УДК 528.72

Смірнов Євгеній Іванович
кандидат технічних наук,
доцент кафедри геодезії і геоінформатики
Львівський національний аграрний університет
Смирнов Евгений Иванович
кандидат технических наук,
доцент кафедры геодезии и геоинформатики
Львовский национальный аграрный университет
Smirnov Yevheniy
Candidate of Technical Sciences,
Assistant Professor of Geodesy and Geoinformatics
Lviv National Agrarian University

Рій Іван Федорович
кандидат економічних наук,
старший викладач кафедри геодезії і геоінформатики
Львівський національний аграрний університет
Рий Иван Федорович
кандидат экономических наук,
старший преподаватель кафедры геодезии и геоинформатики
Львовский национальный аграрный университет
Riy Ivan
Candidate of Economic Sciences,
Senior Lecturer of the Department of Geodesy and Geoinformatics
Lviv National Agrarian University

Бочко Олександр Іванович
кандидат економічних наук, доцент,
доцент кафедри геодезії і геоінформатики
Львівський національний аграрний університет
Бочко Александр Иванович
кандидат экономических наук, доцент,
доцент кафедры геодезии и геоинформатики
Львовский национальный аграрный университет
Bochko Oleksandr
Candidate of Economic Sciences, Associate Professor,
Assistant Professor of Geodesy and Geoinformatics
Lviv National Agrarian University

ВИЗНАЧЕННЯ МАСШТАБНОГО МНОЖНИКА В ФОТОГРАММЕТРІЇ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАСШТАБНОГО МНОЖИТЕЛЯ В ФОТОГРАММЕТРИИ

DETERMINATION OF A SCALE FACTOR IN PHOTOGRAMMETRY

Анотація. *Робота виконана з метою поліпшення визначення просторових координат точок знімків.*

Виконано аналіз формул знаходження просторових координат точок знімків, які отримані з дією поправок у масштабний коефіцієнт, який фіксує таке взаємне орієнтування базису проектування пари знімків, яке існувало під час фотографування і не залежить від похибок визначення масштабного коефіцієнту. Зроблено висновок, що формули визначення *масштабного коефіцієнту недостатньо точні. Це пояснюється тим, що віддаль між центрами фотографування визначені в площині. Тобто віддаль між точками, які характеризують центри знімання, проектується на одну з площин (X, Y або Z). Запропоновані оригінальні формули, які визначають віддаль між центрами фотографування в просторі, а не на проекції на площини.*

Ключові слова: *точність, елементи взаємне орієнтування.*

Аннотация. *Работа выполнена с целью улучшения пространственных координат точек снимков.*

Выполнен анализ формул нахождения пространственных координат точек снимков, которые получены с учетом действий поправок в масштабный коэффициент, который фиксирует такое взаимное ориентирование базиса проектирования пары снимков, что существовало во время фотографирования и не зависит от погрешностей определения масштабного коэффициента. Сделан вывод, что формулы определения масштабного коэффициента недостаточно точные. Это объясняется тем, что расстояние между центрами фотографирования определены в плоскости. То есть расстояние между точками, которые характеризуют центры съемки, проецируется на одну из площадей (X, Y или Z). Предложены оригинальные формулы, определяющие расстояние между центрами фотографирования в пространстве, а не на проекции на плоскости.

Ключевые слова: *точность, элементы взаимное ориентирование.*

Summary. *The work aims to improve determination of space coordinates of image points.*

The research presents analysis of the formulas, used to determine space coordinates of image points, which are obtained with corrections in a space ratio, fixing such mutual orientation of the basis of image pair projecting, which exists during surveying and does not depend on deviations in determination of a scale ratio. The authors make conclusions that formulas for determination of a space ratio are not precise. It can be explained by the fact, that distance between the centers of surveying are defined in plane, i.e. distance between the points, which characterize centers of surveying, is projected on one of the plane (X, Y or Z). The work proposes original formulas, which determine distance between the centers of surveying in space, but not on projections on planes.

