DOI: https://doi.org/10.32839/2304-5809/2020-10-86-6
УДК 330.4:519.8

Довга Н.І., Цегелик Г.Г.
Львівський національний університет імені Івана Франка

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ ПОСТУПОК ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕННЯ СОБІВАРТОСТІ ПРОДУКЦІЇ

Анотація. Досліджено процеси оптимізації плану виробництва продукції за певними критеріями. Однією з проблем є складність узгодження і врахування впливу критеріїв на оптимальний план виробництва. Головною метою діяльності підприємства є одержання прибутку. Одним з чинників від яких залежить прибуток є собівартість продукції. З огляду на це запропоновано оптимізаційну модель задачі підвищення собівартості продукції. За критерії оптимальності прийнято максимальну ціну виготовленої продукції та мінімальні затрати на виготовлення продукції. Одночасно забезпечити максимальну ціну і мінімальні затрати у виробництві неможливо. Тому розв'язок досягнутий за допомогою покрокового розв'язування запропонованої математичної моделі оптимізації плану виробництва продукції з використанням ідеї методу послідовних поступок [1–3], який забезпечить певну ціну за невеликих затрат. На прикладі наведено алгоритм розв'язування даної задачі.

Ключові слова: план виробництва продукції, оптимізаційна модель, метод послідовних поступок, симплекс метод, математична модель.

Dovha Nataliia, Tsehelyk Hryhorii
Ivan Franko National University of Lviv

USING THE METHOD OF SUCCESSIVE CONCESSIONS FOR SOLVING THE PROBLEM OF INCREASING COST PRICE

Summary. The processes of optimization of the production plan according to certain criteria were investigated. One of the problems is the difficulty of coordination and taking into account the impact of criteria on the optimal production plan. In practice, every company often faces tasks that require decisions that are quite complex and significantly affect the result. The choice of the best solutions is usually made by using a single numerical function – the criterion of optimality. The best solution is one that provides the maximum (or minimum) of the selected criterion. For the most part, the quality of decisions is characterized not by one but by many incomparable criteria. Therefore, it is necessary to make decisions based not on one but on many criteria. That is why the investigation and implementation of multicriteria models is an important stage in the development of modern science. The current rate of change in production is very high. To meet new needs and maintain the competitiveness each enterprise, firm, company must be able to make fast and correct decisions. Properly formed production program allows companies to meet the needs of consumers in products that are produced with the best use of resources, and get the maximum profit. Quite often there is a need to use mathematical methods to study this problem. The results obtained by solving a mathematical problem will make it possible to make optimal recommendations for certain actions. The main purpose of the company is usually to make a profit. One of the factors on which profit depends is the cost price. In view of this, an optimization model of the problem of increasing the cost price was proposed. The maximum price of manufactured products and the minimum costs for production was taken as criteria. At the same time it is impossible to ensure the maximum price and minimum production costs. Therefore, the solution was achieved by step-by-step solution of the proposed mathematical model of optimization of the production plan using the idea of the method of successive concessions, which would provide a certain price at low cost. An example shows an algorithm for solving this problem.

Keywords: production plan, optimization model, method of successive concessions, simplex method, mathematical model.

Постановка проблеми. Будь-яке підприємство на практиці часто зустрічається з задачами, для розв'язання яких треба приймати рішення, які є досить складними і суттєво впливають на результат. Вибір найкращих рішень, зазвичай, здійснювалося за допомогою єдиної числової функції – критерію оптимальності. Найкращим є рішення, що забезпечує максимум (або мінімум) обраного критерію. Здебільшого якість рішень характеризується не одним, а багатьма непорівняльними критеріями. Тому доводиться ухвалювати рішення, ґрунтуючись не на одному, а на багатьох критеріях. Достатньо часто виникає потреба в застосуванні математичних методів дослідження даної проблеми. Результати, отримані внаслідок розв'язання математичної задачі, дадуть змогу виробити оптимальні рекомендації стосовно тих чи інших дій [1–3]. В нашій роботі розглядається, як за допомогою методу послідовних поступок можна забезпечити максимальну ціну виготовленої продукції та мінімальні затрати на виготовлення продукції. Важливо зазначити, що в роботі наводиться приклад для розв'язування цієї задачі.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Науково-теоретичні та методологічні аспекти характеру методів прийняття рішень, оптимізацію фінансових рішень і математичну економіку досліджують у своїх роботах вітчизняні і зарубіжні вчені, серед яких Волошин О.Ф. [1], Мащенко С.О. [1], Кігель В.Р. [2], Цегелик Г.Г. [3] тощо.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Методологічні та прикладні проблеми методу послідовних поступок для вирішення задач багатокритеріальної оптимізації планування виробництва вимагають досліджень і розробки системи.

