ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 372.851.4

Абдуллаева Гонча Зульфигаровна
доцент кафедры «Математика и методика ее преподавания»
Бакинский государственный университет
Abdullaeva Goncha
Associate Professor of the Department of
«Mathematics and Methods of Teaching»
Baku State University

DOI: 10.25313/2520-2057-2019-1-4609

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ИСКУССТВЕННЫМИ СПОСОБАМИ

NON-STANDARD METHODS FOR SOLVING EQUATIONS BY ARTIFICIAL MEANS

Аннотация. *В данной работе, помимо нестандартных методов решений уравнений с использованием свойств функции (монотонности, ограниченности, периодичности, четности и нечетности, а также ОДЗ функции) существуют и другие дополнительные искусственные методы решения уравнений:*
- *умножение уравнения на функцию;*
- *угадывание корня уравнения;*
- *использование симметричности уравнения;*
- *исследование уравнения на промежутках действительной оси.*

Ключевые слова: *метод, уравнение, симметричность, корень и т.д.*

Summary. *In this paper, in addition to non-standard methods for solving equations using the properties of a function (monotonicity, boundedness, periodicity, evenness and oddness, as well as the LDU function), there are other additional artificial methods for solving equations:*
- *multiplication of an equation by a function;*
- *guessing the root of the equation;*
- *use of symmetry of the equation;*
- *research of the equation on intervals of the real axis.*

Key words: *method, function, thinking, innovation, etc.*

Постановка проблемы. Некоторые уравнения в результате преобразований могут быть сведены к стандартному виду, для которых существует определенный алгоритм решения.

Для решения этой проблемы используются дополнительные искусственные способы решений уравнений.

Актуальность проблемы. При решении сложных задач по математике используются разнообразные нестандартные методы, большинство из которых трудно поддаются классификации. Такие методы ориентированы на решение относительно узкого круга задач, однако их знания и умения пользоваться ими необходимы для успешного решения задач повышенной сложности.

Приведены задачи, решения которых состоит в применении искусственных методов решения.

Цели и задачи метода. Целью данной работы является познакомить школьников с различными, основанными на материале программы общеобразовательной средней школы, методами решения, проиллюстрировать использование усвоенных школьных знаний и привить навыки употреблять нестандартные методы рассуждений при решении задач.

Умножение уравнения на функцию

Иногда решение алгебраического уравнения существенно облегчается, если умножить обе его части на некоторую функцию — многочлен от неизвестной. При этом возможно появление лишних корней — корней многочлена, на который умножали уравнение. Поэтому надо либо умножать на многочлен, не имеющий корней, и получить равносильное уравнение, либо умножать на многочлен, имеющий корни, и тогда каждый из таких корней надо подставить в исходное уравнение и установить, является ли это число его корнем.

Пример 1. Решить уравнение:

$$x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0. \qquad (1)$$

Решение. Умножив обе части уравнения (1) на многочлен $x^2 + 1$, не имеющий корней, получим уравнение

$$\left(x^2+1\right)\left(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1\right) = 0, \qquad (2)$$

равносильное данному уравнению (1). Уравнение (2) запишем в виде:

$$x^{10} + 1 = 0. \qquad (3)$$

Ясно, что уравнение (3) не имеет действительных корней, поэтому и уравнение (1) также их не имеет.

Ответ: Ø.

Пример 2. Решить уравнение

$$6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0. \qquad (4)$$

Решение. Умножим обе части данного уравнения на многочлен $x + 1/2$, получим уравнение:

$$6x^4 + 2x^3 - \frac{41}{2}x^2 + 2x + 6 = 0, \qquad (5)$$

являющееся следствием уравнения (4), так как уравнение (5) имеет корень $x = -1/2$, не являющийся корнем уравнения (4).