Key words: *accuracy, elements of mutual orientation.*

Постановка проблеми. В багатьох літературних джерелах [2–5] значення масштабного множника подається наступним чином:

$$N=\frac{B_Y Z_R-B_Z Y_R}{Y_L Z_R-Z_L Y_R}=\frac{B_Z X_R-B_X Z_R}{Z_L X_R-X_L Z_R}=\frac{B_X Y_R-B_Y X_R}{X_L Y_R-Y_L X_R} \quad (1)$$

де B_X, B_Y, B_Z — базисні складові;

X_L, Y_L, Z_L — координати точки на лівому знімку;

X_R, Y_R, Z_R — координати точки на правому знімку.

Ці формули наближені. Тому що визначають масштабний коефіцієнт тільки в двох площинах. Точніше значення масштабного коефіцієнту буде знайдено у трьох мірному просторі.

Постановка завдання. Знайдемо масштабний коефіцієнт у трьохмірному просторі.

Виклад основного матеріалу. Визначення просторових координат точок місцевості знаходять за допомогою двох знімків (рис. 1).

На цьому рисунку

$\mathbf{R}_{S1}$, $\mathbf{R}_{S2}$ — вектори, що характеризують розташування центрів проектування в геодезичній системі координат;

$\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ — вектори, що характеризують розташування точки *A* в фотограмметричних системах першого і другого знімків;

$\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ — вектори, що характеризують розташування точок a_1 та a_2 відповідно на лівому та правому знімках.

Положення точки *A* описують рівняння

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_{S1}+\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}_{S2}+\boldsymbol{R}_2\,. \quad (2)$$

Вектори $\boldsymbol{r}_1$ та $\boldsymbol{R}_1$ і $\boldsymbol{r}_2$ та $\boldsymbol{R}_2$ попарно колінеарні [2, с. 78]. Тому справедливі рівності $\mathbf{R}_1=N\mathbf{r}_1$ та $\mathbf{R}_2=N\mathbf{r}_2$, де *N* — масштабний коефіцієнт.

Відомо, що для двох векторів векторний добуток — це вектор, довжина якого складає [2, с. 45]:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|a|\cdot|b|\sin\varphi\,, \quad (3)$$

де φ — кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Для колінеарних векторів кут $\varphi=0$, тобто $\sin\varphi=0$.

Таким чином, можна записати $\mathbf{R}_2\times\mathbf{r}_2=0$.

Зробимо заміну $\mathbf{R}_2=\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_\mathbf{B}$, тоді отримуємо $(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_\mathbf{B})\times\mathbf{r}_2=0$.

Далі, враховуючи властивості колінеарних векторів, маємо

$$(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_B)\times\boldsymbol{r}_2=(N_1\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{R}_B)\times\boldsymbol{r}_2= \\ =N_1(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)-(\boldsymbol{R}_B\times\boldsymbol{r}_2)=\mathbf{0}$$

Звідси можна записати

$$N_1=\frac{\mathbf{R}_\mathbf{B}\times\mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2}\,. \quad (4)$$

