

БАЛАНС МОЩНОСТЕЙ В ЦЕПЯХ С ИНДУКТИВНО-СВЯЗАННЫМИ КАТУШКАМИ

Федоров М. М., Кутковой И. П.

Предложен алгоритм составления баланса мощностей в разветвленных цепях с индуктивно-связанными катушками. Рассмотрены особенности передачи электромагнитной мощности от одной катушки к другой при последовательном, параллельном и смешанном включении индуктивно-связанных катушек независимо от вида их включения. Приведенный теоретический материал подтверждается конкретными примерами. Путем введения в одну из ветвей при параллельном соединении индуктивно-связанных катушек, рассмотрен пример, позволяющий изменять направление потока передаваемой электромагнитной мощности. С применением теоремы Лонжевена, составлен баланс мощностей для произвольной электрической цепи с индуктивно-связанными элементами.

Запропонований алгоритм складання балансу потужностей в розгалужених ланцюгах з індуктивно-зв'язаними катушками. Розглянуті особливості передачі електромагнітної потужності од однієї котушки до іншої при послідовному, паралельному і змішаному включенні індуктивно-зв'язаних катушок незалежно від їх включення. Приведений теоретичний матеріал підтверджується конкретними прикладами. Шляхом введення в одну з гілок при паралельному з'єднанні індуктивно-зв'язаних катушок, розглянуто приклад, який дозволяє змінювати напрям потоку електромагнітної потужності. Із застосуванням теореми Лонжевена, складений баланс потужностей для довільного електричного кола з індуктивно-зв'язаними елементами.

The algorithm drawing up balance of capacities in branched chains with the inductive and connected coils is offered. Features of transfer of electromagnetic power of odes of one coil to another are considered at the consecutive, parallel and mixed turning on of the inductive and connected coils irrespective of a type of their inclusion. The given theoretical material is confirmed by concrete examples. By introduction in one of branches at parallel connection of the inductive and connected coils, an example, allowing to change the direction of a stream of the given electromagnetic power is reviewed. Using Lonzheven's theorem, the balance of capacities for arbitrary electrical circuit with inductive coupled elements is made.

Федоров М. М.

д-р техн. наук, проф. ДонНТУ

Кутковой И. П.

аспирант каф. ЭСА, ДГМА

ivan_petrovi4_76@mail.ru

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск.
ДонНТУ – Донецкий национальный технический университет, г. Донецк.

УДК 621.3.013

Федоров М. М., Кутковой И. П.

БАЛАНС МОЩНОСТЕЙ В ЦЕПЯХ С ИНДУКТИВНО-СВЯЗАННЫМИ КАТУШКАМИ

В разветвленных электрических цепях с индуктивно-связанными катушками, баланс мощностей имеет определенные особенности, связанные с мощностью, передаваемой электромагнитным путем. В этом случае, алгоритм составления баланса мощностей независимо от вида их включения (согласного или встречного), представляет особый интерес.

Вопросы анализа и расчета процессов в цепях с индуктивными связями, в достаточной степени изложены в различных источниках [1, 2]. Однако составлению баланса мощности уделено недостаточное внимание. Поэтому составление баланса мощности при различных соединениях индуктивно-связанных элементов, представляет практический и теоретический интерес.

Цель статьи – составление баланса мощностей в цепях с индуктивно-связанными катушками, включая особенности передачи электромагнитной мощности при их различных включениях.

При наличии индуктивных связей имеет место изменение энергетических соотношений за счет наличия магнитного потока, обеспечивающего индуктивную связь. В этом случае следует выделить комплексную мощность, передаваемую электромагнитным путем от одной катушке к другой, которая в общем случае равна:

$$\underline{S}_{эм12} = \underline{U}_{M1} \underline{I}_1^* = P_{эм} + jQ_{эм}.$$

Рассмотрим алгоритм составления баланса мощностей для различных электрических цепей с индуктивно-связанными катушками при различном их включении.

