УДК 539.3

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАДАЧАХ ПРО СТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ ОДМІРНИХ ПЕРІОДИЧНИХ СИСТЕМ

А.Г. Куценко, канд. фіз-мат. наук
Національний університет біоресурсів і природокористування України

Запропонована схема прямого методу граничних елементів для випадку стаціонарних коливань балок. За допомогою методу граничних елементів та на основі теорії Флоке знайдено розв'язок задачі про стаціонарні коливання нескінченної періодичної шарнірно закріпленої балки.

Ключові слова: *періодична система, теорія Флоке, коливання, балка, метод граничних елементів.*

Проблема. Сучасний розвиток сільськогосподарської техніки характеризується появою більш потужних, нових виробничих машин, механізмів та обладнання. Збільшення потужності обладнання призводить до значного зростання динамічного навантаження на нього. У зв'язку з цим актуальною стає проблема захисту елементів конструкцій сільськогосподарських машин від вібраційної і ударної дій, тобто зменшення рівня коливань та підвищенням їх надійності і довговічності.

Дану задачу можна вирішити, якщо правильно використовувати елементи машин і механізмів, які мають періодичну структуру. Адже, добре відомий в літературі той факт, що згадані елементи є хвилеводами, які мають властивість пропускати без спотворень хвилі певних частот, а інші при цьому гасяться повністю [1]. А тому періодичні механічні системи можна на практиці використовувати як певні механічні гасителі коливань елементів с.-г. техніки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У сучасній механіці існує багато методів дослідження поширення різного роду хвиль у періодичних механічних системах. Так дослідження поширення хвиль у періодично структурованих балках та в складених з них гратках були систематизовані в [2] на основі методу лінійних динамічних жорсткостей, який є узагальненням відомого методу дина-

мічних жорсткостей шляхом зміни окремих зосереджених навантажень послідовністю періодично розташованих навантажень або навантаженнями, розподіленими вздовж деякої прямої лінії.

Дослідження одновимірної та квазіодновимірної проблеми поширення хвиль у балках і платівках призвело до розробки цілого ряду аналітичних методів, серед яких відзначимо метод матриці переносу (transfer matrix method) [9], який полягає у побудові матриці, що зв'язує динамічні і кінематичні характеристики на протилежних частинах періоду, та подальшому відшуканні сталих розповсюдження хвилі через власні значення цієї матриці, метод розкладу розв'язку за просторовими методами [7] та варіаційні методи [4], які базуються на співвідношеннях балансу енергії і є розвиненням методів Релея та Релея-Рітца.

Вказані методи у подальшому були успішно застосовані при розгляді суттєво двовимірних задач. Вони дали змогу побудувати поверхню сталого поширення в залежності від напрямку розповсюдження хвилі, яка є узагальненням дисперсійної кривої на двовимірний випадок. Проте останнє стало можливим лише за рахунок переходу від використання аналітичних методів до використання чисельно-аналітичних методів. При цьому у переважній більшості випадків для використання чисельних обрахунків застосовувався метод скінченних елементів [5, 6, 8].

Проте метод скінченних елементів не можна розглядати як найкраще доповнення до аналітичних методів дослідження явища поширення хвиль в періодичних системах. Оскільки відповідні задачі є лінійними граничними задачами для диференціальних рівнянь (звичайних або в часткових похідних), то найбільш вдалим видається використання методу граничних елементів.

Мета дослідження. Розробити схему побудови прямого методу граничних елементів для дослідження стаціонарних коливань нескінченних періодичним чином закріплених балок.

Результати досліджень. Для побудови схеми прямого методу граничних елементів необхідно знати, так званий, фундаментальний розв'язок відповідного диференціального рівняння (або системи рівнянь) у частинних похідних. Фізично такий розв'язок відповідає функції впливу. Для задачі механіки суцільного середовища — це поле переміщень (швидкостей), викликаних одиничною зосередженою силою у необмеженому просторі. З математичної точки зору фундаментальний розв'язок є розв'язком відповідного диференціального рівняння, у якого права частина є дельта-функцією Дірака.

