве, борьбе с эрозией почвы, гашении (или оставке) низовых лесных пожаров при отсутствии воды, сушке зерна и т.д. Рядом достоинств обладают роторные грунтометатели, которые выбрасывают грунт с помощью лопаток, расположенных на вращающемся роторе. Методы выбора формы, расположения лопаток, анализа движения частиц грунта по ним в настоящее время разработаны не достаточно. Исследования по решению этих задач, направленные на повышение технологические характеристики устройств, имеют актуальный характер.

Задача выбора оптимального профиля лопатки может быть схематизирована, как задача определения формы кривой в поле центробежных сил инерции, которая обеспечивает минимальное время движения частицы (задача о брахистохроне для центробежной силы).

Анализ литературных источников. Известно, что классическая задача о брахистохроне для однородного поля сил тяжести была отправной точкой при создании вариационного исчисления [1]. Решения аналогичных задач для некоторых видов центральных сил даны в работах [2, 3]. Вопросам построения оптимальной траектории движения точки в поле центробежных сил инерции посвящена статья [4]. Исследования по выбору рациональных параметров грунтометателя с прямолинейными лопатками проведены в [5].

Целью работы является создание метода построения брахистохрон для центральной силы, которая является центробежной силой инерции.

Для достижения поставленной цели должны быть решены следующие задачи: построен функционал времени в полярной системе координат; получен первый интеграл в форме дифференциального уравнения первого порядка для соответствующего уравнения Эйлера; найдено аналитическое решение указанного уравнения; приведены результаты расчетов оптимальных траекторий; построена лопатка с профилем брахистохроны.

1. Построение функционала времени. Пусть точки A и B расположены в центральном поле сил отталкивания – центробежных сил инерции. Проведем через точки A , B и центр отталкивания точку O плоскость (рис. 1). Рассмотрим кривые, соединяющие эти точки и расположенные в данной плоскости. Выберем из этих кривых такую, что материальная точка, выходящая из A со скоростью $v_0 = 0$, двигаясь только под действием центробежной силы, достигнет точки B за минимальное время. Решение задачи и вывод функционала времени движения удобно проводить в полярной системе координат с центром в указанной точке. Текущие координаты точки M обозначим, как ρ и φ ; координаты точек A и B – соответственно (ρ_0, φ_0) и (ρ_1, φ_1) .

© В.М. Шатохин, 2018

Проекция центробежной силы инерции материальной точки, связанной с вращающимся телом, на направление радиуса ρ имеет вид

$$F_\rho = ma_\omega = m\omega^2 \rho, \quad (1)$$

где m – масса точки; $a_\omega = \omega^2 \rho$ – осестремительное (нормальное) ускорение; ω – угловая скорость.

Тогда выражение для потенциальной энергии центробежной силы инерции можно представить так [6]:

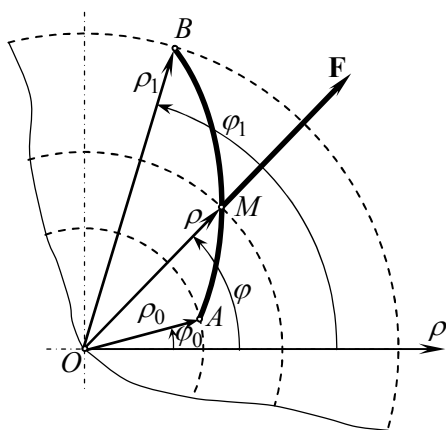


Рисунок 1 – Схема для построения брахистохроны в поле центробежных сил

$$\Pi = \int_\rho^0 F_\rho d\rho = -\frac{m\omega^2}{2} \rho^2. \quad (2)$$

При записи формулы (2) принималось, что начальным положением для определения потенциальной энергии является отталкивающий центр, в котором потенциальная энергия равна нулю.

В равномерно вращающейся вокруг неподвижной оси системе координат, если пренебречь силами трения и сопротивления, имеет место закон сохранения энергии в относительном движении [6]

$$T + \Pi = h = const, \quad (3)$$

где $T = \frac{1}{2}mv^2$ – кинетическая энергия точки в относительном движении по отношению к

вращающейся системе координат; $h = -\frac{m\omega^2}{2} \rho_0^2$ – постоянная энергии.

