УДК 624.042

МАХІНЬКО Н.О.
Канд. технічних наук, доц.,
Національний авіаційний університет,
м. Київ, Україна,
e-mail: pasargada1985@gmail.com,
тел.: + 38 (050) 304-50-72,
ORCID: 0000-0001-8120-6374

ІМОВІРНІСНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА КРИТИЧНОГО ФАКТОРУ В ЗАДАЧАХ НАДІЙНОСТІ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

АНОТАЦІЯ

Стаття порушує актуальну проблему практичного розрахунку надійності для такого класу будівельних споруд, як сталеві ємності зберігання. Зокрема дослідження орієнтоване на визначення такого узагальненого коефіцієнта критичного фактору, як відношення узагальнених величин зусиль та міцності, представлених випадковими процесами. З огляду на використання методів теорії імовірності та математичної статистики, значення критичного фактору виражається через його статистичні характеристики, диференціальну та інтегральну функції розподілу. Визначення середньоквадратичного відхилення та коефіцієнту варіації проводилося шляхом лінеаризації нелінійної функції випадкових величин в околі її математичного очікування. При цьому була врахована поправка на нелінійність при обчисленні дисперсії. Щільність розподілу коефіцієнта критичного фактору визначалася при використанні нормального закону розподілу для випадкових величин узагальненої міцності. Стохастичний процес узагальненого зусилля схематизувався двома законами розподілу – нормальним, що використовують для опису тиску сипучого матеріалу на стінки корпусу ємності зберігання, та подвійним експоненціальним розподілом Гумбеля, що використовується для опису максимумів снігового та вітрового навантаження. Таким чином, на базі класичного підходу, було отримане кінцеве аналітичне рішення в двох варіантах. Інженерний розрахунок, відповідно до даного алгоритму, ускладнений і потребує застосування спеціальних математичних пакетів для обчислення інтегральних виразів. Для уникнення цієї процедури була обґрунтована можливість використання процедури імітаційного моделювання для вирішення задачі пошуку функції розподілу імовірностей в зоні значень аргументу при ординатах, близьких до одиниці. Запропоновано імовірнісні властивості коефіцієнта критичного фактору виражати властивостями іншої випадкової величини, на основі полігону та функції розподілу котрої підбираються апроксимуючі вирази для заданого діапазону зміни імовірностей. Отримані таким чином значення для критичного фактору дозволяють вирішити задачу імовірнісного розрахунку аналітично без застосування складних обчислювальних процедур.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: надійність ємностей зберігання, міцність, зусилля, випадкові величини, функції розподілу.

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КРИТИЧЕСКОГО ФАКТОРА В ЗАДАЧАХ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

МАХІНЬКО Н.А. Канд. технических наук, доц.,
Национальный авиационный университет,
г. Киев, Украина,
e-mail: pasargada1985@gmail.com,
тел.: +38 (050) 304 50 72,
ORCID: 0000-0001-8120-6374

АННОТАЦИЯ

Статья касается актуальной проблемы практического расчета надежности такого класса сооружений, как стальные емкости хранения. В частности, исследование ориентировано на определение такого обобщенного коэффициента критического фактора, как соотношения обобщенных величин усилий и прочности, представленных случайными процессами. С учетом использования методов теории вероятности и математической статис-

