Сінченко Олена Сергіївна
бакалавр математичного факультету,
Качан Анна Іванівна
бакалавр математичного факультету,
Запорізький національний університет,
м. Запоріжжя, Україна

АПРОКСИМАЦІЯ ПАДЕ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

В даній роботі розглянути основи апроксимації Паде на типових прикладах для аналітичних функцій, за допомогою прикладної програми та дослідили побудову графіка та похибки обчислення.

Апроксимація дозволяє досліджувати числові характеристики та якісні властивості об'єкта, зводячи задачу до вивчення більш простих об'єктів. Метод Паде є раціональним методом апроксимації аналітичних функцій та розв'язку багатьох задач математичного аналізу [2, с. 34]. Він полягає в поданні функції у вигляді відношення двох поліномів, коефіцієнти яких визначаються коефіцієнтами розкладання функції в степеневий ряд Тейлора [1, с. 4], $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. А отже апроксимація Паде — це раціональна функція вигляду:

$$[L/M] = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_M z^M} \qquad (1)$$

розклад якого в ряд Тейлора (з центром у нулі) співпадає з розкладом $f(z)$.

Апроксимацію аналітичної функції можна реалізувати за допомогою пакету прикладних програм Maple7 за рахунок вбудованої функції pade: pade(f. x=a, [m.n]), pade(f., x, [m.n]), де f — аналітична функція, x — змінна, відносно якої задається апроксимуюча функція, a — координата точки, відносно якої виконується апроксимація, m, n — максимальні показники степенів поліномів чисельника та знаменника.

Розглянемо приклад побудови $f(x)$=sin(x). Техніку апроксимації Паде пояснює рисунок 1.

На рис. 1 представлена апроксимація синусоїдної функції, а також побудовані графіки функції і апроксимуючої функції, що апроксимує задану. Також дан графік абсолютної похибки для цієї апроксимації. Помітно, що в інтервалі [–5, 5] похибка різко зростає на кінцях інтервалу апроксимації.

Важливою перевагою Паде-апроксимації є можливість досить точного наближення розривних функцій. Це пов'язано з тим, що нулі знаменника у апроксимуючих виразів здатні наближати розриви функцій до найменшого значення. Розглянемо приклад розривної функції $f(x)$=tg$x$ в інтервалі від –4,5 до 4,5, що включає два розриви функції.

