

УДК 531.534

DOI: <http://dx.doi.org/10.20535/0203-3771362018149684>Балабанов И. В.<sup>1</sup>, к.т.н., Гаваза О. Ю.<sup>2</sup>, ассистент

## СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МАТРИЦ ПОДАТЛИВОСТИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

**En** Currently, significant interest among the developers of navigation devices, particularly dynamically tuned gyros, is caused by the design of elastic elements with specified properties. In turn, the development of optimal designs of elastic elements that provide the necessary rigidity of an airplane wing is of significant relevance. At the same time, if optimization is carried out, for example, within the framework of the conceptual design stage, which allows of certain simplifications, then it is advisable to apply its idealized core structure to correctly reproduce the most significant features of the wing frame powerwork.

**Ua** В даний час значний інтерес у розробників навігаційних приладів, зокрема, таких як динамічно настроюємі гіроскопи, викликає проектування пружних елементів, що володіють заданими властивостями. У свою чергу неабиякої актуальності має розробка оптимальних конструкцій пружних елементів, що забезпечують необхідну жорсткість крила літака. Тому, якщо оптимізація проводиться, наприклад, в рамках етапу концептуального проектування, на якому допускаються певні спрощення, то для правильного відтворення найбільш істотних особливостей силової роботи каркаса крила доцільно застосовувати його ідеалізовану стрижневу конструкцію.

### Введение

В настоящее время значительный интерес у разработчиков навигационных приборов, в частности, таких как динамически настраиваемые гироскопы, вызывает проектирование упругих подвесов, обладающих заданными свойствами [1].

В свою очередь существенную актуальность имеет разработка оптимальных конструкций упругих подвесов, обеспечивающих необходимую жесткость крыла самолета. При этом, если оптимизация проводится, например, в рамках этапа концептуального проектирования, допускающего определенные упрощения, то для правильного воспроизведения наиболее существенных особенностей силовой работы каркаса крыла целесообразно применять его идеализированную стрижневую конструкцию [2].

<sup>1</sup> НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», кафедра авіа- та ракетобудування

<sup>2</sup> НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», кафедра авіа- та ракетобудування

### Постановка задачи

Исследовать влияние различных видов симметрии, принятых при рассмотрении упругого элемента, на структуру его матрицы податливости, с целью упрощения анализа и интерпретации результатов расчета.

### Объект исследования

В качестве объекта исследования решаемой задачи служит криволинейный стержень с упругой линией  $AB$  (рис. 1), конец (точка  $B$ ) которой жестко крепится к основанию, а начало (точка  $A$ ) жестко связана с полюсом (точка  $C$ ).

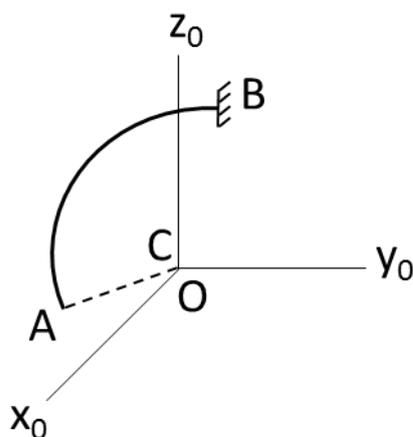


Рис. 1. Криволинейный стержень

### Построение математической модели

Для решения задачи установим ряд координатных систем:

- $O_{x_0, y_0, z_0}$  - жестко связанная с основанием базовая система координат, начало координат (точка  $O$ ) которой совпадает с полюсом (точка  $C$ ) недеформированного стержня;
- $O_T \xi_T \eta_T \zeta_T$  - жестко связанная с главными центральными осями плоских сечений стержня текущая система координат, где  $\xi_T$  - продольная ось, а  $\eta_T$  и  $\zeta_T$  - поперечные оси стержня.