тики, значение критического фактора выражается через его статистические характеристики, а также дифференциальную и интегральную функции распределения. Определение среднеквадратического отклонения и коэффициента вариации проводилось путем линеаризации нелинейной функции случайных величин в окрестности её математического ожидания. При этом учитывалась поправка на нелинейность при вычислении дисперсии. Плотность распределения коэффициента критического фактора определялась при использовании нормального закона распределения для случайных величин обобщённой прочности. Стохастический процесс обобщённого усилия схематизировался двумя законами распределения – нормальным, который применяют для описания давления сыпучего материала на стенки корпуса емкости хранения, и двойным экспоненциальным распределением Гумбеля, который применяется для описания максимумов снеговой и ветровой нагрузок. Таким образом, на базе классического подхода было получено конечное аналитическое решение в двух вариантах. Инженерный расчет, соответственно данному алгоритму, очень усложнен и требует использования специальных математических пакетов для вычисления интегральных выражений. Чтобы избежать этого, была обоснована возможность использования процедуры имитационного моделирования для решения задачи поиска функции распределения вероятностей в области значений аргумента при ординатах, близких к единице. Было предложено вероятностные свойства коэффициента критического фактора выражать свойствами другой случайной величины, на основании полигона и функции распределения которой подбираются аппроксимирующие выражения для заданного диапазона изменения вероятностей. Полученные таким образом значения для критического фактора позволят решить задачу вероятностного расчета аналитическим путем, без использования сложных вычислительных процедур.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: надежность емкостей хранения, прочность, усилие, случайные величины, функция распределения.

PROBABILISTIC REPRESENTATION OF THE CRITICAL FACTOR COEFFICIENT IN THE RELIABILITY PROBLEMS OF STRUCTURES

MAKHINKO N.O. PhD, Ass. Prof., National Aviation University,
Kyiv, Ukraine,
e-mail: pasargada1985@gmail.com,
tel.: +38 (050) 304-50-72,
ORCID: 0000-0001-8120-6374

ABSTRACT

This paper deals with the actual problems of the practical calculation of the steel storage capacities. The research defines generalized coefficient of the critical factor. It is the ratio of the generalized values of the internal forces and reliability, which are represented by random processes. The methods of the probability theory and of the mathematical statistics were used for the solution. The value of the critical factor was expressed through its statistic characteristics, and also through the differential and integral distribution functions. The linearization of the non-linear function of the random values in the area of the expected values was made to determine the standard deviation and the coefficient of variation. At the same time correlation at the non-linearity was considered when calculating the dispersion. The density distribution of the critical factor coefficient was determined when using the normal law of the distribution for the random value of the generalized reliability. The probabilistic process of the generalized force was schematized by two laws of distribution. The normal law was used to describe the pressure of the bulk material on the body walls of the storage capacities. Double exponential distribution of Gumbel is used to describe maximums of the snow and wind loads. At the same time classical calculation was made. Thus, the finite analytical decision in two variants was obtained. Accordingly to the given algorithm, engineering calculations is very complicated. It requires using special mathematical packages to calculate integral expressions. To avoid this, a simulation procedure was used. This allowed to solve the problem of finding the probability distribution function in the range of the argument values, when the ordinates are close to one. It was proposed to express the probabilistic features of coefficient of the critical factor by the features of another random value. On the basis of polygon and distribution function of this value, the approximating expressions for a given range of probability variations are chosen.

The obtained values for the critical factor allow us to solve the problem of probabilistic calculation analytically, what does not require using of complicated calculating procedures.
KEY WORDS: reliability of the storage capacities, strength, effort, random values, distribution function.

ВСТУП

В рамках діючих нормативних документів надійність або більш точніше безпечна експлуатація ємностей зберігання забезпечується розрахунком на міцність та стійкість, що визначає кількісну міру співвідношення між зовнішніми впливами, геометричними розмірами конструкцій і характеристиками міцності сталі, з якої вони виготовлені. Ця кількісна міра може бути виражена через узагальнену міцність $\tilde{R}$ та узагальнене зусилля $\tilde{S}$ в трьох можливих варіантах нерівності: резерву несучої здатності $\tilde{Y} = \tilde{R} - \tilde{S} \ge 0$; узагальненого коефіцієнту запасу $\tilde{\xi}_R = \tilde{R} / \tilde{S} \ge 1{,}0$ і узагальненого критичного фактору $\tilde{K}_R = \tilde{S} / \tilde{R} \le 1.0$.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ПУБЛІКАЦІЙ

Вивченням питань імовірнісного розрахунку загалом та по відношенню до будівельних конструкцій, під дією випадкових навантажень присвячена велика кількість робіт [1 – 5]. В той же час дослідження структурної надійності сталевих ємностей зберігання в наукових публікаціях зустрічається значно рідше [6, 7]. Також варто відмітити величезну кількість досліджень в області статистичного моделювання та чисельних методів розрахунку, що можуть бути застосовані для вирішення поставлених задач [8 – 10].