Векторний добуток у декартовій системі має вигляд

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \quad (5)$$

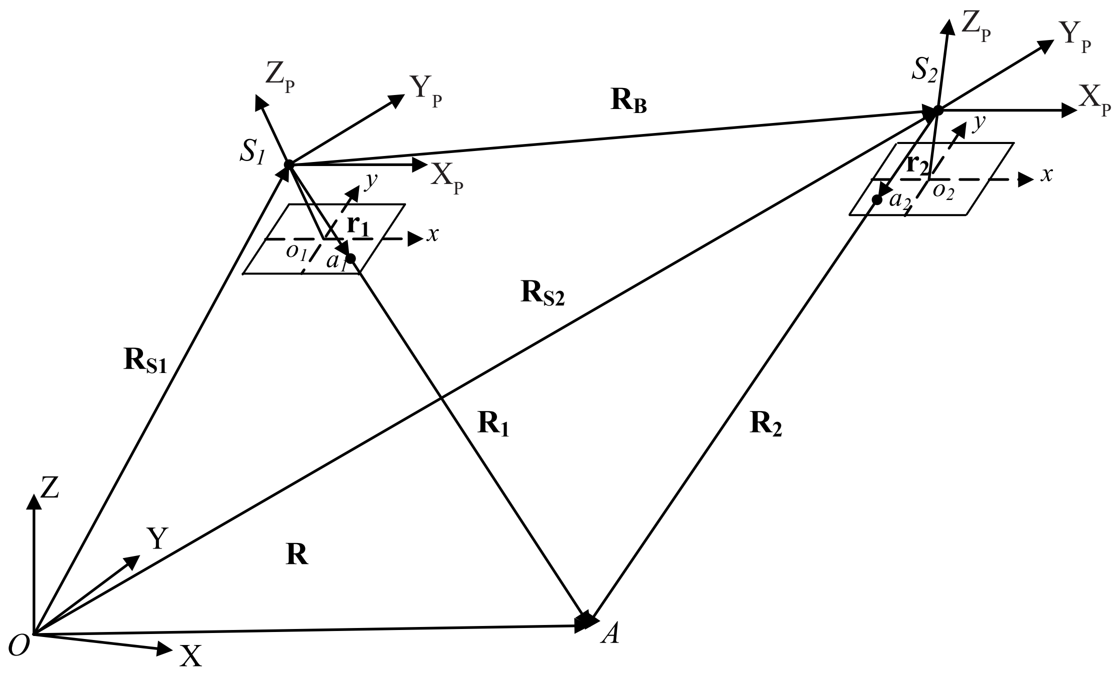

Рис. 1. Просторова фотограмметрична засічка (векторна форма запису)

Враховуючи наведене, остаточно отримуємо:

$$N_1 = \frac{\mathbf{R_B} \times \mathbf{r_2}}{\mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ B_X & B_Y & B_Z \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}} = \tag{6}$$

$$= \frac{B_Y Z_2 - B_Z Y_2 + B_Z X_2 - B_X Z_2 + B_X Y_2 - B_Y X_2}{Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 + Z_1 X_2 - X_1 Z_2 + X_1 Y_2 - Y_1 X_2} =$$

$$= \frac{B_X (Y_2 - Z_2) + B_Y (Z_2 - X_2) + B_Z (X_2 - Y_2)}{X_1 (Y_2 - Z_2) + Y_1 (Z_2 - X_2) + Z_1 (X_2 - Y_2)}.$$

Загальна формула визначення просторових координат точок місцевості за виміряними координатами їх зображень на знімках має вигляд:

$$X = X_{S1} + N_1 X_1,$$
$$Y = Y_{S1} + N_1 Y_1, \tag{7}$$
$$Z = Z_{S1} + N_1 Z_1.$$

Визначення просторових координат точок називається прямою фотограмметричною задачею.

Значення масштабного коефіцієнта N_1 можна знайти, проектуючи відношення векторних добутків на площини, що утворюються відповідними осями, тобто формули які прийняті в головних джерелах. Проектуючи це відношення на площину OXY $B_Z = 0, Z_1 = Z_2 = 0$, маємо:

$$N_1 \approx \frac{B_X Y_2 - B_Y X_2}{X_1 Y_2 - Y_1 X_2}. \tag{8}$$

Аналогічно отримуємо відповідні формули, проектуючи ці відношення на площини OXZ та OYZ

$$N_1 \approx \frac{B_Z X_2 - B_X Z_2}{Z_1 X_2 - X_1 Z_2} \approx \frac{B_Y Z_2 - B_Z Y_2}{Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2}. \tag{9}$$

Під час фотографування місцевості, промені проходять від точки місцевості через об'єктив до світлочутливого елементу [1, с. 105]. Таким чином, при відтворенні положення знімків, що існував під час знімання, необхідною умовою слід вважати перетин S_1M і S_2M (рис. 2 або рис. 3), тобто належність векторів S_1M, S_2M та S_1S_2 одній площині.

Паралельність трьох векторів, а тим більше їх належність одній площині називають умовою компланарності [1, с. 36]. Мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю.

$$(\mathbf{R}_{\mathbf{S}_1} - \mathbf{R}_{\mathbf{S}_2}) \times (\mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2}) = 0 \tag{10}$$

де $(\mathbf{R}_{\mathbf{S}_1} - \mathbf{R}_{\mathbf{S}_2}) = \mathbf{R}_B$ — базисний вектор, тобто вектор, що показує місце розташування правого центру проектування відносно лівого;

$\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}$ — вектори, що характеризують положення точок на лівому та правому знімків відносно їх центрів.

