Стойка М.В.
Ужгородский национальный университет

РУЧНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОЕКТИВНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

Аннотация
В данной роботе рассматриваются проективные изображения конечных групп над кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. Исследуется кольцо $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$, что является скрещенным групповым кольцом конечной p-группы G и кольца целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. Рассматривается задача об описании всех неэквивалентных матричных $\mathbb{Z}_p$-изображений кольца $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$. Система факторов $\{\lambda_{a,b}\}$ выбирается при условии, что $\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_p^*, a,b \in G$. Получено необходимое и достаточное условия ручности задачи описания проективных $\mathbb{Z}_p$-изображений конечной группы G при некоторых условиях.
Ключевые слова: проективные изображения, скрещенное групповое кольцо, кольцо целых p-адических чисел, система факторов, ручные группы.

Stoika M.V.
Uzhhorod National University

TAME FINITE GROUPS WITH RESPECT TO PROJECTIVE REPRESENTATIONS OVER COMMUTATIVE RINGS

Summary
The present paper deals with the projective representation of finite groups over the ring of p-adic integers $\mathbb{Z}_p$. The ring $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$, which is twisted group ring of a finite p-group G and the ring of p-adic integers $\mathbb{Z}_p$ was investigated. Particularly, the task of the wildness of the problem of the description of all nonequivalent matrix $\mathbb{Z}_p$-representation of the ring $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ was investigated. The factor system $\{\lambda_{a,b}\}$ satisfies the next conditions $\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_p^*, a,b \in G$. There were obtained necessary and sufficient conditions of the tame problem of description of projective $\mathbb{Z}_p$-representations of finite group G for some cases.
Keywords: projective representations, twisted group rings, ring of p-adic integers, factor system, tame groups.

УДК 517

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ, НЕРАЗРЕШЁННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Филер С.Е., Шелуденко А.С.
Кировоградский государственный университет имени Владимира Винниченко

Рассмотрены основные теоретические вопросы установления устойчивости систем дифференциальных уравнений с действительными и комплексными коэффициентами, приведены примеры установления устойчивости для систем ДУ 1-го и 2-го порядков с действительными и комплексными коэффициентами. На примере показано установление устойчивости дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Построенные финитизированные и нефинитизированые годографы с помощью пакета вычислений Maple 17. С помощью программы Excel осуществлены расчеты матрицы монодромии. Указанные соответствующие ссылки на использованную литературу.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения, устойчивость, критерий Михайлова, системы, матрица монодромии.

Постановка проблемы. Теория устойчивости широко используется для систем автоматического управления. При небольшом изменении коэффициентов уравнение может из устойчивого перейти в неустойчивое, что приведет к сбою системы, поэтому весьма актуальным является исследование устойчивости систем. Необходимо разработать алгоритм установления устойчивости для ДУ, неразрешенных относительно старших производных.

Анализ последних исследований и публикаций. Для ДУ с постоянными запаздываниями критерии типа Рауса − Гурвица неприменимы, а критерий Михайлова удается применить. Но этот геометрический критерий требует делать выводы о повороте радиуса − вектора бесконечного годографа, хотя, и нахождения отдельных его точек, и построение кривой, возможны лишь на конечной плоскости, соответствующей конечному массиву значений $f(i\omega_k)$. На практике, конструируя механизм (технологический процесс), определяют его устойчивость, строя годограф на конечном промежутке $[0;\Omega]$ и делая вывод о значении $\Phi(+\infty)$ по поведению угла $\Phi(\Omega)$ при увеличении Ω. Филером З.Е. была предложена процедура финитизации применения критерия Михайлова [3, с. 215].

Появление ЭВМ сделало возможным создание достаточно простых и наглядных алгоритмов финитизации. В последние годы с помощью своих учеников А.П. Дрозда, А.Н. Древа, А.Ю Донца и А.И. Музычнко, Филер З.Е получил достаточно простые варианты финитизации критерия Михайлова с возможностью простого варьирования в диалоговом режиме параметров системы (коэффициентов и величин запаздываний) для реализации задач синтеза системы с необходимым поведением. Для трансцендентной функции − квазиполинома (при наличии запаздываний) важной задачей при наличии устойчивости является и нахождение действительной части корней ХУ, которая определяет запас устойчивости дифференциального уравнения.