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Використання певного типу нерівності при розрахунках здебільшого обирається на власний розсуд дослідника і переважним чином обумовлюється простотою математичних перетворень. В даній статті, з цією метою, був здійснений пошук коефіцієнту критичного фактору, у зв'язку з тим, що він часто фігурує в багатьох комп'ютерних пакетах міцнісного аналізу, має більш вузьку область можливих значень та дозволяє отримувати результати у зручній безрозмірній формі. Якщо узагальнені величини міцності та зусилля являються детермінованими, то розрахунок на міцність та стійкість проводиться в рамках методу граничних станів з розрахунковими значеннями зовнішніх навантажень та міцності. Якщо ж хоча б одна зі складових граничної нерівності має стохастичну природу, в цьому разі повинен виконуватися розрахунок з використанням теорії імовірностей та математичної статистики. Дані методи є дещо складнішими, проте отримані на цьому підґрунті результати однозначно більш виправдані як з економічної точки зору, так і відповідно вимог до надійності і безпеки споруд

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Будемо вважати, що узагальнене зусилля $\tilde{S}$ та узагальнена міцність $\tilde{R}$ є випадковими величинами із заданими законами розподілу f_S, r_R і статистичними характеристиками: математичними очікуваннями σ_S, σ_R та середньоквадратичними відхиленнями m_S, m_R, σ_S, σ_R.

Розглянемо також ряд безрозмірних характеристик, виражених через m_S, m_R, та σ_S, σ_R:

$$V_S = \sigma_S / m_S,$$
$$V_R = \sigma_R / m_R,$$
$$p_S = \sigma_S / \sigma_R, \quad (1)$$

де V_S і V_R – коефіцієнти варіації та відношення ρ_S середньоквадратичних відхилень відповідних величин.

Вирішення задачі буде полягати у пошуку виразів для статистичних характеристик m_K, σ_K, V_K, коефіцієнту критичного фактору K_R, а також його диференціальної f_K та інтегральної F_K функцій розподілу.

Коефіцієнт критичного фактору $\tilde{K}_R$ є безрозмірною величиною, що як в теоретичному представленні, так і в процедурах імітаційного моделювання доцільно виражати через нормовані випадкові величини (величини з нульовим математичним очікуванням та одиничним середньоквадратичним відхиленням) узагальненої міцності $\tilde{\gamma}_R$ та узагальненого зусилля $\tilde{\gamma}_S$:

$$\tilde{K}_R(\tilde{\gamma}_S,\tilde{\gamma}_R) = \frac{\tilde{S}}{\tilde{R}} = \frac{m_S\cdot(1+\tilde{\gamma}_S V_S)}{m_R\cdot(1+\tilde{\gamma}_R V_R)} =$$
$$= \frac{V_R}{V_S}\,p_S\,\frac{1+\tilde{\gamma}_S V_S}{1+\tilde{\gamma}_R V_R}\ . \quad (2)$$

Оскільки математичні очікування $\tilde{\gamma}_R$ і $\tilde{\gamma}_S$ рівні нулю, можна отримати математичне очікування критичного фактору:

$$m_K = \frac{V_R p_S}{V_S}\ . \quad (3)$$

Визначення середньоквадратичного відхилення σ_K більш складне. Для його пошуку використаємо лінеаризацію нелінійної функції випадкових величин в околі її математичного очікування:

$$\sigma_K \approx p_S\frac{V_R}{V_S}\sqrt{V_S^2+V_R^2}\,,$$
$$V_K \approx \sqrt{V_S^2+V_R^2}\,. \quad (4)$$