Враховуючи, що векторний добуток у координатній формі записується як детермінант, отримуємо

$$\Phi = \begin{vmatrix} X_{S_2} - X_{S_1} & Y_{S_2} - Y_{S_1} & Z_{S_2} - Z_{S_1} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

де $X_{S_i}, Y_{S_i}, Z_{S_i}$ — координати центрів проекції відповідно лівого та правого знімків; X_i, Y_i, Z_i — просторові координати точок на лівому та правому знімках.

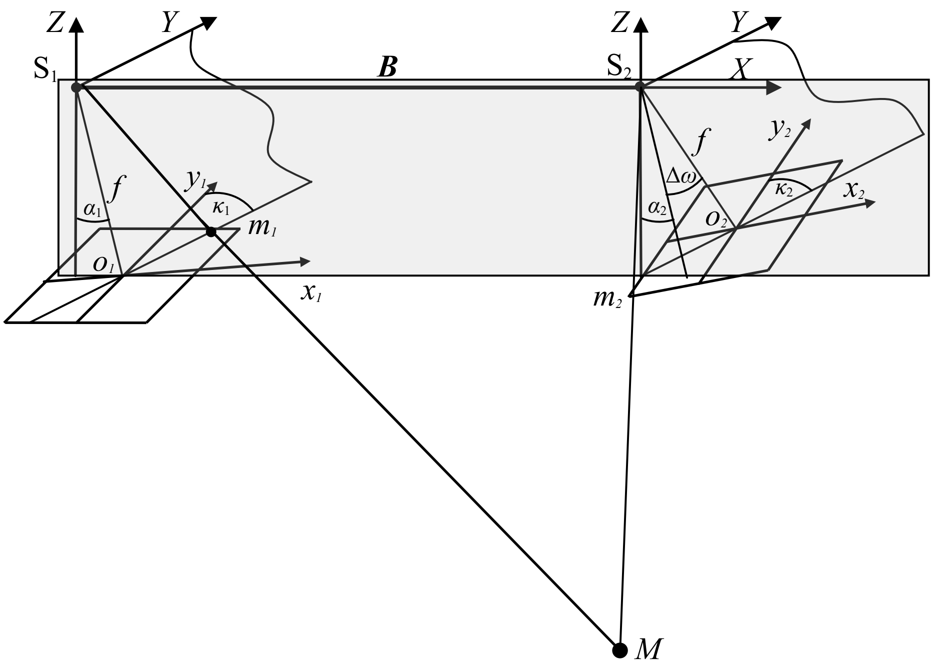

Рис. 2. Базисна система координат

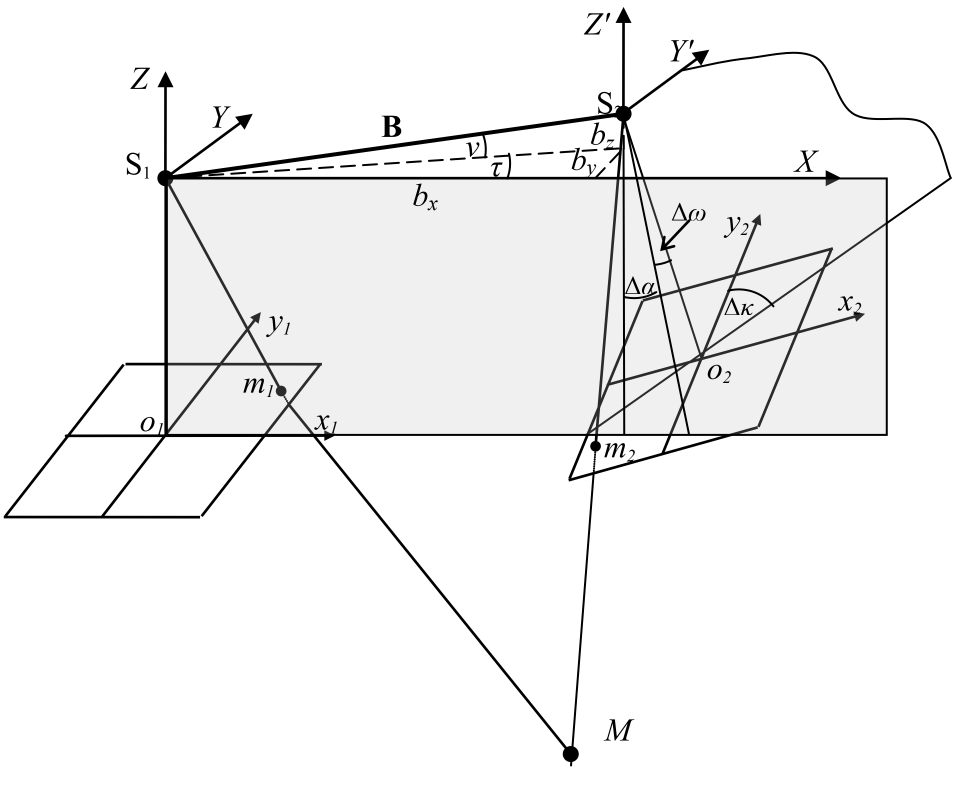

Рис. 3. Лінійно-кутова система координат

Для базисної системи координат це рівняння набуде вигляду [3, с. 41]:

$$\Phi_B = \begin{vmatrix} B & 0 & 0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= BY_1Z_2 - BY_2Z_1 = Y_1Z_2 - Y_2Z_1 = 0 \qquad (12)$$

Або, переходячи до плоских координат точок знімків, отримуємо:

$$\Phi_B = Y_1Z_2 - Z_1Y_2 =$$

$$= \left(x_1 \sin\kappa_1 + y_1 \cos\kappa_1\right)\times$$

$$\times(x_2\left(\sin\alpha_2 \cos\kappa_2 + \cos\alpha_2 \sin\Delta\omega \sin\kappa_2\right)+$$

$$
\begin{gathered}
+y_2\left(-\sin\alpha_2\sin\kappa_2+\cos\alpha_2\sin\Delta\omega\cos\kappa_2\right)- \\
-f\cos\alpha_2\cos\Delta\omega)- \qquad (13) \\
-\left(x_1\sin\alpha_1\cos\kappa_1-y_1\sin\alpha_1\sin\kappa_1-f\cos\alpha_1\right)\times \\