У нашому випадку фундаментальний розв'язок $w^*(x)$ має задовольняти рівняння:

$$\frac{d^4 w^*(x)}{dx^4} - p^4 w^*(x) = -\frac{\delta}{EJ}. \tag{1}$$

Для знаходження $w^*(x)$ використаємо інтегральне перетворення Фур'є:

$$W^*(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} w^*(x) e^{-i\alpha x} dx. \tag{2}$$

Перемноживши ліву та праву частини (1) на $e^{-i\alpha x}$ та інтегруючи по x від $-\infty$ до ∞, після застосування теореми про диференціювання оригіналу, отримуємо:

$$\left(\alpha^4 - p^4\right) W^*(\alpha) = -\frac{1}{EJ}. \tag{3}$$

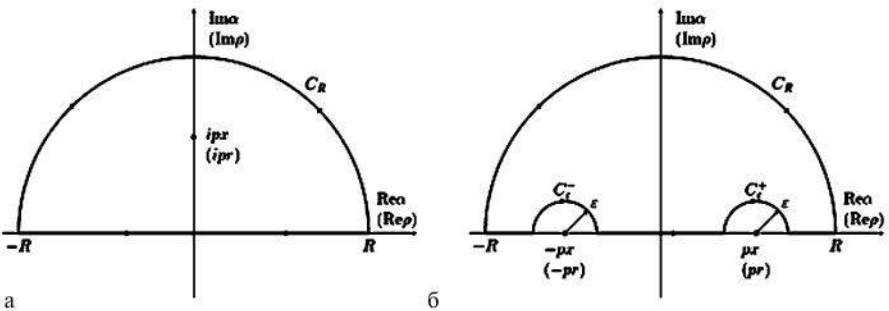
При виводі (3) було використано основну інтегральну властивість дельта — функції:

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx = f(0),\ a < 0 < b, \tag{4}$$

та вважалось, що сама функція $w^*(x)$ та перші три її похідні стають як завгодно малими за модулем, коли $|x| \to \infty$.

Знаходження розв'язку алгебраїчного рівняння (3) не становить жодних проблем:

$$W^*(\alpha) = -\frac{1}{EJ}\frac{1}{\alpha^4 - p^4}. \tag{5}$$



а б

Рис. 1. *Контури інтегрування у обмеженому перетворенні Фур'є*

Найбільш суттєві труднощі виникають на останньому етапі — етапі переходу від зображення до оригіналу:

$$w^*(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W^*(\alpha)e^{-i\alpha x}dx=\frac{1}{4\pi p^2 EJ}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2-p^2}d\alpha-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2+p^2}d\alpha\right]. \quad (6)$$

Знайдемо другий у правій частині (6) інтеграл:

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2+p^2}d\alpha, \quad (7)$$

причому для визначеності будемо вважати, що $x>0$. Для цього звернімось до техніки контурного інтегрування і розглянемо інтеграл, контур інтегрування якого у комплексній площині α зображено на рис. 1, а:

$$I_{2L}=\oint_L\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2+p^2}d\alpha=\int_{-R}^{R}\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2+p^2}d\alpha+\int_{C_R}\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2+p^2}d\alpha. \quad (8)$$

Оскільки на півколі C радіуса R змінну інтегрування можна представити у наступному вигляді $\alpha=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $0<\varphi<\pi$, то підінтегральна функція у другому інтегралі буде утримувати експоненту з від'ємною дійсною частиною показника, пропорційною R. Тому вклад другого інтегралу швидко зникає при збільшенні R, а в границі $I_{2L}\to I_2$, при $R\to\infty$. З іншої сторони, контурний інтеграл за теоремою про лишки з точністю до постійного співмножника рівний сумі лишків у плюсах підінтегральної функції, які охоплені контуром L. У даному випадку маємо лише один простий полюс у точці $\alpha=ip$:

$$\frac{I_{2L}}{2\pi i}=\operatorname*{Re}s_{\alpha=ip}\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2+p^2}=\frac{e^{-px}}{2ip}. \quad (9)$$

Таким чином,

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2+p^2}d\alpha=\frac{\pi}{p}e^{-px},\ x>0. \quad (10)$$

У випадку, коли $x<0$, для того щоб інтеграл по півколу зникав при $R\to\infty$, контур слід замикати у нижній півплощині. Тоді, проводячи аналогічні викладки та враховуючи наявність полюса у точці $\alpha=-ip$, отримуємо:

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2+p^2}d\alpha=\frac{\pi}{p}e^{px},\ x<0. \quad (11)$$

Вирази (10) та (11) можна поєднати в одному для довільних значень x:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha = \frac{\pi}{p} e^{-p|x|}. \qquad (12)$$

Підінтегральна функція у першому інтегралі в правій частині (6):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 - p^2} d\alpha \qquad (13)$$

утримує полюси $\alpha = \pm p$, які знаходяться на дійсній осі. Тому контур інтегрування у випадку $x > 0$ має бути таким, як це зображено на рис. 1,б:

$$I_{1L} = \int_L \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 - p^2} d\alpha =$$

$$= \int_{-R}^{-p+\varepsilon} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha + \int_{-p-\varepsilon}^{p-\varepsilon} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha + \int_{p+\varepsilon}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha +$$

$$+ \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha + \int_{C_-} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha + \int_{C_+} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha. \qquad (14)$$