Величина похибки, що виникає при цьому, є набагато менше квадрату середньоквадратичного відхилення

$$\Delta\sigma_K^2 \approx 2p_S^2\frac{V_R^6}{V_S^2}\ . \quad (5)$$

Для пошуку щільності розподілу коефіцієнту критичного фактору необхідно задати закон розподілу випадкових величин узагальненої міцності $\tilde{R}$ та узагальненого зусилля $\tilde{S}$. Закон розподілу величини $\tilde{R}$ будемо завжди вважати нормальним, а для величини $\tilde{S}$ розглянемо два варіанти: нормальний розподіл та подвійний експоненціальний розподіл Гумбеля. Перший розподіл використовується для опису тиску сипучого матеріалу на стінки корпусу ємності зберігання, а другий – для опису максимумів снігового та вітрового навантаження.

У загальному випадку щільність розподілу двох випадкових процесів визначається за наступною формулою [2]:

$$f(K_R) = \int_0^{\infty} f_R(R)\,f_S(K_R R)\times$$
$$\times R dR - \int_{-\infty}^{0} f_R(R)\,f_S(K_R R) R dR\ . \quad (6)$$

Коли обидві величини $\tilde{R}$ і $\tilde{S}$ підпорядковуються нормальному розподілу, формулу (6) можна представити у вигляді:

$$f_K(K_R)=\frac{1}{2\pi p_S V_R}\int_{-1/V_R}^{\infty}\left[(1+K_R V_R)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-A_K(K_R)x^2-2B_K(K_R)x-C_K(K_R)\right]dx\right. , \quad (7)$$

де A_K, B_K і C_K – безрозмірні функції.

Для випадку, коли узагальнене зусилля $\tilde{S}$ підпорядковане подвійному експоненціальному розподілу Гумбеля, щільність розподілу критичного фактору, обчислена відповідно до загальної формули (6), має вигляд:

$$f_K(K_R)=\frac{1}{K_R\sqrt{2\pi}}\int_{Z_0}^{1}\left[\ D_K(K_R,Z)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-0.5\left[D_K(K_R,Z)-\frac{1}{V_R}\right]^2\right\}\ \right]dZ\ , \quad (8)$$

де функція D_K і нижня границя інтегрування Z_0 визначені, як:

$$D_K(K_R,Z)=\frac{p_S}{K_R}\left[\frac{1}{V_S}-0,45-0,78\ln(-\ln Z)\right],$$

$$Z_0=\exp\left[-\exp\left(\frac{1,282}{V_S}-0,577\right)\right].$$

Оцінюючи процедуру виконання даних перетворень, можливо побачити складність та непрактичність отримання кінцевого аналітичного виразу відповідно до класичного підходу. Навряд чи, при сучасному розвитку комп'ютерної техніки, інженер буде користуватися спеціальними математичними пакетами для обчислення інтегральних виразів. Окрім цього, точність обчислення також залишається під сумнівом, так як підінтегральні функції при застосуванні чисельних методів часто дають некоректний результат або взагалі не можуть бути знайдені. У зв'язку з цим виникає питання можливості та доцільності безпосереднього використання процедури імітаційного моделювання в інженерних розрахунках. Оскільки, якщо вирішення певної задачі потребує використання чисельних методів розрахунку, то не має різниці, на якому етапі вони будуть використані: на початку – пряме моделювання або на кінець – обчислення інтегралу.

Розрахунок основних статистичних характеристик критичного фактору може бути виконаний за формулами (3) і (4), тому невідомою залишається функція розподілу імовірностей. Проте для розрахунків не потрібно знаходити вигляд всієї функції, а достатньо розглянути її лише в області значень аргументу при ординатах, близьких до 1,0.