В общем случае в полюсе действует система обобщенных сил  $Q$

$$Q \equiv [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6]^T \equiv [P_x \quad P_y \quad P_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z]^T, \quad (1)$$

где  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  и  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  – проекции на соответствующие оси базовой системы координат  $O_{x_0, y_0, z_0}$  действующих сил и моментов.

Измерению подлежит обобщенное перемещение полюса  $q$

$$q \equiv [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T \equiv [u_x \quad u_y \quad u_z \quad \vartheta_x \quad \vartheta_y \quad \vartheta_z]^T, \quad (2)$$

где  $u_x, u_y, u_z$  и  $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$  - проекции на соответствующие оси базовой системы координат  $Ox_0y_0z_0$  линейного и углового перемещений полюса.

В общем случае перемещение полюса можно представить в координатной форме

$$\begin{aligned} u_x &= \delta_{11}P_x + \delta_{12}P_y + \delta_{13}P_z + \delta_{14}M_x + \delta_{15}M_y + \delta_{16}M_z, \\ u_y &= \delta_{21}P_x + \delta_{22}P_y + \delta_{23}P_z + \delta_{24}M_x + \delta_{25}M_y + \delta_{26}M_z, \\ u_z &= \delta_{31}P_x + \delta_{32}P_y + \delta_{33}P_z + \delta_{34}M_x + \delta_{35}M_y + \delta_{36}M_z, \\ \vartheta_x &= \delta_{41}P_x + \delta_{42}P_y + \delta_{43}P_z + \delta_{44}M_x + \delta_{45}M_y + \delta_{46}M_z, \\ \vartheta_y &= \delta_{51}P_x + \delta_{52}P_y + \delta_{53}P_z + \delta_{54}M_x + \delta_{55}M_y + \delta_{56}M_z, \\ \vartheta_z &= \delta_{61}P_x + \delta_{62}P_y + \delta_{63}P_z + \delta_{64}M_x + \delta_{65}M_y + \delta_{66}M_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно выражениям (1) – (3) перемещение полюса можно представить в матричном виде

$$q = \Delta_{\{0\}} Q. \quad (4)$$

Здесь матрица податливости  $\Delta_{\{0\}}$ , определяемая в базовой системе координат  $Ox_0y_0z_0$ , имеет вид

$$\Delta_{\{0\}} = \left[ \delta_{ij} \right], \quad (i, j = \overline{1,6}). \quad (5)$$

При этом зависимость элементов  $\delta_{ij}$  матрицы податливости от величин обобщенных сил  $Q$  и перемещений  $q$  описывается следующей формулой:

$$\delta_{ij} = q_i / Q_j = 1; \quad Q_k = 0, \quad (\forall k = \overline{1,6}, k \neq j), \quad (i, j = \overline{1,6}). \quad (6)$$

Если в формуле (6) при вычислении перемещений  $q_i$  использовать интеграл Мора [3], то в результате можем записать

$$\delta_{ij} = \int_{(l)} \left( \frac{\bar{P}_i^\xi \bar{P}_j^\xi}{EF} + k_\eta \frac{\bar{P}_i^\eta \bar{P}_j^\eta}{GF} + k_\zeta \frac{\bar{P}_i^\zeta \bar{P}_j^\zeta}{GF} + \frac{\bar{M}_i^\xi \bar{M}_j^\xi}{GJ_{(сп)}^\xi} + \frac{\bar{M}_i^\eta \bar{M}_j^\eta}{EJ^\eta} + \frac{\bar{M}_i^\zeta \bar{M}_j^\zeta}{EJ^\zeta} \right) dl, \quad (i, j = \overline{1,6}) \quad (7)$$

Здесь обозначено:

$l$  - длина упругой линии стержня;  $E$  и  $G$  - модули упругости 1-го и 2-го рода материала стержня;  $k_\eta$  и  $k_\zeta$  - коэффициенты формы при сдвиге относительно поперечных осей стержня  $\eta_r$  и  $\zeta_r$ ;  $F$  - площадь текущего плоского сечения стержня;  $J_{(сп)}^\xi$  и  $J^\eta, J^\zeta$  - моменты инерции текущего плоского сечения при кручении и изгибе стержня;  $\bar{P}_i^\xi, \bar{P}_i^\eta, \bar{P}_i^\zeta, \bar{M}_i^\xi, \bar{M}_i^\eta, \bar{M}_i^\zeta, (i = \overline{1,6})$  - соответствующие внутренние усилия, возникающие от действия в полюсе  $S$  единичной нагрузки  $Q_i = 1$ .