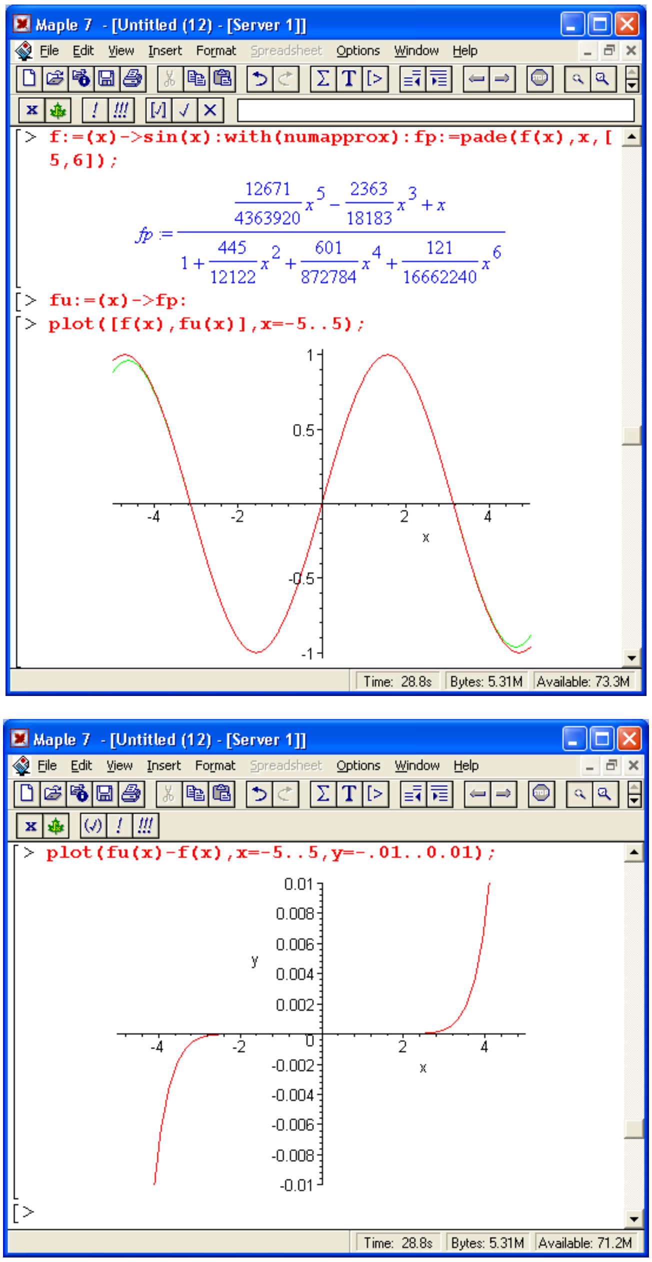

Рис. 1. Апроксимація Паде для синусоїдальної функції

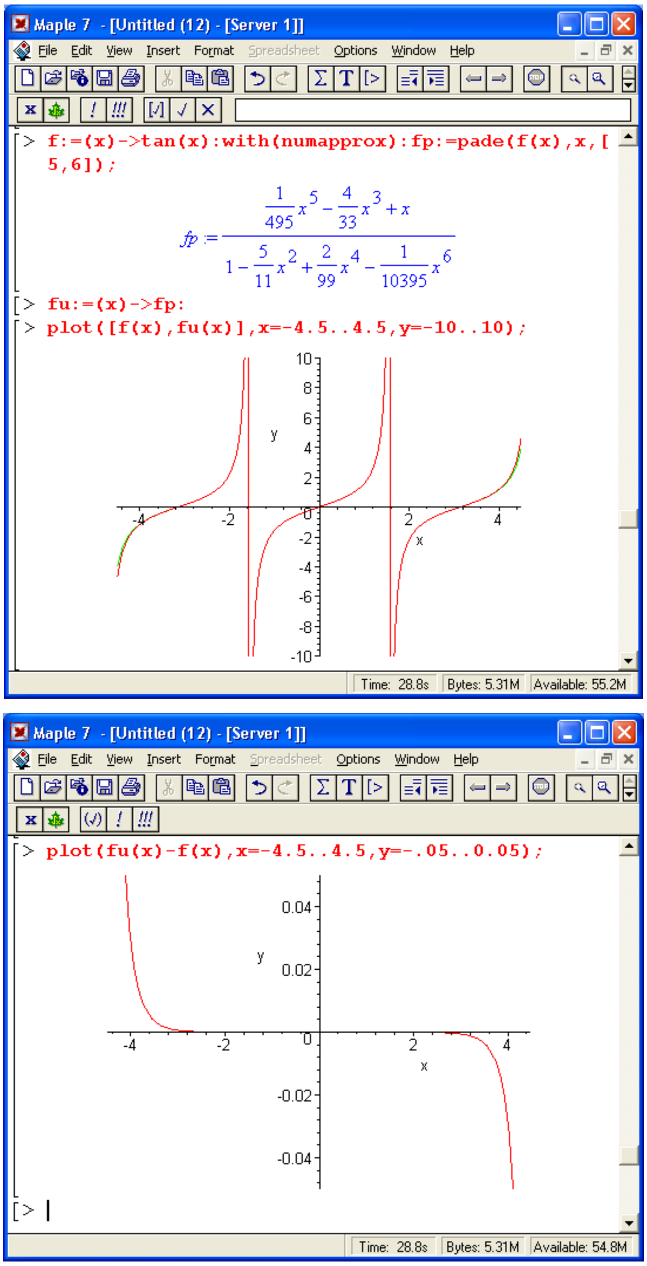

Рис. 2. Апроксимація Паде для розривної функції $f(x)=-\mathrm{tg}x$

Як видно із рисунку 2, розбіжність між функцією тангенса і її апроксимуючої функцією ледь помітно лише на краях інтервалу апроксимації. Обидва розриву прекрасно наближаються апроксимуючої функцією. Такий характер апроксимації підтверджується і графіком похибки, яка лише на кінцях інтервалу апроксимації [–4,0, 4,0] досягає значень 0,01 (близько 1%).

Важливо звернути увагу, що неточність результатів апроксимації Паде є дуже великою, тому точність підрахунків можна покращити лише за рахунок як можна точнішого підрахуванню коефіцієнтів.

Отже не важко помітити, що аналіз функції за допомогою пакету прикладних програм можливо зробити досить швидко не застосовуючи аналітичних розрахунків

Література

1. Бейкер Дж. Аппроксимации Паде [Текст] / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. — М.: Мир, 1986. — 502 с.

2. Вишневский В. Э. Аппроксимация Паде решения задачи Коши [Текст] / В. Э. Вишневский, А. В. Зубов, О. А. Иванова // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. — 2012. — № 4. — С. 17.