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы. Разработанные методы исследования устойчивости систем требуют предварительного приведения их к нормальному виду умножением уравнения на обратную матрицу старших производных. Для уравнений 2-го порядка это удваивает размерность системы; то же относится к системам с комплексными коэффициентами. Для линейных уравнений с переменными коэффициентами существовавшими методами устойчивость не находили.

Цель статьи. Главной целью этой статьи является разработка алгоритма установления устойчивости для дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно старших производных.

Изложение основного материала. Для электромеханических систем применяют уравнения Лагранжа-Максвелла, построение которых предполагает использование квадратичных форм типа кинетической и потенциальной энергий $\mathrm{T} = \frac{1}{2}(A\dot{x},\dot{x}), \Pi = \frac{1}{2}(Cx,x)$, и диссипативной функции $\Phi = \frac{1}{2}(B\dot{x},\dot{x})$. Для мерного вектора обобщённых координат получаем уравнения Лагранжа 2-го рода вида $A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = Q(t)$. Вектор обобщённых сил $Q(t)$ не влияет на устойчивость системы.

Для уравнения

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0 \qquad (1)$$

с неизвестной k-столбцовой матрицей x (число столбцов n матрицы A равно числу строк матрицы x) поиск решения $x = H\exp(\lambda t)$ с матрицей H ведёт к системе $(A\lambda^2 + B\lambda + C)H\exp(\lambda t) = 0$, что даёт ненулевое решение H, если $\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0$. Это характеристическое уравнение, независящее от k. Функция $f(\lambda)=\det(A\lambda^2 + B\lambda + C)$, которая даёт для установления устойчивости годограф Михайлова при $\lambda := i\omega$. Её радиус-вектор при изменении $\omega \in (0,\infty)$ (для действительных матриц A, B, C) делает поворот на угол $\pi/2 \cdot n$ в случае асимптотической устойчивости. Это даёт функцию $F(\omega) = \det(C - A\omega^2 + i\omega B) = u(\omega) + iv(\omega)$ [1, с. 88-90]. Для финитизации сделаем замену $(1-t)^n F\left(\frac{t}{1-t}\right), 0 < t < 1,$ что даёт функцию $g(t) = \det(C(1-t)^2 - At^2 + it(1-t)B)$, годограф которой при изменении $t\in(0,1)$, конечен. Он и определяет устойчивость. При этом все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости комплексного λ.

Для комплексных матриц A, B, C финитизация достигается заменой $(1-|t|)^n F\left(\frac{t}{1-|t|}\right), 0 \le |t| < 1.$ Дело в том, что в случае действительных матриц A, B, C корни комплексно сопряжёны и обход по прямой $\lambda := i\omega,$ $-\infty < \omega < +\infty$ может быть заменён на обход вдоль полупрямой $0 < \omega < +\infty$ [2, с. 125-130].

Для систем с комплексными матрицами и вектором $\bar{x} = (x_1, x_2\}^T$ получаем годографы, изображённые на рис. 1.

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0,$$

$$A=\begin{bmatrix} 9+i & 2+2i \\ 5-i & 3+i \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 7+i & 5+2i \\ 2+i & 3-4i \end{bmatrix};\quad A=\begin{bmatrix} 5+i & 2+2i \\ 5-i & 3+i \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 7+i & 5-i \\ 2+i & 3-4i \end{bmatrix};$$

$$C=\begin{bmatrix} 5+i & 2-2i \\ 1 & 3 \end{bmatrix};\qquad C=\begin{bmatrix} 5+i & 2-2i \\ 1+4i & 3 \end{bmatrix};$$

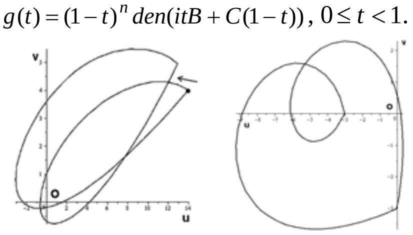
Подчеркнём асимметрию годографов для комплексных элементов матриц. На рис. 1а точка О охватывается годографом, который при обходе против часовой стрелке даёт угол $2 \cdot n\pi = 4\pi$. На рис. 1б годограф охватывает точку О только один раз.