Знайдемо граничні значення інтегралів по півколам C_- та C_+, у випадку, коли $\varepsilon \to 0$. Для лівого півкола маємо:

$$\int_{C_-} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\left(\varepsilon e^{i\varphi} - p\right)x}}{2p} \left[\frac{1}{\varepsilon e^{i\varphi} - 2p} - \frac{1}{\varepsilon e^{i\varphi}} \right] d\varphi \to$$

$$\to i \int_{\pi}^{0} \frac{e^{ipx}}{2p} d\varphi = -\frac{\pi i}{2p} e^{-ipx}, \varepsilon \to 0. \qquad (15)$$

Аналогічно:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_+} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha = -\frac{\pi i}{2p} e^{ipx}, \ \varepsilon \to 0. \qquad (16)$$

Як і слід було очикувати, значення цих інтегралів є рівними напівлишкам від підінтегральної функції у відповідних точках, помноженим на $2\pi i$.

Переходячи у (14) до границі при $\varepsilon \to 0$ та $R \to \infty$ і враховуючи, що при цьому як і у попередньому випадку зникає інтеграл по півколу радіуса R, а у зоні, обмеженій контуром, відсутні полюси, остаточно отримуємо:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 - p^2} d\alpha = -\frac{\pi}{p} \sin px, \ x > 0. \qquad (17)$$

Провівши аналогічні міркування для $x < 0$, у загальному випадку отримуємо:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 - p^2} d\alpha = -\frac{\pi}{p} \sin p|x|. \quad (18)$$

Таким чином, шуканий фундаментальний розв'язок є:

$$w^*(x) = \frac{1}{4p^3 EJ}\left(\sin p|x| + e^{-p|x|}\right). \quad (19)$$

Цікаво відзначити той факт, що розв'язок (19) не є єдиним можливим розв'язком рівняння (1). Якщо ввести у систему малі сили внутрішнього опору, поклавши $p = -p_R - ip_I$, $p_R >> ip_I > 0$,то контур у обмеженому перетвореній Фур'є для інтеграла I_{1L} буде повністю охоплювати полюс $\alpha = -p_R + ip_I$, а полюс $\alpha = p_R - ip_I$ буде знаходитись назовні від нього.

Тоді, спрямовуючи $p_I \to 0$, отримуємо:

$$w^*(x) = \frac{1}{4p^3 EJ}\left(ie^{-ip|x|} + e^{-p|x|}\right). \quad (20)$$

Аналогічно, покладаючи $p = p_R + ip_I$, а потім роблячи граничний перехід $p_I \to 0$, знаходимо:

$$w^*(x) = \frac{1}{4p^3 EJ}\left(e^{-p|x|} - ie^{-ip|x|}\right). \quad (21)$$

Усі три розв'язки (19)-(21) мають право на існування. Враховуючи залежність всіх характеристик від часу у вигляді $e^{-i\omega t}$, (21) відповідає хвилі, викликаній одиничною перерізуючою силою, яка поширюється на нескінченність від точки прикладання сили $x = 0$. Розв'язок (20) відповідає хвилі, що біжить з нескінченності, а „дійсний" розв'язок (19) є суперпозиція розв'язків (20) і (21). Зрозуміло, що там, де це можна, доцільно використовувати розв'язок (19). Проте при чисельній реалізації іноді трапляються ситуації, коли використання (19) призводить до значного зростання похибки обчислень. У такому разі слід звертатися до фізичного розв'язку (21).

Граничні інтегральні співвідношення, які виражають значення невідомих функцій у середині зони через їх значення на границі зони (аналог потенціалів простого та подвійного шару у теорії потенціалу), загалом виводять на основі варіаційних теорем типу теореми про взаємність робіт. Проте, у даному

одновимірному випадку звертатися до них не має потреби. Значно простіше використати співвідношення:

$$\int_0^a \left(\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - p^4 w(x) \right) w^*(x-\xi)\, dx = \left[\frac{d^3 w(x)}{dx^3} w^*(x-\xi) - \right.$$

$$\left. - \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{dw^*(x-\xi)}{dx} + \frac{dw(x)}{dx} \frac{d^2 w^*(x-\xi)}{dx^2} - w(x) \frac{d^3 w^*(x-\xi)}{dx^3} \right]_{|x=0}^{x=a} +$$

$$+ \int_0^a \left(\frac{d^4 w^*(x-\xi)}{dx^4} - p^4 w^*(x-\xi) \right) w(x)\, dx , \qquad (22)$$

але легко отримати, застосовуючи правило інтегрування по частинах. Тут вважається, що балка відповідає проміжку $[0,a]$ осі x при цьому $\xi \in [0,a]$.