Мета статті. Метою даної статті є використання методу послідовних поступок [1–3] для розв'язання задачі підвищення собівартості продукції, де за критерії прийнято ціну виготовленої продукції та затрати на виготовлення продукції з урахуванням відомої кількості одиниць кожного ресурсу, які використовуються у виробництві.

Виклад основного матеріалу. Основною задачею підприємства є раціональне планування випуску продукції заради отримання максимального прибутку. Одним з чинників від яких залежить прибуток є собівартість продукції. З огляду на це, нами запропоновано двокритеріальну оптимізаційну модель, яка дає змогу скласти план випуску продукції таким чином, щоб максимально використати наявні ресурси і в той же час забезпечити максимальну ціну виготовленої продукції та мінімальні затрати на виготовлення продукції. Для розв'язання цієї задачі з двома цільовими функціями і лінійними обмеженнями застосовано ідею методу послідовних поступок [1–3], яка полягає у відшуканні компромісного розв'язку, який забезпечує певну ціну за невеликих затрат.

Припустимо, що підприємство, використовуючи наявні ресурси, має можливість виробляти продукцію декількох видів. Відомо, скільки одиниць кожного ресурсу використовують для виробництва одиниці кожної продукції, запас кожного ресурсу, затрати (в грошах) на виготовлення одиниці кожної продукції, а також ціна виготовленої продукції. Задача полягає в такому складанні плану виробництва продукції, за якого, використовуючи наявні ресурси, собівартість продукції була б найбільшою.

Введемо такі позначення:

C – собівартість виготовленої продукції;

n – кількість видів продукції, що виготовляє підприємство;

m – кількість різних ресурсів, які використовуються у виробництві;

a_i – ціна виготовленої одиниці i-ої продукції;

b_i – затрати (в грошах) на виготовлення одиниці і-ої продукції;

d_{ji} – кількість одиниць j-го ресурсу, що використовується для виготовлення одиниці i-ої продукції;

c_j – запас j-го ресурсу;

x_i – кількість одиниці i-ої продукції, що планується виготовити (шукані величини);

$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ – ціна виготовленої продукції;

$L_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ – затрати (в грошах) на виготовлення продукції.

Тоді собівартість виготовленої продукції виразимо формулою:

$$C = \frac{L_1}{L_2}.$$

Задача полягає в складанні такого плану $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, для якого досягається $\max C$ при заданих умовах. Задача знаходження $\max C$ еквівалентна знаходження одночасно $\max L_1$ і $\min L_2$.

Отже, математичною моделлю задачі буде така двокритеріальна задача:

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to \max, \tag{1}$$

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \to \min \tag{2}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_{ji} x_i \le c_j, \quad j = 1, 2, ..., m, \tag{3}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{4}$$

Одночасно забезпечити максимальну ціну продукції і мінімальні затрати у виробництві неможливо. Тому для розв'язування задачі використаємо ідею методу послідовних поступок [1-3] для відшукання компромісного розв'язку, який забезпечить певну ціну за невеликих затрат.

Позначимо через М множину допустимих розв'язків задачі (1)–(4), тобто множину точок $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняють умови (3)–(4). Тоді алгоритм методу послідовних поступок для розв'язання задачі (1)–(4) полягає в такому.

Спочатку розв'язуємо однокритеріальну задачу:

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to \max$$

за умов

$$X \in M.$$

Нехай $X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)} ..., x_n^{(1)})$ – оптимальний розв'язок цієї задачі. Тоді обчислюємо ціну продукції $L_1(X_1)$ і затрат $L_2(X_1)$. Якщо затрати задовольняють виробника, то X_1 приймаємо за компромісний розв'язок задачі (1)–(4). В протилежному випадку виробник визначає величину поступки ΔP_1, на яку він може погодитися для того, щоб мінімізувати затрати, визначаючи «уточнену» допустиму множину розв'язків M_1:

$$M_1 = \left\{ X \in M \middle| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{(1)} - \Delta P_1 \right\}$$

Після цього розв'язуємо задачу:

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to \max$$

за умов

$$X \in M_1$$

Нехай $X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)} ..., x_n^{(2)})$ розв'язок цієї задачі, тоді обчислюємо $L_1(X_2)$. Якщо затрати $L_2(X_2)$ задовольняють виробника, то X_2 приймаємо за компромісний розв'язок задачі (1)–(4). У протилежному випадку виробник визначає величину наступної поступки ΔP_2, на яку він може погодитись, щоб зменшити затрати, визначаючи «уточнену» допустиму множину розв'язків M_2:

$$M_2 = \left\{ X \in M \middle| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{(2)} - \Delta P_2 \right\}$$

Після цього розв'язуємо задачу:

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to \max$$

за умов

$$X \in M_2$$

Процес розв'язування однокритеріальних задач триває доти, доки знайдений компромісний розв'язок не задовольнятиме виробника.