### Исследование влияния различных характеристик стержня на его матрицу податливости

Проанализируем формулу (7), описывающую элементы матрицы податливости. Эта формула состоит из шести слагаемых, характеризующих различные виды деформирования стержня. Так первое слагаемое характеризует податливость стержня, вызванную его растяжением-сжатием, а второе и третье слагаемые – сдвигом. В свою очередь четвертое слагаемое, а также пятое и шестое описывают податливость стержня, обусловленную его кручением и изгибом.

Отметим также, что наличие в каждом из слагаемых формулы (7) произведения  $i$ -го и  $j$ -го единичных силовых факторов обуславливает выполнение следующих соотношений:

$$\delta_{ii} > 0, \quad \delta_{ij} = \delta_{ji}. \quad (8)$$

Таким образом, анализ выражений (3) – (6) и (8) позволяет заключить, что диагональные элементы матрицы податливости характеризуют податливость в направлении действующей силы и всегда являются положительными. В свою очередь недиагональные элементы описывают перекрестные связи между силами и перемещениями (причем нулевые значения недиагональных элементов свидетельствуют об отсутствии соответствующих перекрестных связей) и всегда являются такими, что делают матрицу податливости симметричной.

Проведем исследование влияния симметрии стержня на перекрестные связи действующих обобщенных сил и соответствующих перемещений полюса. Не снижая общности решаемой задачи, в качестве объекта исследования рассмотрим криволинейный стержень, состоящий из двух одинаковых частей AD и DB, симметрично располагающихся относительно базовой системы координат  $Ox_0y_0z_0$  (рис. 2). При этом начало координат точка  $O$  и полюс  $C$  помещаются в точку  $D$ , совпадающую с серединой недеформированного стержня.

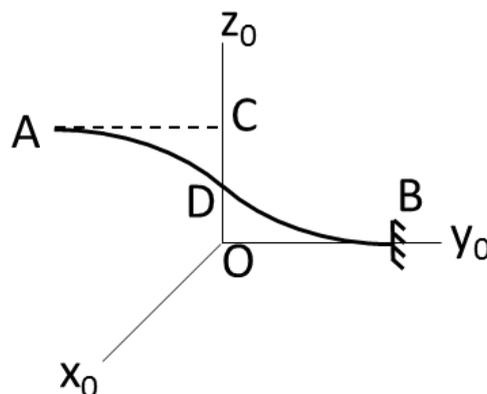


Рис. 2. Деформированный симметричный стержень

Тогда матрицы податливости  $\Delta_{\{0\}AB}^{(\dots)}$  и  $\Delta_{\{1\}AB}^{(\dots)}$  определяются следующим образом:

$$\Delta_{\{0\}AB}^{(\dots)} = \Delta_{\{0\}AD}^{(\dots)} + \Delta_{\{0\}DB}^{(\dots)}, \quad \Delta_{\{1\}AB}^{(\dots)} = \Delta_{\{1\}AD}^{(\dots)} + \Delta_{\{1\}DB}^{(\dots)}. \quad (9)$$

При этом запишем очевидные равенства

$$\Delta_{\{0\}AD}^{(\dots)} = \Delta_{\{0\}DA}^{(\dots)}, \quad \Delta_{\{0\}DA}^{(\dots)} = \Delta_{\{1\}DB}^{(\dots)}, \quad \Delta_{\{1\}AD}^{(\dots)} = \Delta_{\{1\}DA}^{(\dots)}, \quad \Delta_{\{1\}DA}^{(\dots)} = \Delta_{\{0\}DB}^{(\dots)}. \quad (10)$$