Для системы уравнений, описывающей, например, электрические цепи без индуктивностей, вида

$$B\dot{x} + Cx = Q(t), \qquad (2)$$

устойчивость может быть установлена с помощью финитизированного годографа функции

$$g(t) = (1-t)^n\, den(itB + C(1-t)),\ 0 \le t < 1. \qquad (3)$$



а) устойчивое б) неустойчивое

Рис. 1

Для систем уравнений 1-го порядка

$$B\dot{x} + Cx = 0,$$

получаем для комплексных матриц B и C

$$B=\begin{bmatrix} 1+3i & 2+i \\ 5+2i & 3+4i \end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix} 7+4i & 5+i \\ 2+2i & 3+3i \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 1+3i & 2+i \\ 5+2i & 3+4i \end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix} 7+i & 5+i \\ 2+2i & 3+3i \end{bmatrix};$$

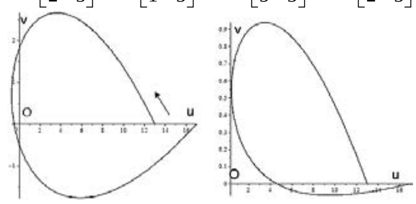
годографы на рис. 2. левый даёт устойчивое решение, так как годограф охватывает точку О. На правом рисунке точка О не охватывается годографом. Если она лежит на границе, то решение устойчиво, но не асимптотически. Видна также асимметрия кривых – годографов, вызванная наличием мнимых частей коэффициентов.

а) устойчивое б) неустойчивое

Рис. 2.

Для матриц A, B, C, с действительными коэффициентами получаем (рис. 3):

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};\quad A=\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};$$

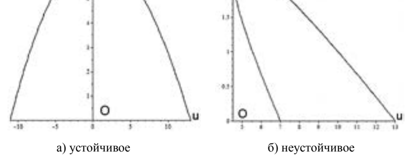


а) устойчивое б) неустойчивое

Рис. 3.

Для матриц B, C, с действительными коэффициентами получаем (рис. 4):

$$B=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};$$



а) устойчивое б) неустойчивое

Рис. 4.

На рис. 3 изображены годографы устойчивого и неустойчивого уравнений 2-го порядка с действительными коэффициентами, а на рис. 4 – для таких же уравнений 1-го порядка.

Рассматривая движение объектов, расстояние к которым изменяется по периодическому закону, приходится рассматривать системы с периодическими запаздываниями. Например, искусственный спутник Земли, который движется по эллиптической орбите, периодически меняет расстояние к Центру управления полетами. Поэтому время задержки сигнала также изменяется периодически. Это может быть причиной параметрического резонанса, который ведет к неустойчивости в системе управления.

Установление устойчивости уравнений с периодическими матрицами сводятся к отысканию матрицы монодромии B. Для асимптотической устойчивости периодической системы необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы монодромии ρ лежали внутри единичного круга $\rho < 1$ [4, с. 118-120].

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$y^{(IV)}(t)+(5+\cos(2t))y'''(t)+10y''(t)+8y'(t)+2y(t)=0.$$

Матрица A имеет вид:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -8 & -10 & -(5+\cos(2t)) \end{bmatrix}.$$

Определим период T для $t = 0...T$ по формуле $T=2\pi/\omega=2\pi/2=\pi$.

Теперь найдем матрицу монодромии B (с помощью Excel). Для ее поиска используем численное интегрирование задачи Коши на отрезке длиной в период T ($X_{k+1}=(E+hA_k)X_k$, $X_0=E$. Тогда $B=X_n$).

Получим матрицу монодромии B, которая имеет вид:

$$B=\begin{bmatrix} 0.98 & 0.91 & 0.33 & 0.04 \\ -0.09 & 0.63 & 0.48 & 0.08 \\ -0.18 & -0.8 & -0.27 & -0.02 \\ 0.01 & -0.16 & -0.85 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

Для исследования периодических систем на устойчивость воспользуемся условием, которое обеспечивает принадлежность корней характеристического полинома $f(\rho)=\det[B-\rho E]$ единичном кругу $|\rho|<1$.