Очевидно, задача матиме розв'язок у випадку, коли зі зменшенням ціни зменшуються затрати на виготовлення продукції.

Для розв'язання однокритеріальних задач можна використати симплексний метод [4], оскільки це є задачі лінійного програмування.

Приклад реалізації. ТзОВ «Стиль» виготовляє жіночі плаття трьох видів (продукцію № 1 (x_1), продукцію № 2 (x_2), продукцію № 3 (x_3)). Для виготовлення використовуються ресурси: шовк (сировина 1), бавовна (сировина 2), велюр (сировина 3). Відомо, скільки одиниць (у м^2) кожного ресурсу використовується для виготовлення одиниці продукції кожного виду, ціну одиниці виготовленої продукції кожного виду (у грн) та затрати на виготовлення одиниці продукції кожного виду (у грн). Дані наведені у табл. 1. Підприємству необхідно скласти план виробництва продукції, за якого при використанні наявних ресурсів собівартість продукції була б найбільшою (забезпечується максимальна ціна продукції та мінімальні витрати).

Модель задачі матиме вигляд:

$$L_1 = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max \text{ ,}$$

$$L_2 = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 100 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 80 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = 1,2,3.$$

Спочатку симплексним методом розв'яжемо задачу

$$L_1 = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 100 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 80 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = 1,2,3.$$

Процес розв'язування цієї задачі наведено в табл. 2.

Як бачимо з табл. 2 $X = \left(15; \frac{140}{6}; \frac{35}{3}\right)$, $L_1 = \frac{415}{3}$. Якщо $X = \left(15; \frac{140}{6}; \frac{35}{3}\right)$, то $L_2 = 65$. Припустимо, що розв'язок нас не задовольняє і витрати ми хочемо трохи зменшити. Для цього введемо обмеження на ціну $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 135$ (поступка $\Delta P_1 = \frac{10}{3}$) і розв'яжемо задачу

$$L_1 = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 100 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 80 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 135 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = 1,2,3.$$

Процес розв'язування цієї задачі наведено в табл. 3.

Як бачимо з табл. 3 $X = \left(\frac{125}{9}; \frac{190}{9}; \frac{115}{9}\right)$, $L_1 = 135$, $L_2 = \frac{555}{9}$. Припустимо, що розв'язок нас не задовольняє і витрати ми хочемо трохи зменшити. Зробимо ще одну поступку $\Delta P_2 = 5$ і розв'яжемо задачу

$$L_1 = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 100 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 80 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 130 \end{cases}$$

Таблиця 1

Вхідні дані до задачі

Види продукції	Види сировини			Ціна	Затрати
	Сировина 1	Сировина 2	Сировина 3		
Продукція № 1	2	3	1	3	2
Продукція № 2	1	1	2	2	1
Продукція № 3	4	1	5	4	1
Запаси сировини	100	80	120		

Джерело: розроблено авторами

Таблиця 2

Симплекс таблиця

i	*Б*	*c*	P_0	3	2	4	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	100	2	1	4	1	0	0
2	P_5	0	80	3	1	1	0	1	0
3	P_6	0	120	1	2	5	0	0	1
4			0	-3	-2	-4	0	0	0
1	P_4	0	4	6/5	-3/5	0	1	0	
2	P_5	0	56	14/5	3/5	0	0	1	
3	P_3	4	24	1/5	2/5	1	0	0	
4			96	-11/5	-2/5	0	0	0	
1	P_1	3	10/3	1	-1/2	0		0	
2	P_5	0	140/3	0	2	0		1	
3	P_3	4	70/3	0	1/2	1		0	
4			310/3	0	-3/2	0		0	
1	P_1	3	15	1	0	0			
2	P_2	2	140/6	0	1	0			
3	P_3	4	35/3	0	0	1			
4			415/3	0	0	0			