Подставляя равенства (10) в выражения (9) получим,

$$\Delta_{\{0\}AB}^{(\dots)} = \Delta_{\{1\}AB}^{(\dots)}. \quad (11)$$

Из формулы (11) следует, что если какие-либо оси базовых систем координат  $Ox_0y_0z_0$  и  $O_1x_1y_1z_1$  не совпадают по направлению, то соответствующие элементы  $\delta_{ij}$  матрицы податливости  $\Delta_{\{0\}AB}^{(\dots)}$  будут иметь нулевые значения.

Для примера, рассмотрим случай симметрии стержня относительно оси  $Ox_0$  (рис. 3).

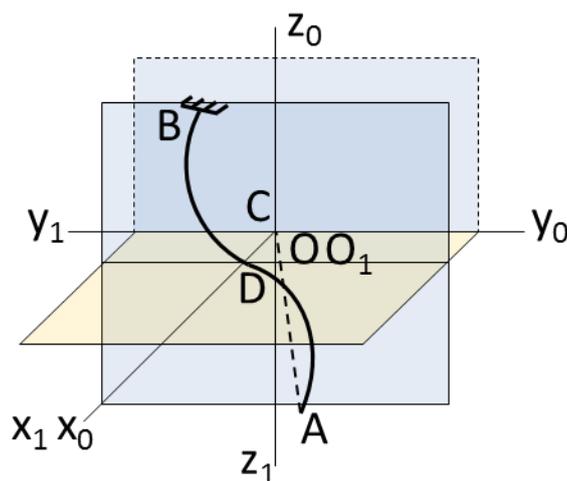


Рис. 3. Криволинейный стержень, симметричный относительно оси  $Ox_0$

В этом случае оси  $O_1y_1$  и  $O_1z_1$  координатной системы  $O_1x_1y_1z_1$  и соответствующие оси  $Oy_0$  и  $Oz_0$  базовой системы координат  $Ox_0y_0z_0$  имеют противоположное направление. Поэтому, при  $i=1,4$  и  $j=2,3,5,6$ , а также при  $i=2,3,5,6$  и  $j=1,4$  в соответствии с формулой (11) получаем  $\delta_{ij}=0$ .

Значит матрица податливости  $\Delta_{\{0\}AB}^{(Ox)}$  стержня, симметричного относительно оси  $Ox_0$  базовой системы координат  $Ox_0y_0z_0$ , будет иметь следующую структуру:

$$\Delta_{\{0\}AB}^{(Ox)} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 & \delta_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & \delta_{23} & 0 & \delta_{25} & \delta_{26} \\ 0 & \delta_{32} & \delta_{33} & 0 & \delta_{35} & \delta_{36} \\ \delta_{41} & 0 & 0 & \delta_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{52} & \delta_{53} & 0 & \delta_{55} & \delta_{56} \\ 0 & \delta_{62} & \delta_{63} & 0 & \delta_{65} & \delta_{66} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим теперь случай симметрии стержня относительно плоскости  $x_0Oy_0$  (рис. 4).