\times\left(f\sin\Delta\omega-\left(x_2\sin\kappa_2+y_2\cos\kappa_2\right)\cos\Delta\omega\right)=0.
\end{gathered}
$$

Тут $\alpha_з$ $b_з$ $c_з$ є функції від кутових елементів внутрішнього орієнтування [5, с. 94].

Враховуючи елементи тільки першого порядку малості, можна записати:

$$
\begin{gathered}
\Phi_B=Y_1Z_2-Z_1Y_2=\left(x_1\kappa_1+y_1\right)\left(x_2\alpha_2+y_2\Delta\omega-f\right)- \\
-\left(x_1\alpha_1-f\right)\left(x_2\kappa_2+y_2+f\Delta\omega\right)= \\
=-x_1f\kappa_1+y_1x_2\alpha_2+y_1y_2\Delta\omega-y_1f-x_1y_2\alpha_1+ \\
+x_2f\kappa_2+y_2f+f^2\Delta\omega
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
f\left(y_2-y_1+\frac{y_1x_2}{f}\alpha_2-\frac{x_1y_2}{f}\alpha_1+\right. \\
\left.+\left(f+\frac{y_1y_2}{f}\right)\Delta\omega-x_1\kappa_1+x_2\kappa_2\right)=0. \qquad (14)
\end{gathered}
$$

Звідси, враховуючи, що $f\neq 0$, отримуємо:

$$
\begin{gathered}
\Phi_B=\frac{x_1y_2}{f}\alpha_1-\frac{x_2y_1}{f}\alpha_2-\left(f+\frac{y_1y_2}{f}\right)\Delta\omega+ \qquad (15) \\
+x_1\kappa_1-x_2\kappa_2=y_2-y_1=0.
\end{gathered}
$$

Для трансформованих знімків, тобто знімків, для яких $\alpha=\omega=\kappa=0$, ця умова набуде вигляду

$$
\Phi_B=-y_1f+y_2f=y_2-y_1=q=0. \qquad (16)
$$

Отже можна зробити висновок, що необхідною і достатньою умовою взаємного орієнтування знімків в базисній системі є відсутність вертикального паралаксу.