Вибираючи $w^*(x)$ у вигляді (19) співвідношення (22) може бути записане у вигляді:

$$w(\xi) = \left[-Q^*(x-\xi) w(x) + M^*(x-\xi) \theta(x) - \right.$$

$$\left. - \theta^*(x-\xi) M(x) + w^*(x-\xi) Q(x) \right] \Big|_{x=0}^{x=a} . \qquad (23)$$

У (23) величини, позначені зірочкою, є цілком визначеними. Враховуючи вирази для кута нахилу, згинаючого моменту та перерізуючої сили згідно теорії Флоке [1], знаходимо:

$$\theta^*(x) = \frac{1}{4p^2 EJ} \left(\cos px - e^{-p|x|} \right) signx ,$$

$$M^*(x) = \frac{1}{4p^2} \left(\sin p|x| - e^{-p|x|} \right), \qquad (24)$$

$$Q^*(x) = \frac{1}{4} \left(\cos px - e^{-p|x|} \right) signx .$$

Серед восьми величин $w(0)$, $w(a)$, $\theta(0)$, $\theta(a)$, $M(0)$, $M(a)$, $Q(0)$ та $Q(a)$ чотири задаються граничними умовами (або чотири лінійні комбінації цих величин). Отже, фактично невідомими серед них є лише половина. Послідовно

спрямовуючи $\xi \to 0$ та $\xi \to a$, отримуємо два рівняння для їх визначення. Для знаходження ще двох продиференціюємо (23) по ξ:

$$\theta(\xi) = \left[-\frac{Q^*(x-\xi)}{d\xi} w(x) + \frac{M^*(x-\xi)}{d\xi} \theta(x) - \right.$$
$$\left. - \frac{\theta^*(x-\xi)}{d\xi} M(x) + \frac{w^*(x-\xi)}{d\xi} Q(x) \right]\Big|_{\substack{x=a \\ x=0}}. \qquad (25)$$

Вказані два рівняння знову одержуємо за допомогою граничних переходів $\xi \to 0$ та $\xi \to a$.

Отримана система граничних рівнянь, які в нашому випадку є лінійними алгебраїчними рівняннями, може бути представлена у матричному вигляді:

$$X_1^T = A_1 X_1^T + A_2 X_2^T, \qquad (26)$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} -Q^*(+0) & Q^*(-a) & M^*(+0) & -M^*(-a) \\ -Q^*(a) & Q^*(-0) & M^*(a) & -M^*(-0) \\ -Q_\xi^*(+0) & Q_\xi^*(-a) & M_\xi^*(+0) & -M_\xi^*(-a) \\ -Q_\xi^*(a) & Q_\xi^*(-0) & M_\xi^*(a) & -M_\xi^*(-0) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\theta^*(+0) & \theta^*(-a) & w^*(+0) & -w^*(-a) \\ -\theta^*(a) & \theta^*(-0) & w^*(a) & -w^*(-0) \\ -\theta_\xi^*(+0) & \theta_\xi^*(-a) & w_\xi^*(+0) & -w_\xi^*(-a) \\ -\theta_\xi^*(a) & \theta_\xi^*(-0) & w_\xi^*(a) & -w_\xi^*(-0) \end{pmatrix},$$

$$X_1^T = \left(w(a), w(0), \theta(a), \theta(0)\right),\ X_2^T = \left(M(a), M(0), Q(a), Q(0)\right),$$

нижнім індексом позначено похідну по аргументу.

У якості прикладу застосування методу граничних елементів до задач стаціонарних коливань балок розглянемо задачу про проходження гармонічної хвилі через нескінченну шарнірно закріплену балку. Граничні умови у цьому випадку задаються у вигляді:

$$w(x)\big|_{x=0} = w(x)\big|_{x=a} = 0, \qquad (27)$$

та

$$\theta(x)\big|_{x=a} = S\theta(x)\big|_{x=0},\ M(x)\big|_{x=a} = SM(x)\big|_{x=0}, \qquad (28)$$