Комплексная мощность, потребляемая из сети, при последовательном соединении (рис. 1) равна:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ.$$

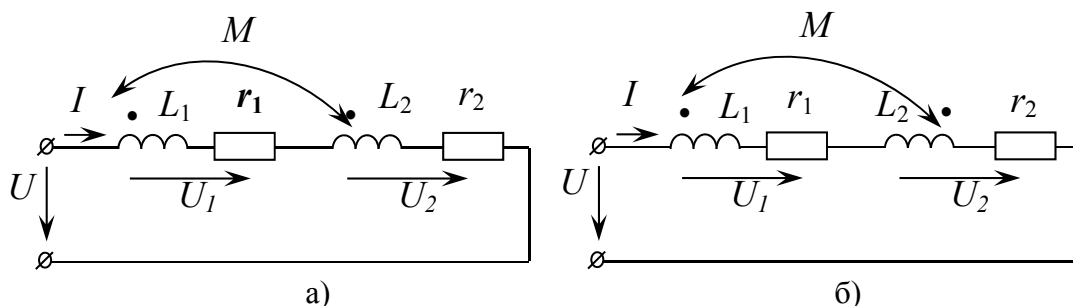


Рис. 1. Последовательное соединение индуктивно-связанных катушек: а – согласное включение; б – встречное включение

Электромагнитная мощность при последовательном соединении равна:

$$\underline{S}_{эм12} = \underline{U}_{M1} \underline{I}^* = j \cdot \underline{I} \cdot \underline{x}_M \cdot \underline{I}^* = j \cdot \omega \cdot M \cdot I^2 = jQ_{эм}.$$

Таким образом, электромагнитная мощность при последовательном соединении при согласном и встречном включении имеет чисто реактивный характер. Следовательно, активная мощность от первой катушки ко второй не передается.

Комплексные мощности, потребляемые первой и второй катушками, соответственно равны:

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \underline{I} \cdot (r_1 + j(x_1 \pm x_M)) \cdot \underline{I}^* = I^2 r_1 + jI^2(x_1 \pm x_M);$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \underline{I} \cdot (r_2 + j(x_2 \pm x_M)) \cdot \underline{I}^* = I^2 r_2 + jI^2(x_2 \pm x_M).$$

Таким образом, мощность, потребляемая первой катушкой, расходуется на активную составляющую $I^2 r_1$ мощности и реактивную, которая расходуется на создание магнитного поля первой катушки и часть поля взаимной индукции. Аналогично, мощность, потребляемая второй катушкой, расходуется на активную составляющую $I^2 r_2$ мощности и реактивную составляющую мощности.

Следовательно, баланс мощности при последовательном соединении индуктивно-связанных катушек имеет вид:

$$P = I^2(r_1 + r_2);$$

$$Q = I^2 \cdot (x_1 + x_2) \pm 2 \cdot I^2 x_M.$$

Комплексная мощность, потребляемая из сети, при *параллельном соединении* (рис. 2) равна:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ.$$

Мощность, передаваемая электромагнитным путем от одной катушке к другой, соответственно равна:

$$\underline{S}_{\text{ЭМ12}} = \underline{U}_{M1} \underline{I}_1^* = j \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{x}_M \cdot \underline{I}_1^* = j \cdot x_M \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot e^{j(\psi_{i2} - \psi_{i1})} = P_{\text{эм}} + jQ_{\text{эм}};$$

$$\text{где } P_{\text{ЭМ12}} = x_M \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos(90^\circ - (\psi_{i1} - \psi_{i2})),$$

$$Q_{\text{ЭМ12}} = x_M \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \sin(90^\circ - (\psi_{i1} - \psi_{i2})).$$