Тепер знайдемо середню квадратичну помилку функції (15). Для цього необхідно взяти похідні по величинах Φ_B

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\Phi_B}{\partial\alpha_1}=\frac{x_1y_2}{f} \\
\frac{\partial\Phi_B}{\partial\alpha_2}=\frac{x_2y_1}{f}; \\
\frac{\partial\Phi_B}{\partial\Delta\omega}=f+\frac{y_1y_2}{f}; \qquad (17) \\
\frac{\partial\Phi_B}{\partial k_1}=x_1; \\
\frac{\partial\Phi_B}{\partial k_2}=x_2.
\end{gathered}
$$

Після чого перейдемо до середніх квадратичних похибок, і отримуємо наступний вираз

$$
m_B=
$$

$$
=\sqrt{\left(\frac{x_1y_2}{f}m_{\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{x_2y_1}{f}m_{\alpha_2}\right)^2+\left(f+\frac{y_1y_2}{f}\right)^2+m_{\Delta\omega}^2+x_1^2m_{k1}^2+x_2^2m_{k2}^2} \qquad (18)
$$

Далі введемо позначення

$$
x_1=l\,,\ x_2=x_1-p=l-\left(1-P_X\right)2l=0{,}2l\,,
$$

$$
y_1=y_2=l
$$

де l — величина, яка характеризує половину розміру знімку.

P_X — поздовжнє перекриття знімків у долях одиниці, у нашому випадку $P_X=0{,}6$.

Підставляючи ці значення в (17) отримуємо

$$
m_B=
$$

$$
=\sqrt{\left(\frac{l^2}{f}m_{\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{0{,}2l^2}{f}m_{\alpha_2}\right)^2+\left(f+\frac{l^2}{f}\right)^2+m_{\Delta\omega}^2+l^2m_{k1}^2+0{,}4l^2m_{k2}^2}. \qquad (19)
$$

Далі будемо вважати, що середні квадратичні помилки всіх елементів взаємного орієнтування рівні між собою і після нескладних перетворень остаточно будемо мати наступний вираз

$$
m_B=m_\gamma^2\sqrt{\left(l^2\left(\frac{1{,}2l^2}{f^2}+2\right)+\left(f+\frac{l^2}{f}\right)^2\right)}. \qquad (20)
$$

Розглянемо лінійно-кутову систему. Для лінійно-кутової системи маємо [3, с. 41].

$$
\Phi_L=\begin{vmatrix} 1 & tg\tau & \dfrac{tg\nu}{\cos\tau} \\ x_1 & y_1 & -f \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=
$$

$$
\begin{gathered}
=y_1Z_2+x_1Y_2\frac{tg\nu}{\cos\tau}-fX_2tg\tau- \\
-y_1X_2\frac{tg\nu}{\cos\tau}-x_1Z_2tg\tau+fY_2= \\
=y_1Z_2+fY_2-\left(fX_2+x_1Z_2\right)tg\tau+ \qquad (21) \\
+\left(x_1Y_2-y_1X_2\right)\frac{tg\nu}{\cos\tau}=0.
\end{gathered}
$$