В дальнейшем полагаем, что в формуле (3) учитывается только потенциальная энергия центробежной силы инерции. С точки зрения приложений это наиболее важный случай. В технологических устройствах угловая скорость такова, что влияние сил тяжести на движение точки незначительно. При анализе движения в горизонтальной плоскости эта оговорка вообще оказывается излишней.

Теперь на основании (3) для скорости точки имеем

$$v = \omega \sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (\rho \geq \rho_0). \quad (4)$$

Из определения алгебраической величины скорости (проекция скорости на касательную к траектории) $v = v_\tau = \frac{ds}{dt}$, выражения для квадрата дифференциала дуги в полярных координатах $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$ и формулы (4) следует, что

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\omega \sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} d\varphi, \quad (5)$$

где $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$.

Заметим, что при отсчете дуги в направлении движения точки дифференциал пути будет совпадать с дифференциалом дуговой координаты ds , а модуль скорости точки с ее алгебраической величиной $v = v_\tau$.

Интегрируя, приходим к функционалу

$$\tau[\rho(\varphi)] = \frac{1}{\omega} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} d\varphi. \quad (6)$$

2. Поиск экстремума функционала. Для подынтегральной функции введем обозначение

$$P = P(\rho, \rho') = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}}, \quad (7)$$

тогда на кривой, реализующей экстремум рассматриваемого функционала, должно выполняться условие (вытекает из необходимых условий экстремума функционала (6) [1])

$$P_\rho - \frac{d}{d\varphi} P_{\rho'} \equiv 0, \quad (8)$$

где $P_\rho, P_{\rho'}$ – производные от P соответственно по ρ и ρ' .

Таким образом, искомая функция $\rho = \rho(\varphi)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Эйлера) (8), или в развернутом виде

$$P_\rho - P_{\rho\rho'}\rho' - P_{\rho'\rho'}\rho'' = 0, \quad (9)$$

где $\rho'' = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$.

После почленного умножения этого уравнение на ρ' , его левая часть превращается в точную производную

$$\frac{d}{d\varphi} (P - \rho' P_{\rho'}).$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$P - \rho' P_{\rho'} = \frac{1}{C}. \quad (10)$$

Из выражения (10), после преобразований, получаем

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{(\rho^2 - \rho_0^2)} - 1}. \quad (11)$$

Дифференциальное уравнение (11) допускает аналитическое решение (громоздкие выкладки здесь не приводятся)

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} z + \frac{1}{z} + C_1, & C^2 = 1, \\ \operatorname{arctg} z - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{1-C^2}} + C_1, & C^2 < 1, \\ \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z - \sqrt{C^2-1}}{z + \sqrt{C^2-1}} \right| + C_1, & C^2 > 1, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$z = \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (13)$$

Краевые условия для нахождения постоянных C и C_1 с учетом (13):

$$\text{при } \varphi = \varphi_0 \quad \rho = \rho_0, \quad z = z(\rho_0) = z_0 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_0^2}{\rho_0^2 - \rho_0^2} - 1} = \infty; \quad (14)$$

$$\text{при } \varphi = \varphi_1 \quad \rho = \rho_1, \quad z = z(\rho_1) = z_1 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (15)$$

С целью получения универсальных результатов дальнейший анализ решений целесообразно осуществить, используя относительный полярный радиус $\rho_r = \frac{\rho}{\rho_1}$.

Выражение (13), после деления числителя и знаменателя на ρ_1 , приобретает вид

$$z = \sqrt{\frac{C^2 \rho_r^2}{\rho_r^2 - k_\rho^2} - 1} \quad (k_\rho < \rho_r \leq 1), \quad (16)$$

где $k_\rho = \frac{\rho_0}{\rho_1}$ ($0 < k_\rho < 1$).

Краевые условия (14) и (15) оказываются теперь следующими:

$$\text{при } \varphi = \varphi_0 \quad \rho_r = k_\rho, \quad z = z(k_\rho) = z_0 = \sqrt{\frac{C^2 k_\rho^2}{k_\rho^2 - k_\rho^2} - 1} = \infty; \quad (17)$$

$$\text{при } \varphi = \varphi_1 \quad \rho_r = 1, \quad z = z(1) = z_1 = \sqrt{\frac{C^2}{1 - k_\rho^2} - 1}. \quad (18)$$

Для практики наибольший интерес представляют случаи, когда $C^2 < 1$ и $C^2 > 1$. Приведем построенное с помощью условий (17), (18) трансцендентное уравнение для нахождения C^2 в первом случае

$$f(x) = \varphi_1 - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1 - k_\rho^2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1 - k_\rho^2} - 1} - \varphi_0 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \frac{\pi}{2} = 0, \quad (19)$$

где $x = C^2$.