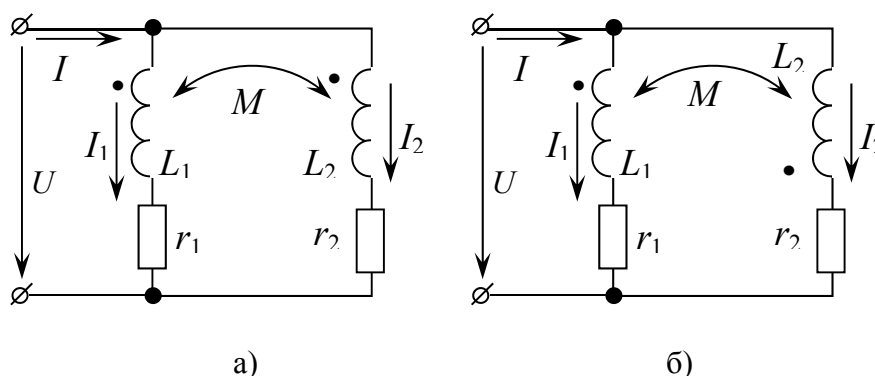


Рис. 2. – Параллельное соединение индуктивно-связанных катушек
а – согласное включение; б – встречное включение

Проанализируем полученные результаты.

Направление активной мощности, передаваемой электромагнитным путем, определяется сдвигом по фазе ψ_{i1} и ψ_{i2} между токами.

Если индуктивно связанные катушки одинаковые, т. е. $\psi_{i1} = \psi_{i2}$, то

$$\underline{S}_{\text{ЭМ12}} = \underline{U}_{M1} I_2^* = j \cdot I_1 \cdot x_M \cdot I_2^* = j \cdot \omega \cdot M \cdot I_1^2 = jQ_{\text{ЭМ12}}.$$

Следовательно, $P_{\text{ЭМ12}} = 0$ и активная мощность не передается электромагнитным путем.

Если $\psi_{i1} > \psi_{i2}$, то $90^\circ - (\psi_{i1} - \psi_{i2}) < 90^\circ$. Следовательно, $P_{\text{ЭМ12}} > 0$ и активная мощность передается от первой катушки ко второй. В этом случае баланс активной мощности имеет вид:

$$P_1 = I_1^2 r_1 + P_{\text{ЭМ}},$$

$$P_2 = I_2^2 r_2 - P_{\text{ЭМ}}.$$

Если $\psi_{i2} > \psi_{i1}$, то $90^\circ - (\psi_{i1} - \psi_{i2}) > 90^\circ$, тогда $P_{\text{ЭМ12}} < 0$ и активная электромагнитная мощность передается от второй катушки к первой. В этом случае баланс активной мощности имеет вид:

$$P_1 = I_1^2 r_1 - P_{\text{ЭМ}},$$

$$P_2 = I_2^2 r_2 + P_{\text{ЭМ}}.$$

Комплексные мощности, потребляемые первой \underline{S}_1 и второй \underline{S}_2 катушками соответственно равны:

$$\underline{S}_1 = P_1 + jQ_1, \quad \underline{S}_2 = P_2 + jQ_2.$$

Баланс активной мощности имеет вид

$$P = P_1 + P_2.$$

Таким образом, часть активной мощности $I_i^2 \cdot r_i$ каждой из катушек расходуется на их нагрев, а оставшаяся часть $P_{\text{ЭМ}}$ передается электромагнитным путем от первой катушки ко второй, либо наоборот.

Активная мощность, потребляемая из сети, равна

$$P = P_1 + P_2 = I_1^2 \cdot r_1 + I_2^2 \cdot r_2.$$

Рассмотрим пример составления баланса мощностей для электрической цепи, представленной на рисунке 2, с параметрами: $r_1 = 60$ Ом, $x_{L1} = 150$ Ом, $r_2 = 70$ Ом, $x_{L2} = 240$ Ом, $x_M = 80$ Ом, $U = 100$ В.