Для вирішення поставленої задачі сформуємо дві незалежні вибірки об'ємом N випадкових величин $\gamma_{R,i}$ і $\gamma_{S,i}$, де $i=1,2,...N$, підпорядкованих своїм законам розподілу. В цьому разі вибірка значень критичного фактору об'ємом N буде обчислюватися за формулою:

$$K_{R,i}=\frac{m_S}{m_R}\cdot\frac{1+\gamma_{S,i}V_S}{1+\gamma_{R,i}V_R}=m_K\cdot\gamma_{K,i}\,,$$

$$\gamma_{K,i}=\frac{1+\gamma_{S,i}V_S}{1+\gamma_{R,i}V_R}. \quad (9)$$

Імовірнісні властивості випадкової величини $\tilde{K}_R$ будуть визначатися виключно властивостями випадкової величини $\tilde{\gamma}_K$, а математичне очікування m_K критичного фактору буде відігравати роль коефіцієнту пропорційності, не впливаючи на закон розподілу $\tilde{K}_R$.

Для дослідження емпіричної функції розподілу F_γ в області великих значень аргументу зручно користуватися координатною системою, де по осі ординат відкладається випадкова величина $\tilde{\gamma}_K$, а по осі абсцис $y=-\ln[-\ln(F_\gamma)]$ – аргумент подвійного експоненціального розподілу Гумбеля. Подібне представлення використовував Е. Гумбель [11] під терміном «extreme probability paper» для експозиції різних розподілів та С.Ф. Пічугін [12, 13] під назвою «загальна форма представлення навантажень», поширивши його на задачі, що враховують фактор часу. В даному дослідженні застосуємо термін «критична імовірнісна шкала» з огляду на обраний простір надійності.

Отримана за допомогою процедури імітаційного моделювання функція розподілу на даній координатній площині апроксимується в межах діапазону імовірностей $0\le y\le 12$. Для аналітичного виразу була обрана квадратна парабола. В такому разі для критичного фактору можна буде застосувати вираз наступного вигляду:

$$K_R=m_K\cdot\left(A_K y^2+B_K y+C_K\right)\ , \quad (10)$$

де коефіцієнти A_K, B_K і C_K для обраних законів розподілу випадкових величин $\tilde{\gamma}_R$, $\tilde{\gamma}_S$ наведені в табл. 1.

Аналіз даних цієї таблиці показує, що коефіцієнти A_K, B_K і C_K мало змінюються при зміні коефіцієнту варіації V_R несучої здатності (в діапазоні $V_R\in 0,05\div 0,1$). Залежність цих величин від коефіцієнту варіації V_S навантаження (внутрішнього зусилля чи напруження) майже лінійна і добре описується формулами виду:

$$A_K=\alpha_A V_S\,,\quad B_K=\alpha_B V_S\,,\quad C_K=1-\alpha_C V_S\ , \quad (11)$$

де α_A, α_B і α_C – безрозмірні коефіцієнти, що враховують вплив коефіцієнту варіації несучої здатності.

Таблиця 1. Коефіцієнти функції критичного фактору при нормальному законі розподілу несучої здатності

При нормальному законі розподілу навантаження							
A_γ, B_γ, C_γ	V_S	V_R					
		0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
A_γ	0,10	-0,00243	-0,00245	-0,00228	-0,00224	-0,00205	-0,00168
B_γ		0,07475	0,07926	0,0831	0,08904	0,09472	0,09988
C_γ		0,980	0,977	0,977	0,974	0,971	0,970
...							
A_γ	1,0	-0,02309	-0,02223	-0,02237	-0,02143	-0,02032	-0,01968
B_γ		0,64873	0,64528	0,65328	0,65093	0,65054	0,656
C_γ		0,824	0,833	0,820	0,828	0,826	0,815
При навантаженні відповідно до розподілу Гумбеля							
A_γ	0,10	-0,00069	-0,00075	-0,00076	-0,0006	-0,00031	-0,00005
B_γ		0,08928	0,09212	0,09526	0,0977	0,09994	0,10342
C_γ		0,947	0,948	0,949	0,951	0,955	0,957
...							
A_γ	1,0	-0,00351	-0,00372	-0,00389	-0,00398	-0,0033	-0,00161
B_γ		0,82568	0,83281	0,83946	0,84743	0,850	0,84344
C_γ		0,445	0,434	0,427	0,414	0,409	0,420

На рис. 1 і 2 наведені щільності розподілу випадкової величини критичного фактору на двох координатних площинах – класичній та критичній імовірнісній шкалах.