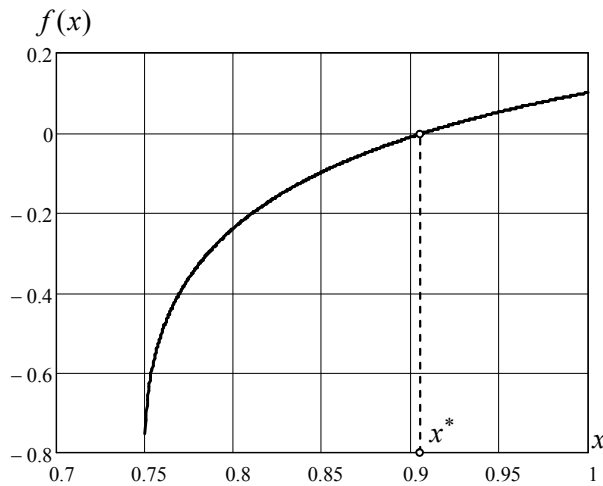


Рисунок 2 – График функции $f(x)$

График функции $f(x)$ показан на рис. 2; приняты следующие параметры: $k_\rho = 0,5$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 45^\circ$. При наличии графика корень функции в среде MathCAD удобно находить с использованием встроенной функции **root(f(x),x,a,b)** (x – начальное приближение; a , b – границы интервала, на котором $f(x)$ имеет перемену знака). В рассматриваемом случае для корня получено $x^* = 0,908 < 1$, которому отвечает $C = \sqrt{x^*} = 0,953$. После этого определяется C_1 из указанных краевых условий

$$C_1 = \varphi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right) \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

Найденные значения постоянных C и C_1 с помощью второй формулы (12) и формулы (16) позволяют записать следующее выражение для искомой функции

$$\varphi(\rho_r) = \arctg \sqrt{\frac{C^2 \rho_r^2}{\rho_r^2 - k_\rho^2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \sqrt{\frac{C^2 \rho_r^2}{\rho_r^2 - k_\rho^2} - 1} + C_1. \quad (21)$$

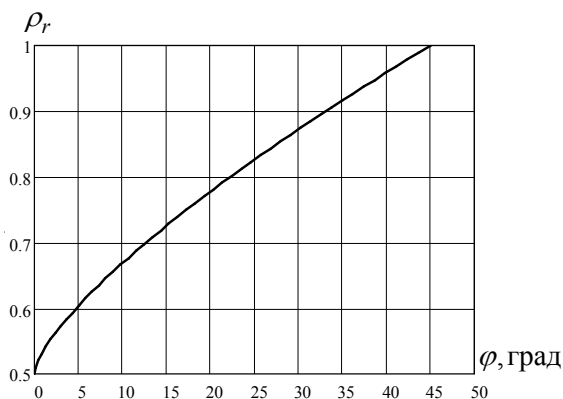


Рисунок 3 – График функции $\rho_r(\varphi)$

На рис. 3 приведен, полученный с помощью (21), график обратной функции $\rho_r(\varphi)$, более удобной для анализа. На рис. 4 графики указанной зависимости построены в полярной системе координат для углов φ_1 кратных 15° ; причем для k_ρ брались предельные минимальные значения k_ρ^* , которые еще обеспечивают для построения решений возможность использования второй формулы (12) ($C^2 < 1$).

3. Формирование лопатки с профилем брахистохроны. На рис. 5 показана схема грунтометателя: 1 – ступица; 2 – кольцо; 3 – спица; 4 – криволинейная лопатка. Предполагается, что метатель вращается с угловой скоростью ω против хода часовых стрелок. Радиусы R_1 и R_2 представляют собой радиусы окружностей, проходящих через заднюю и переднюю кромки лопатки. В изложенной выше теории им соответствуют полярные радиусы ρ_0 и ρ_1 . Криволинейная лопатка с профилем в форме брахистохроны ($\rho_0 = 0,496$ м, $\rho_1 = 0,632$ м, $\varphi_0 = 0$,

$\varphi_1 = 20^\circ$) показана на рис. 6.