які дають можливість відразу виключити з розгляду $w(0)$, $w(a)$, $\theta(a)$, $M(a)$, виразивши останні дві через $\theta(0)$, та $M(0)$. Для чотирьох невідомих, що залишилися, з (26) отримуємо однорідну систему:

$$AX = 0, \tag{29}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} SM^*(+0) - M^*(a) & -S\theta^*(+0) + \theta^*(-a) & w^*(+0) & -w^*(-a) \\ SM^*(a) - M^*(-0) & -S\theta^*(a) + \theta^*(-0) & w^*(a) & -w^*(-0) \\ SM_\xi^*(+0) - M_\xi^*(-a) - S & -S\theta_\xi^*(+0) + \theta_\xi^*(-a) & w_\xi^*(+0) & -w_\xi^*(-a) \\ SM_\xi^*(a) - M_\xi^*(-0) - 1 & -S\theta_\xi^*(a) + \theta_\xi^*(-0) & w_\xi^*(a) & -w_\xi^*(-0) \end{pmatrix},$$

$$X_1^T = \left(M(0), \theta(0), Q(a), Q(0)\right).$$

Підставляючи (24) у (29), можемо знайти визначник матриці A у явному вигляді:

$$\begin{vmatrix} S + \sin(pa) - e^{-pa} & \cos(pa) - e^{-pa} & 1 & \sin(pa) + e^{-pa} \\ -S\left(\sin(pa) - e^{-pa}\right) - 1 & S\left(\cos(pa) - e^{-pa}\right) & -\sin(pa) - e^{-pa} & 1 \\ -2S + \cos(pa) + e^{-pa} & -S - \sin(pa) + e^{-pa} & 0 & \cos(pa) - e^{-pa} \\ S\left(\cos(pa) + e^{-pa}\right) - 2 & S\left(\sin(pa) - e^{-pa}\right) + 1 & \cos(pa) - e^{-pa} & 0 \end{vmatrix}.$$

Він з точністю до подібних перетворень рядків та стовпчиків співпадає з визначником, який отриманий в роботі [3].

Висновки.

1. Розроблена числова схема методу граничних елементів для стаціонарних коливань балок.
2. Апробація цього методу на прикладі стаціонарних коливань нескінченної шарнірно періодично закріпленої балки показала його ефективність для дослідження поширення хвиль вздовж подібних періодичних систем.
3. Подібні дослідження можуть бути поширені на випадок двовимірних періодичних систем, що на відміну від методу скінченних елементів, зменшить на одиницю розмірність задачі.

Бібліографія

1. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1959. — 457 с.
2. Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин / *Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д., Маслов В.П., Римский-Корсаков А.В.* — М.: Наука, 1974. — 102 с.
3. *Куценко А.Г.* Поширення хвиль в балках, закріплених періодичним чином // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. — 1997. — № 3. — С. 69-76.
4. *Mead D.J., Mallik A.K.* An approximate method of predicting the responds of periodically supported beams subjected to random con-vected loading // J. Sound and Vibr. — 1976. — Vol. 47, № 4. — P. 457-471.
5. *Mace B.R., Duhamel D., Brennan M.J., Hinke L.* Wavenumber prediction using finite element analysis//Eleventh International Congress on Sound and Vibration, St. Peterburg. — 2004.
6. *Mencik J.M., Ichchou M.N.* Wave finite elements in guided elastodynamics with internal fluid // Inter. J. of Sol. And Structures. — 2007 — Vol. 44, P. 2148 -2167.
7. *Ouyang H.J., Williams F.W., Kennedy D. A* General method for an alyzing wave propagation along longitudinally periodic structures // J. Sound and Vibr. — 1994. — Vol. 177, №2. — P. 277-281.
8. *Tyutekin V.V.* Circumferential and helical normal waves of a cylindrical waveguide: helical waves in s free space// Acoustical Physics. — 2006. — Vol. 52, № 4. — P. 471-476.
9. *Zhong W.X., Williams F.W.* On the direct solution of wave propagation for repetitive structures // J. Sound and Vibr. — 1995. — Vol. 181, №3. — P. 485-501.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ О СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОДНОМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрена схема прямого метода граничных элементов на случай стационарных колебаний балок. С помощью метода граничных элементов и на основании теории Флоке найдено решение о стационарных колебаниях бесконечной периодической шарнирно закрепленной балки.

Ключевые слова: *периодическая система, теория Флоке, колебания, балка, метод граничных элементов.*

BOUNDARY ELEMENT METHOD IN PROBLEMS OF STEADY VIBRATIONS OF ONE-DIMENSIONAL PERIODIC SYSTEMS

The schematic of boundary element method for the case that the steady vibrations of beams is considered. Using this method and Floquet's principle the connection between the quasi-periodic solutions and the solutions of the boundary problems for corresponding infinite periodic structures is shown by the example of the simply supported beam.

***Key words**: periodic system, Floquet's principle, vibrations, beam, boundary element method.*