Звернемо увагу не те, що запропонований підхід може бути застосований до елементів конструкцій, що знаходяться в умовах простого розтягу чи згину в одній площині. Якщо елемент сприймає центральний стиск або завантажений осьовою силою з моментом, то необхідно виконати ряд коригувань.

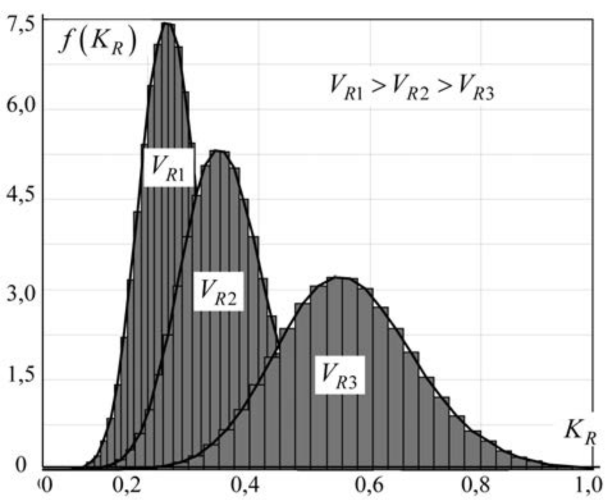

Рис. 1. Щільність розподілу критичного фактору центрально-розтягненого елементу при різній площі поперечного перерізу

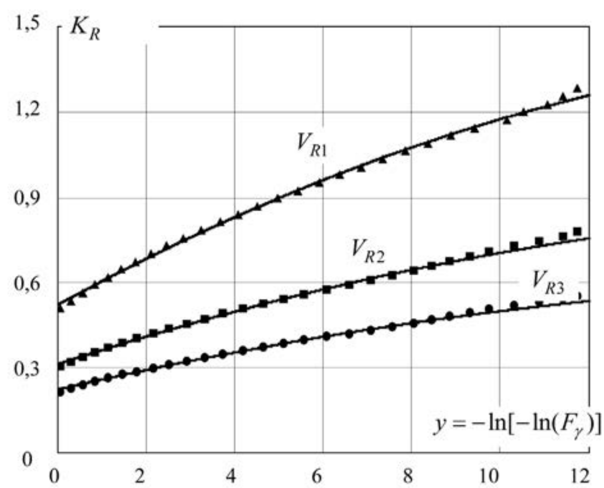

Рис. 2. Функції розподілу критичного фактору для центрально-розтягненого елементу на критичній імовірнісній шкалі