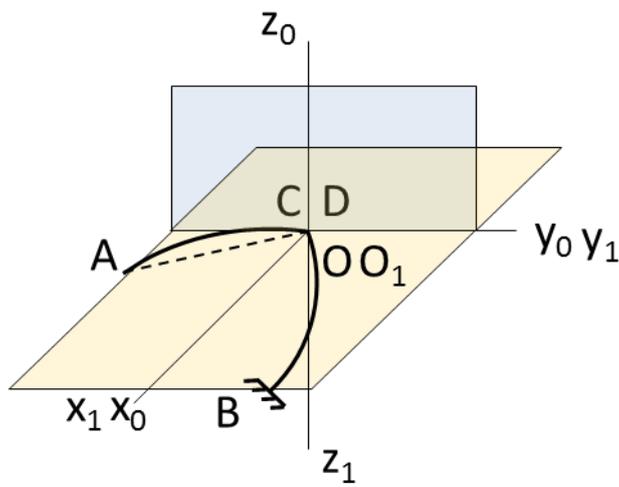


Рис. 4. Криволинейный стержень, симметричный относительно плоскости  $x_0Oy_0$

В этом случае ось  $O_1z_1$  левой координатной системы  $O_1x_1y_1z_1$  и ось  $Oz_0$  правой системы координат  $Ox_0y_0z_0$  имеют противоположное направление. Тогда согласно формуле (11) получаем  $\delta_{ij} = 0$  при  $i = 1, 2, 6$  и  $j = 3, 4, 5$ , а также при  $i = 3, 4, 5$  и  $j = 1, 2, 6$ .

Следовательно, структура матрицы податливости  $\Delta_{\{0\}AB}^{(xOy)}$  стержня, симметричного относительно плоскости  $x_0Oy_0$  базовой системы координат  $Ox_0y_0z_0$ , будет иметь вид

$$\Delta_{\{0\}AB}^{(xOy)} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & 0 & 0 & 0 & \delta_{16} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0 & 0 & 0 & \delta_{26} \\ 0 & 0 & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{53} & \delta_{54} & \delta_{55} & 0 \\ \delta_{61} & \delta_{62} & 0 & 0 & 0 & \delta_{66} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Наконец рассмотрим случай симметрии стержня относительно точки  $O$  (рис. 5).

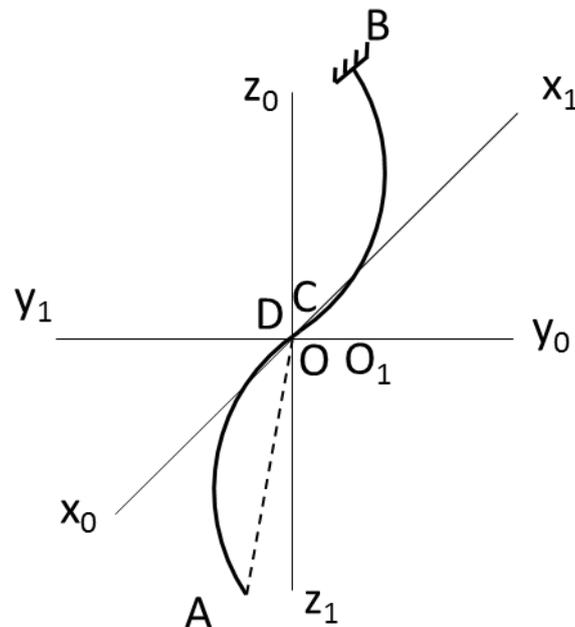


Рис. 5. Криволинейный стержень, симметричный относительно точки  $O$

В этом случае оси  $O_1x_1$ ,  $O_1y_1$  и  $O_1z_1$  левой координатной системы  $O_1x_1y_1z_1$  и соответствующие оси  $Ox_0$ ,  $Oy_0$  и  $Oz_0$  правой системы координат  $Ox_0y_0z_0$  имеют противоположное направление. Следовательно, согласно формуле (11), при  $i=1,2,3$  и  $j=4,5,6$ , а также при  $i=4,5,6$  и  $j=1,2,3$  получаем  $\delta_{ij} = 0$ .

Значит матрица податливости  $\Delta_{\{0\}AB}^{(O)}$  стержня, симметричного относительно точки  $O$  базовой системы координат  $Ox_0y_0z_0$ , будет обладать следующей структурой:

$$\Delta_{\{0\}AB}^{(O)} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{54} & \delta_{55} & \delta_{56} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{64} & \delta_{65} & \delta_{66} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Отметим, что если форма стержня объединяет в себе несколько симметрий, то в этом случае исключаемые перекрестные связи объединяются. Например, рассмотрим случай одновременной симметрии стержня относительно точки  $O$  и плоскости  $x_0Oy_0$  (рис. 6).