Джерело: розроблено авторами

Таблиця 3

Симплекс таблиця

i	*Б*	*c*	P_0	**3**	**2**	**4**	**0**	**0**	**0**	**0**
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	0	100	2	1	4	1	0	0	0
2	P_5	0	80	3	1	1	0	1	0	0
3	P_6	0	120	1	2	5	0	0	1	0
4	P_7	0	135	3	2	4	0	0	0	1
5			0	-3	-2	-4	0	0	0	0
1	P_4	0	4	6/5	-3/5	0	1	0		0
2	P_5	0	56	14/5	3/5	0	0	1		0
3	P_3	4	24	1/5	2/5	1	0	0		0
4	P_7	0	39	11/5	2/5	0	0	0		1
5			96	-11/5	-2/5	0	0	0		0
1	P_1	3	10/3	1	-1/2	0		0		0
2	P_5	0	140/3	0	2	0		1		0
3	P_3	4	70/3	0	1/2	1		0		0
4	P_7	0	95/3	0	3/2	0		0		1
5			310/3	0	-3/2	0		0		0
1	P_1	3	125/9	1	0	0		0		
2	P_5	0	40/9	0	0	0		1		
3	P_3	4	115/9	0	0	1		0		
4	P_2	2	190/9	0	1	0		0		
5			135	0	0	0		0		

Джерело: розроблено авторами

Таблиця 4

Симплекс таблиця

i	*Б*	*c*	P_0	**3**	**2**	**4**	**0**	**0**	**0**	**0**
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	0	100	2	1	4	1	0	0	0
2	P_5	0	80	3	1	1	0	1	0	0
3	P_6	0	120	1	2	5	0	0	1	0
4	P_7	0	130	3	2	4	0	0	0	1
5			0	-3	-2	-4	0	0	0	0
1	P_4	0	4	6/5	-3/5	0	1	0		0
2	P_5	0	56	14/5	3/5	0	0	1		0
3	P_3	4	24	1/5	2/5	1	0	0		0
4	P_7	0	34	11/5	2/5	0	0	0		1
5			96	-11/5	-2/5	0	0	0		0
1	P_1	3	10/3	1	-1/2	0		0		0
2	P_5	0	140/3	0	2	0		1		0
3	P_3	4	70/3	0	1/2	1		0		0
4	P_7	0	80/3	0	3/2	0		0		1
5			310/3	0	-3/2	0		0		0
1	P_1	3	110/9	1	0	0		0		
2	P_5	0	100/9	0	0	0		1		
3	P_3	4	130/9	0	0	1		0		
4	P_2	2	160/9	0	1	0		0		
5			130	0	0	0		0		

Джерело: розроблено авторами

$$x_i \geq 0, i = 1,2,3.$$

Процес розв'язування цієї задачі наведено в табл. 4.

Як бачимо з табл. 4 $X = \left(\frac{110}{9}; \frac{160}{9}; \frac{130}{9}\right)$, $L_1 = 130$, $L_2 = \frac{510}{9}$. Вважаємо, що цей розв'язок нас задовольняє.

Отже, скоротивши ціну на $\frac{25}{3}$, витрати зменшилися на $\frac{25}{3}$.

Висновки і пропозиції. Запропоновано використання методу послідовних поступок для розв'язування задачі підвищення собівартості продукції. За критерії оптимальності прийнято максимальну ціну виготовленої продукції та мінімальні затрати на виготовлення продукції. Наводиться алгоритм розв'язування задачі в загальному випадку і його використання для розв'язання конкретного прикладу. Запропоновану двокритеріальну модель оптимізації плану виробництва можна використовувати в різних галузях економіки.

Список літератури:

1. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень : навч. посіб. Київ : ВПЦ "Київський університет", 2010. 336 с.
2. Кігель В.Р. Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці : монографія. Київ : ЦУЛ, 2003. 202 с.
3. Цегелик Г.Г. Моделі та методи підтримки прийняття рішень в умовах визначеності : текст лекцій. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2015. 92 с.
4. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування : навч. посібник. Львів : Світ, 1995. 216 с.

References:

1. Voloshyn, O.F., & Mashchenko, S.O. (2010). *Modeli ta metody pryiniattia rishen* [Models and methods of decision-making]. Kyiv: Kyiv University. (in Ukrainian)
2. Kihel, V.R. (2003). *Metody i modeli pidtrymky pryiniattia rishen u rynkovii ekonomitsi* [Methods and models of decision-making in market economy]. Kyiv: CUL. (in Ukrainian)
3. Tsehelyk, H.H. (2015). *Modeli ta metody pidtrymky pryiniattia rishen v umovakh vyznachenosti* [Models and methods of decision-making support under the circumstances of certainty]. Lviv: Ivan Franko National University of Lviv. (in Ukrainian)
4. Tsehelyk, H.H. (1995). *Liniine prohramuvannia* [Linear programming]. Lviv: Svit. (in Ukrainian)