ВИСНОВКИ

1. Обґрунтована задача необхідності використання коефіцієнта критичного фактору при виконанні імовірнісних розрахунків надійності сталевих ємностей зберігання.
2. На базі класичного підходу отримані аналітичні вирази для статистичних характеристик та щільності розподілу критичного фактору.
3. Сформульована процедура отримання щільності розподілу критичного фактору із залученням чисельних методів розрахунку, що базується на першочерговому виконанні апроксимації даних в діапазоні малих імовірностей за визначеним законом розподілу та коефіцієнтом варіації випадкової величини. Виконане графічне представлення.
4. Складені таблиці числових значень ряду безрозмірних коефіцієнтів, що фігурують в імовірнісних розрахунках для різних законів розподілу.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Chen, W. & Richard Liew, J. The Handbook Civil Engineering. – United States : CRC Press, 2003. – 2783 p.
2. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель. – М. : Высшая школа, 2000. – 383 с.
3. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1982. – 351 с.
4. Ditlevsen, O. & Madsen, H. Structural Reliability Methods. – Technical University of Denmark, 2007. – 361 p.
5. Пичугин С.Ф. К вероятностным методам расчёта металлоконструкций / С.Ф. Пичугин, А.В. Махинько // Современные строительные конструкции из металла и древесины: сб. науч. тр.– Одесса: ОГАСА, 2005. – С.161 – 171.
6. Ditlevsen, O., Christensen C., & Randrup-Thomsen S. Empirical Stochastic Silo Load Model. III: Reliability Applications // J. of Eng. Mechanics. – ASCE, 1995. – Vol. 121. - № 9. – P. 987-993.
7. Winkelmann, K. The use of Response Surface Methodology for reliability estimation of aluminum silo subjected to wind load // Shell Structures: Theory and Application. – 2014. – Vol. 52. – № 4. – P. 1019-1032.
8. Бендат Д. Измерение и анализ случайных процессов / Д. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1974. – 464 с.
9. Бусленко Н.П. Метод статистического моделирования / Н.П. Бусленко. – М. : Статистика, 1970. – 112 с.
10. Casciati, F. & Roberts, B. Mathematical Models for Structural Reliability Analysis. – United States : CRC Press, 1996. – 384 p.
11. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений / Э. Гумбель. – М. : Мир, 1965. – 450 с.
12. Пичугин С.Ф. Вероятностное представление нагрузок, действующих на строительные конструкции / С.Ф. Пичугин // Известия ВУЗов. – 1995. – № 4. – С. 12–18.
13. Пичугин С.Ф. Надёжность стальных конструкций производственных зданий : монография / С.Ф. Пичугин. – Полтава : АСМИ, 2009. – 452 с.

REFERENCES

1. Chen, W. & Richard Liew, J. The Handbook Civil Engineering. – United States : CRC Press, 2003.
2. Venttsel E.S. Teoriia sluchainykh protsessov i ee inzhenernye prilozheniia / E.S. Venttsel. – M. : Vysshaia shkola, 2000.
3. Bolotin V.V. Metody teorii veroiatnostei i teorii nadezhnosti v raschetakh sooruzhenii. – M.: Stroiizdat, 1982.
4. Ditlevsen, O. & Madsen, H. Structural Reliability Methods. – Technical University of Denmark, 2007.
5. Pichugin S.F. K veroiatnostnym metodam rascheta metallokonstruktsii / S.F Pichugin, A.V. Makhinko // Sovremennye stroitelnye konstruktsii iz metalla i drevesiny.– Odessa : OGASA, 2005. – S. 161-171.
6. Ditlevsen, O., Christensen C., & Randrup-Thomsen S. Empirical Stochastic Silo Load Model. III: Reliability Applications // J. of Eng. Mechanics. – ASCE, 1995. – Vol. 121. - № 9. – P. 987-993.
7. Winkelmann, K. The use of Response Surface Methodology for reliability estimation of aluminum silo subjected to wind load // Shell Structures: Theory and Application. – 2014. – Vol. 52. – № 4. – P. 1019-1032.
8. Bendat D. Izmerenie i analiz sluchainykh protsessov / D. Bendat, A. Pirsol. – M. : Mir, 1974.
9. Buslenko N.P. Metod statisticheskogo modelirovaniia / N.P. Buslenko. – M. : Statistika, 1970.
10. Casciati, F. & Roberts, B. Mathematical Models for Structural Reliability Analysis. – United States : CRC Press, 1996.
11. Gumbel E. Statistika ekstremalnykh znachenii / E. Gumbel. – M.: Mir, 1965.
12. Pichugin S.F. Veroiatnostnoe predstavlenie nagruzok deistvuiushchikh na stroitelnye konstruktsii / S.F Pichugin // Izvestiia VUZov. – 1995. – № 4. – S. 12–18.
13. Pichugin S.F. Nadezhnost stalnykh konstruktsii proizvodstvennykh zdanii monografiia / S.F Pichugin. – Poltava : ASMI, – 2009.

Стаття надійшла до редакції 25.02.2019 р.