За малих значень кутових елементів вираз (16) матиме вигляд

$$
\begin{gathered}
\Phi_L=y_1\left(-x_2\Delta\alpha-y_2\Delta\omega-f\right)+f\left(-x_2\Delta\kappa+y_2-f\Delta\omega\right)+ \\
+x_2f\tau-x_1f\tau+x_1y_2\nu-x_2y_1\nu= \\
=-x_2y_1\Delta\alpha-y_1y_2\Delta\omega-y_1f-x_2f\Delta\kappa+y_2f- \\
-f^2\Delta\omega+x_2f\tau-x_1f\tau+x_1y_2\nu-x_2y_1\nu=
\end{gathered}
$$

$$=-f\left(\frac{x_2y_1}{f}\Delta\alpha+\left(f+\frac{y_1y_2}{f}\right)\Delta\omega+x_2\Delta\kappa+(x_2-x_1)\tau+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{f}\nu\right)=$$

$$=\frac{x_2y_1}{f}\Delta\alpha+\left(f+\frac{y_1y_2}{f}\right)\Delta\omega+x_2\Delta\kappa+$$

$$+p\tau+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{f}\nu=0. \quad (22)$$

Якщо $\Delta\alpha=\Delta\omega=\Delta\kappa=0$, і враховуючи, що за цієї умови $y_1=y_2=y$, маємо

$$\Phi_L=p\tau-p\frac{y}{f}\nu=\tau-\frac{y}{f}\nu=0. \quad (23)$$

Звідси зробимо висновок, що необхідною і достатньою умовою взаємного орієнтування знімків в лінійно кутовій системі є різниця між кутом розвороту базиса аерофотознімання і добутком ординати точки знімку з кутом нахилу цього базису поділена на фокусну віддаль камери знімання.

Тепер знайдемо середні квадратичні похибки отримання масштабного коефіцієнта для цього знову знайдемо похідні від кутових елементів взаємного орієнтування.

$$m_{N_2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x_1y_1}{f}m_{\Delta x}\right)^2+\left(f+\frac{y_1y_2}{f}\right)^2+m_{\Delta\omega}^2+x_2^2m_{\Delta k_2}^2+p^2\tau^2+\left(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{f}\right)^2}. (24)$$

Знову приймемо рівними кутові елементи взаємного орієнтування і отримуємо

$$m_{N_2}=$$

$$=\sqrt{\left(\left(\frac{x_1y_1}{f}\right)^2+\left(f+\frac{y_1y_2}{f}\right)^2+x_2^2\right)+m_\gamma^2+p^2m_\tau^2+\left(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{f}\right)^2m_\nu^2}. (25)$$

Далі знову замінімо координати точок на розміри знімків і остаточно, після нескладних операцій, отримуємо

$$m_{N_2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1{,}44l^4}{f^2}+\left(f+\frac{l^2}{f}\right)^2+1{,}44l^2\right)+m_\gamma^2+0{,}64m_\tau^2+\left(\frac{0{,}4l^4}{f^2}\right)^2m_\nu^2}. (26)$$

Висновки. В цій статті запропоновані строгі формули масштабного коефіцієнту. Тобто коефіцієнту, який отриманий в просторі за трьома координатами (X; Y; Z) В той час використовують формули які визначають масштабний коефіцієнт отримані за наближеними формулами, що визначаються на площинах з двома координатами (X, Y; X, Z; Y, Z). Такий підхід збільшує точність визначення координат і визначення масштабного коефіцієнта і всі подальші побудови по визначенню координат точок об'єкту.

$$N_1\approx\frac{B_XY_2-B_YX_2}{X_1Y_2-Y_1X_2}\approx\frac{B_ZX_2-B_XZ_2}{Z_1X_2-X_1Z_2}\approx\frac{B_YZ_2-B_ZY_2}{Y_1Z_2-Z_1Y_2}.$$

Література

1. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев // М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 544 с.
2. Дорожинський О. Л. Основи фотограмметрії: Підручник. / О. Л. Дорожинський // Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка». — 2003. — 214 с.
3. Лобанов А. Н. Аналитическая фотограмметрия / А. Н. Лобанов // М.: Недра, 1972. — 224 с.
4. Лобанов А. Н. Автоматизация фотограмметрических процессов / А. Н. Лобанов, И. Г. Журкин // М.: Недра, 1980. — 240 с.
5. Vaisnauskas V. Fotogrametrija. / V. Vaisnauskas // Vilnus: Morslas, 1997. — 216 p.
6. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://studfiles.net/preview/5376626/
7. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://vdocuments.mx/-568bf4b41a28ab89339f007b.html