Уравнение (5) есть симметрическое уравнение четвертой степени. Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения (5), то, разделив обе части уравнения на $2x^2$ и перегруппировав его члены, получим уравнение

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{41}{4} = 0 \qquad (6)$$

равносильное уравнению (5). Обозначим $y = x + \dfrac{1}{x}$

и перепишем уравнение (6) в виде:

$$3y^2 + y - \frac{65}{4} = 0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) имеет два корня:

$$y_1 = -\frac{5}{2} \text{ и } y_2 = \frac{13}{6},$$

поэтому уравнение (6) равносильно совокупности уравнений:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6} \text{ и } x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}.$$

Решим каждое из этих уравнений и найдем четыре корня уравнения (6), а тем самым и уравнения (5):

$$x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{3}{2},\ x_3 = -2,\ x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Так как корень $x_4 = -\dfrac{1}{2}$ является посторонним для уравнения (4), то отсюда получаем, что уравнение (4) имеет три корня: x_1, x_2, x_3.

Ответ: $\left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}; -2\right\}$.

Угадывание корня уравнения

Иногда, при решении уравнений, сам внешний вид уравнения подсказывает нам, какое число является корням уравнения.

Пример 1. Решить уравнение:

$$x^3 + 3x - 36 = 12^3. \qquad (1)$$

Решение. Уравнение (1) перепишем в виде:

$$x^3 + 3x - 12^3 - 12 \cdot 3 = 0. \qquad (2)$$

Из внешнего вида уравнения (2) понятно, что $x = 12$ является одним из корней данного уравнения, для нахождения же остальных корней, преобразуем левую часть уравнения (2) в виде:

$$x^3 + 3x - \left(12^3 + 3 \cdot 12\right) = \left(x^3 - 12^3\right) + 3(x - 12) =$$
$$= (x-12)\left(x^2 + 12x + 12^2 + 3\right) =$$
$$= (x-12)\left(x^2 + 12x + 147\right).$$

Многочлен $\left(x^2 + 12x + 147\right)$ не имеет корней, следовательно единственным корнем данного уравнения является $x = 12$.

Ответ: {12}.

Пример 2. Решить уравнение:

$$x(x+1) + (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) +$$
$$+ (x+3)(x+4) + (x+4)(x+5) +$$
$$+ (x+5)(x+6) + (x+6)(x+7) +$$
$$+ (x+7)(x+8) + (x+8)(x+9) + (x+9)(x+10) =$$
$$= 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + 5\cdot 6 + 6\cdot 7 + 7\cdot 8 + 8\cdot 9 + 9\cdot 10.$$

Решение. Из самого вида уравнения (3) следует, что $x_1 = 0$ и $x_2 = -10$ являются решениями этого уравнения. Раскрыв скобки уравнения (3), получим неполное квадратное уравнение.

Отсюда следует, что уравнение (3) может иметь не более двух корней, это и есть найденные два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = -10$.

Ответ: $\{-10; 0\}$.

Использование симметричности уравнения.

Иногда во внешнем виде уравнения мы можем заметить некоторую его симметричность, благодаря чему можем найти способ решения этого уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{\left(x^2-x+1\right)^3}{\left(5-\sqrt{5}+1\right)^3}=\frac{x^2\left(x-1\right)^2}{5\left(\sqrt{5}-1\right)^2}. \qquad (1)$$

Решение. Внешний вид уравнения (1) говорит о том, что одним из корней уравнения является $x_1=\sqrt{5}$. Остальные же корни этого уравнения (1) найти не так то легко. Для этого перепишем (1) в виде, учитывая, что

$$x(x-1)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$$

получим

$$\frac{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^3}{\left(5-\sqrt{5}+1\right)^3}=\frac{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]^2}{5\left(\sqrt{5-1}\right)^2}. \qquad (2)$$

Действительно, если x_0 — является корнем уравнения (5), то и $x_1=1-x_0$ также корень уравнения (2), поскольку

$$\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2=\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

Далее покажем, что если $x_1,\ x_1\neq 0,\ x_1\neq 1$ является корнем уравнения (1), то $x_2=1/x_1$ также является корнем этого уравнения.