Сделаем замену $\rho=(\lambda+1)/(\lambda-1)$ и умножим на $(\lambda-1)^4$, получим уравнение: $f(\rho)=\det[B(\lambda-1)-(\lambda+1)E]$.

Используя критерий Михайлова, подставим в левую часть $\lambda=i\omega$, получим характеристический полином в комплексном виде:

$$f(i\omega)=\det[B(-1+i\omega)-(1+i\omega)E]=0 .$$

Для нашего уравнения получаем:

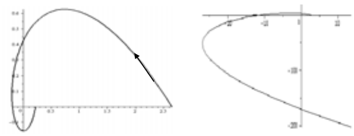
$$f(\rho)=\det[B-\rho E]=0{,}0008-0{,}07\rho+0{,}44\rho^2-1{,}14\rho^3+\rho^4 .$$

Корни характеристического уравнения находим с помощью функции solve:

$\rho_1=0{,}01$, $\rho_2=0{,}6$, $\rho_3=0{,}2+0{,}2I$, $\rho_4=-0{,}2-0{,}2I$.

Поскольку все корни $|\rho|<1$, уравнение устойчиво.

Для проверки воспользуемся критерием Михайлова и построим финитизированный и не финитизированный годографы (рис. 5).



а) финитизированный б) не финитизированный

Рис. 5.

Следовательно, можем сделать вывод, что устойчивость уравнения установлена верно, уравнение устойчиво.

Показанные методы позволяют устанавливать устойчивость и систем с запаздыванием, а также находить запас устойчивости и меру неустойчивости.

Выводы и предложения. Разработан алгоритм установления устойчивости для систем ДУ, неразрешенных относительно старших производных. Предложена визуализация результатов, что полезно при обучении студентов. Выводы об устойчивости можно получить и без построения годографа.

Список литературы:

1. Крылов А. Н. Собрание трудов. – Т. 10. Вибрация судов. – М.-Л.: АН СССР. – 948. – С. 88-90.
2. Филер З. Е., Музыченко А. И. Устойчивость линейных механических систем с последействием // Прикл. механика, Т. 46. – № 1. – С. 125-130.
3. Філер З. Ю., Музиченко О. І. Коливальність розв'язків рівняння 2-го порядку та стійкість лінійних автономних рівнянь вищих порядків // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти». – Черкаси: ВВ ЧНУ, 2007. – С. 215-217.
4. Філєр З. Ю., Шелуденко А. С. Стійкість диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами // Студентські наукові записки (Збірник наукових статей студентів фізико-математичного факультету. Випуск 7. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2014. – С. 118-120.

Філер З.Ю., Шелуденко А.С.
Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ, НЕРОЗВ'ЯЗНИХ ВІДНОСНО СТАРШИХ ПОХІДНИХ

Анотація
Розглянуті основні теоретичні питання встановлення стійкості систем диференціальних рівнянь із дійсними та комплексними коефіцієнтами, наведені приклади встановлення стійкості для систем ДР 1-го та 2-го порядків з дійсними та комплексними коефіцієнтами. На прикладі показано встановлення стійкості диференціальних рівнянь із періодичними коефіцієнтами. Побудовані фінітизовані та нефінітизовані годографи за допомогою пакету обчислень Maple 17. За допомогою програми Excel здійснені обрахунки матриці монодромії. Вказані відповідні посилання на літературу.
Ключові слова: диференціальні рівняння, стійкість, критерій Михайлова, системи, матриця монодромії.

Filer Z.Yu., Sheludenko A.S.
Kirovohrad Volodymyr Vynnychenko State Pedagogical University

STABILITY OF SYSTEMS UNRESOLVED IN RESPECT OF HIGHER DERIVATIVES

Summary
The article examines the basic theoretical question of establishing stability of systems of differential equations with real and complex coefficients. It provides examples of resistance to the establishment of DE of 1st and 2nd order with real and complex coefficients. Example shows the establishment of stability of differential equations with periodic coefficients. Finite and non-finite hodographs are built using a package Maple 17. Monodromy matrix is calculated in Excel. Appropriate references to relevant literature are listed.
Keywords: differential equations, stability, Mikhailov criterion, systems, monodromy matrix.