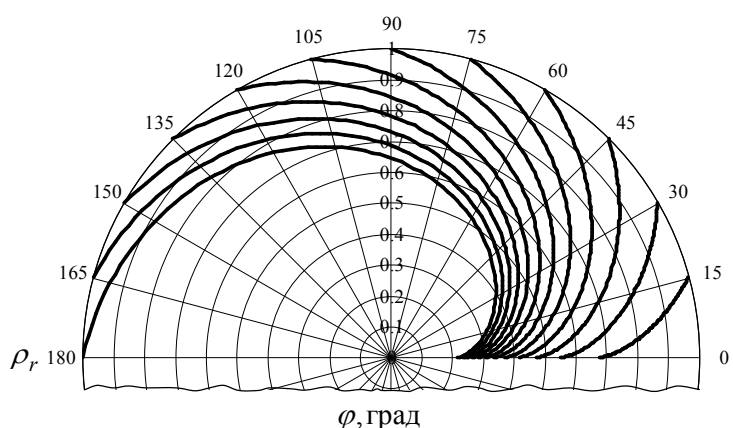


Рисунок 4 – Графики функций $\rho_r(\varphi)$ в полярной системе координат для предельных значений k_ρ^*

грунт под более острым углом, чем прямолинейная: больший объем захватываемого грунта, меньшие усилия при внедрении, меньшие динамические нагрузки на лопатки и ротор, меньшая мощность приводного двигателя.

При формировании боковых стенок указанной лопатки также использовались брахистохроны. Выступающие части боковых стенок могут служить своеобразными разрыхлителями, облегчающими внедрение лопатки в грунт.

Результаты исследований позволили установить ряд принципиальных преимуществ криволинейной лопатки, связанных с тем, что такая лопатка внедряется в

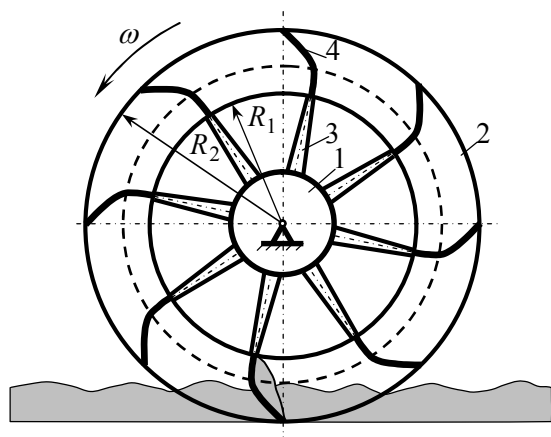


Рисунок 5 – Схема грунтометательного механизма

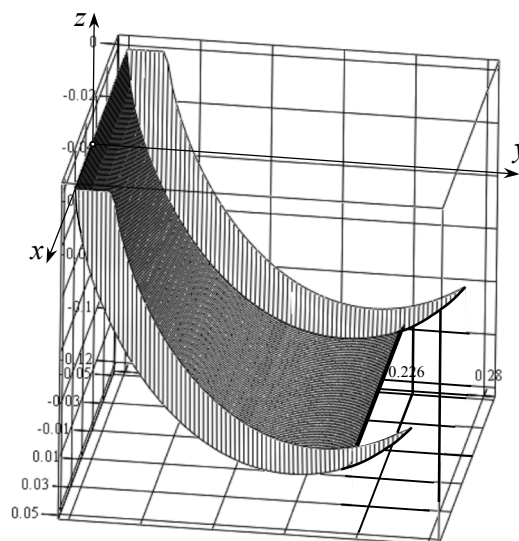


Рисунок 6 – Лопатка с профилем брахистохроны

Выводы. 1. Разработан метод решения задачи о брахистохроне для центробежной силы инерции. 2. Построен функционал времени в полярной системе координат. 3. Получен первый интеграл уравнения Эйлера в форме дифференциального уравнения первого порядка и найдено его аналитическое решение. 4. Установлена зависимость математического описания оптимальных траекторий от значений координат начальной и конечной точек. 5. Приведены результаты расчетов оптимальных траекторий. 6. Построена лопатка грунтометателя с профилем брахистохроны. 7. Изложенный подход перспективен при разработке и совершенствовании аналогичных конструкций.