Действительно, т.к.

$$\frac{\left(x_2^2-x_2+1\right)^3}{x_2^2\left(x_2-1\right)^2}=\frac{\left(\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_1}+1\right)^3}{\frac{1}{x_1^2}\left(\frac{1}{x_1}-1\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(1-x_1+x_1^2\right)^3}{x_1^6\frac{1}{x_1^4}\left(1-x_1\right)^2}=\frac{\left(x_1^2-x_1+1\right)^3}{x_1^2\left(x_1-1\right)^2}$$

Получим, что и $x_2=1/x_1$ также есть корень данного уравнения (1).

Итак, если $x_1,\ x_1\neq 0,\ x_1\neq 1,$ — корень уравнения (1), то это уравнение имеет еще корни:

$$\frac{1}{x_1},\ 1-x,\ \frac{1}{1-x_1},\ \frac{1}{1-\frac{1}{x_1}}$$

т. е. уравнение (1) имеет корни

$$x_1=\sqrt{5},\ x_2=\frac{1}{\sqrt{5}},\ x_3=1-\sqrt{5},$$

$$x_4=\frac{1}{1-\sqrt{5}},\ x_5=1-\frac{1}{\sqrt{5}},\ x_6=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Т. к. уравнение (1) есть алгебраическое уравнение шестой степени, то оно имеет не более шести корней.

Ответ: $\left\{\sqrt{5};\ \frac{1}{\sqrt{5}};\ 1-\sqrt{5};\ \frac{1}{1-\sqrt{5}};\ 1-\frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}\right\}.$

Исследование уравнения на промежутках действительной оси

Этот способ состоит в нахождении уравнения исследованием его на разных числовых промежутках.

Пример 1. Решить уравнение

$$2x^9-x^5+x-2=0. \qquad (1)$$

Решение. Уравнение (1) перепишем уравнение в виде

$$2\left(x^9-1\right)-x\left(x^4-1\right)=0 \qquad (1')$$

Использовав формулу разности

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right),$$

перепишем (1) в виде

$$(x-1)\left(2x^8+2x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3+x^2+x+2\right)=0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что одним из корней данного уравнения есть $x=1$. Теперь докажем, что уравнение

$$2x^8+2x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3+x^2+x+2=0 \qquad (3)$$

решений не имеет.

Всю числовую ось разобьем на промежутки:

$$(-\infty;-1],\ (-1{,}0]\ \text{и}\ [0;+\infty).$$

Рассмотрим промежуток $[0;+\infty)$. На этом промежутке для любого x имеем, что левая часть уравнения (3) положительна, поэтому уравнение решений не имеет.

Так как

$$2x^8+2x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3+x^2+x+2=$$

$$=2x^8+2x^6(x+1)+2x^4(x+1)+x^2(x+1)+$$

$$+(x+1)+\left(1-x^4\right),$$

то для любого х из промежутка $(-1{,}0]$ этот многочлен положителен. Отсюда следует, что и на этом промежутке $(-1{,}0]$ уравнение (3) также не имеет решений.

Далее, поскольку

$$2x^8+2x^7+2x^6+2x^5+x^4+x^3+x^2+x+2=$$

$$=2x^7(x+1)+2x^5(x+1)+x^3(x+1)+x(x+1)+2,$$

то для любого x из промежутка $\left(-\infty;-1\right]$ этот многочлен положителен, т.е. и на этом промежутке уравнение (3) не имеет решений.

Следовательно уравнение (3) имеет единственное решение $x=1$.

Ответ: {1}.

В итоге можно сказать, что в процессе исследования цель данной работы достигнута, полностью решены поставленные задачи, рассмотрены и опробованы дополнительные (искусственные) методы решения уравнений.

Литература

1. Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. «Нестандартные методы решения уравнений и неравенств». — 1992.
2. Далингер В. А. «Нестандартные уравнения и методы их решения», Омск. — 1995.
3. Голубев В. И. «Решение сложных и нестандартных задач по математике». — 2007.
4. Потапов М. К. «Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения» М.: «Дрофа Олехник». — 2002.
5. Супрун В. П. «Нестандартные методы решения задач по математике» Минск. — 2003.