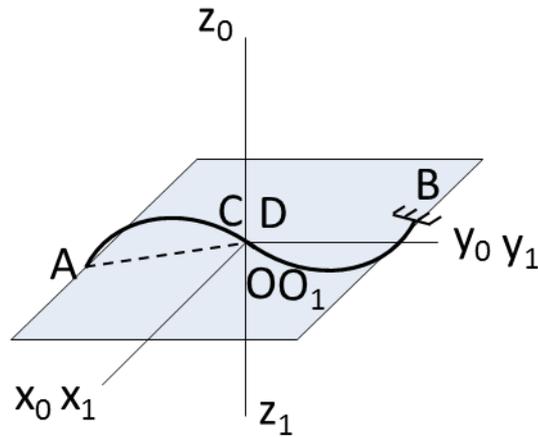


Рис. 6. Стержень, симметричный относительно точки  $O$  и плоскости  $x_0 O y_0$

Согласно формулам (12) и (13) матрица податливости  $\Delta_{\{0\}AB}^{(O \cup x O y)}$  стержня, симметричного относительно точки  $O$  и плоскости  $x_0 O y_0$  базовой системы координат  $O x_0 y_0 z_0$ , будет иметь следующую структуру:

$$\Delta_{\{0\}AB}^{(O \cup x O y)} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{44} & \delta_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{54} & \delta_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{66} \end{bmatrix}.$$

В случае полной симметрии (рис. 7), когда форма стержня обеспечивает все ее виды, матрица податливости стержня  $\Delta_{\{0\}AB}^{(S)}$ , в базовой системе координат  $O x_0 y_0 z_0$ , будет иметь диагональный вид

$$\Delta_{\{0\}AB}^{(S)} = \text{diag}(\delta_{11} \quad \delta_{22} \quad \delta_{33} \quad \delta_{44} \quad \delta_{55} \quad \delta_{66}).$$

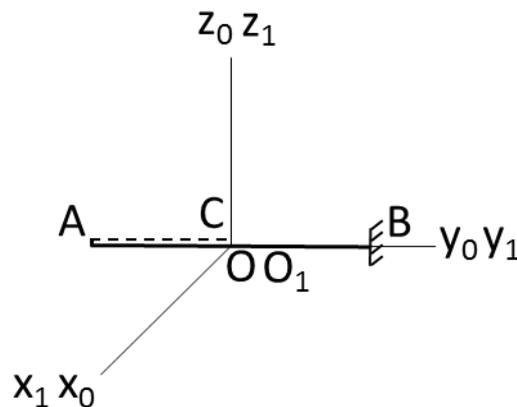


Рис. 7. Полностью симметричный стержень

**Выводы**

Проведенные исследования показывают, что степень влияния различных характеристик стержня на величину его податливости будет существенным образом зависеть от вида деформирования, претерпеваемого стержнем.

Выполненный анализ структур матриц податливости демонстрирует принципиальную возможность исключения в упругих подвесах вредных перекрестных связей посредством использования симметричных криволинейных стержней.

Применение структурного анализа стержней дает возможность разработчику осмысленно строить стержневые конструкции упругих подвесов с высокими качественными характеристиками.

**Список использованной литературы**

1. *Балабанов И. В.* Расчет и оптимизация двухрамочного динамически настраиваемого гироскопа / И. В. Балабанов, Т. В. Балабанова, А. В. Збруцкий // К.: НТУУ «КПИ», 2013.-272 с.
2. *Образцов И. Ф.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов // М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
3. *Феодосьев В. И.* Соппротивление материалов / В. И. Феодосьев/ М., Наука, 1979. - 560 с.