Литература: 1. Эльсгольц Л. В. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. В. Эльсгольц – М. : Наука, 1969. – 279 с. 2. Gemmer J. A. Generalizations of the Brachistochrone problem / J. A. Gemmer, M. Nolan, R. Umble // IIME Journal. – 2011.– Vol. 13. – N 4. – P. 207 – 218. 3. Геронимус Я. Л. Вариационные методы решения задач оптимизации: Учеб. пособие / Я.Л. Геронимус, Б. Л. Голинский Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1987. – 114 с. 4. Шатохин В. М. Оптимальные траектории движения точки, перемещающейся под действием центробежной силы инерции / В. М. Шатохин, Н. В. Шатохина // Восточно-Европейский журнал передовых технологий.– Харьков. 2012. – Вып. 4/7 (58). – С. 9-14. 5. Шатохин В. М. Дослідження руху частки ґрунту по лопатці: результати комп'ютерних експериментів / В. М. Шатохин, А. М. Попова. // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 4 – Т. 54.– С. 135-144. 6. Лойцянский Л. Г. Курс теоретической механики. [В 2-х томах, т. II, Динамика] / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье, М. : Наука, 1983. – 640 с.

Bibliography (transliterated): 1. Ehl'sgol'c L. V. Differencial'nye uravneniya i variacionnoe ischislenie / L. V. Ehl'sgol'c – M. : Nauka, 1969. – 279 s. 2. Gemmer J. A. Generalizations of the Brachistochrone problem / J. A. Gemmer, M. Nolan, R. Umble // IIME Journal. – 2011.– Vol. 13. – N 4. – P. 207 – 218. 3. Geronimus YA. L. Variacionnye metody resheniya zadach optimizacii: Ucheb. posobie / YA.L. Geronimus, B. L. Golinskij Har'kov: Har'k. aviac. in-t, 1987. – 114 s. 4. SHato-hin V. M. Optimal'nye traektorii dvizheniya tochki, peremeshchayushchejsya pod dejstviem centrobezhnoj sily inercii / V. M. SHatohin, N. V. SHatohina // Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovyh tekhnologij.– Har'kov. 2012. – Вып. 4/7 (58). – С. 9-14. 5. SHatohin V. M. Doslidzhennya ruhu chastki gruntu po lopatci: rezul'tati komp'yuternih eksperimentiv / V. M. SHatohin, A. M. Popova. // Praci Tavrijskogo derzhavnogo agrotekhnologichnogo universitetu. – Melitopol': TDA TU, 2012. – Vip. 4 – T. 54.– S. 135-144. 6. Lojcyanskij L. G. Kurs teoreticheskoj mekhaniki. [V 2-h tomah, t. II, Dinamika] / L. G. Lojcyanskij, A. I. Lur'e, M. : Nauka, 1983. – 640 s.

Шатохин В.М., Ярмак М.С., Шаповалов О.В.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ ЛОПАТКИ ГРУНТОМЕТАЛЬНИКА ЯК РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧИ ПРО БРАХИСТОХРОНУ ДЛЯ ВІДЦЕНТРОВОЇ СИЛИ ІНЕРЦІЇ

Викладено метод знаходження брахістохрони для відцентрової сили інерції. Побудовано функціонала часу в полярній системі координат і записане відповідне рівняння Ейлера; отримане його перший інтеграл, для якого знайдено аналітичне розв'язання. Встановлено, що його структура залежить від крайових умов. Наведено приклади розрахунків оптимальних траєкторій, побудована лопатка ґрунтометальника із профілем брахістохрони.

Шатохин В.М., Ярмак Н.С., Шаповалов А.В.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ ЛОПАТКИ ГРУНТОМЕТАТЕЛЯ КАК РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БРАХИСТОХРОНЕ ДЛЯ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Изложен метод нахождения брахистохроны для центробежной силы инерции. Построен функционал времени в полярной системе координат и записано соответствующее уравнение Эйлера; получен его первый интеграл, для которого найдено аналитическое решение. Установлено, что его структура зависит от краевых условий. Приведены примеры расчетов оптимальных траекторий, построена лопатка ґрунтометателя с профилем брахистохроны.

V. Shatokhin, N. Yarmak A. Shapovalov

THE OPTIMAL PROFILE OF GROUND-THROWER'S BLADE AS A SOLUTION FOR BRACHISTOCHRONE PROBLEM FOR CENTRIFUGAL INERTIA FORCE

The method for determination of brachistochrone for centrifugal inertia force is stated. The time functional in polar coordinates system is created, corresponding Euler equation is written; its first integral is obtained for which the analytical decision is found. It is determined that its structure depends on boundary conditions. The examples of optimal trajectory calculation are represented, the ground-thrower's blade with brachistochrone profile is built.