В табл. 1 приведены рассчитанные величины токов рассматриваемой цепи при согласном и встречном включении индуктивно-связанных катушек и значение электромагнитной мощности.

Таблица 1

Результаты расчетов по схеме рис. 2

	I_1 , А	ψ_1 , град	I_2 , А	ψ_2 , град	I , А	ψ , град	$\underline{S}_{\text{ЭМ12}}$, ВА	\underline{S}_1 , ВА	\underline{S}_2 , ВА	\underline{S} , ВА
Согласное включение	0,49	-69	0,26	-86	0,74	-75	2,97+ j9,74	17,44+ j45,9	1,73+ j25,86	19,7+ j71,76
Встречное включение	0,92	-58	0,67	-60	1,59	-59	1,96+ j49,2	48,93+ j78,02	33,22+ j57,98	82,15+ j136,01

В табл. 2 приведен баланс мощностей рассматриваемой цепи при согласном и встречном включении индуктивно-связанных.

Таблица 2

Баланс мощностей для схемы рис. 2

	P_1 , Вт	$I_1^2 r_1$, Вт	$P_{эм12}$, Вт	P_2 , Вт	$I_2^2 r_2$, Вт	$I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2$, Вт	$P_1 + P_2$, Вт
Согласное включение	17,44	14,46	2,97	1,73	4,7	19,17	19,17
Встречное включение	48,93	50,89	1,96	33,22	31,26	82,15	82,15

Соотношения между ψ_{i1} и ψ_{i2} можно менять путем введения в одну из ветвей емкостного элемента. При этом изменяя величину x_C , можно добиться изменения направления потока мощности.

Рассмотрим пример, показывающий возможность изменения направления потока передаваемой электромагнитной мощности. Во вторую ветвь при параллельном соединении индуктивно-связанных катушек, добавляем емкостной элемент, величину которого можно изменять

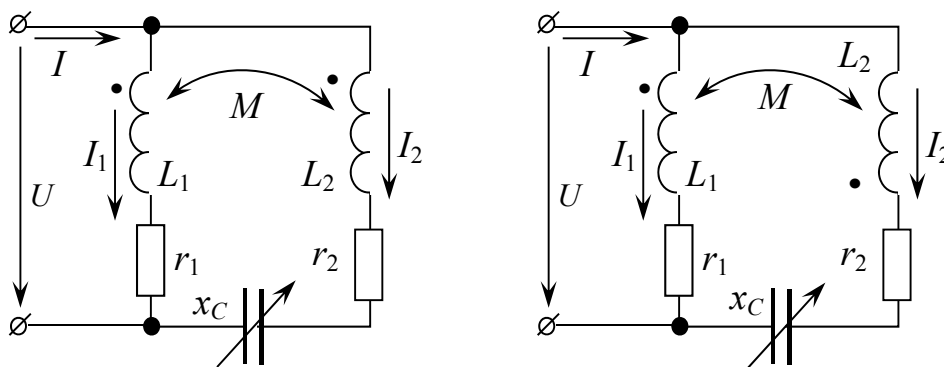


Рис. 3. – Параллельное соединение индуктивно-связанных катушек

В табл. 3 приведены значения токов в ветвях и передаваемая электромагнитная мощность при различных значениях емкостного сопротивления

Таблица 3

Результаты расчетов по схеме рис. 3

	x_C , Ом	I_1 , А	ψ_1 , град	I_2 , А	ψ_2 , град	I , А	ψ , град	$P_{эм12}$, Вт
Согласное включение	0	0,49	-69	0,26	-86	0,74	-75	2,97
	51,7	0,46	-72	0,33	-80	0,79	-75	1,63
	78,3	0,44	-75	0,38	-75	0,82	-75	0
	100	0,43	-78	0,43	-69	0,85	-74	-2,24
Встречное включение	0	0,92	-58	0,67	-60	1,59	-59	1,96
	51,7	0,99	-54	0,85	-54	1,84	-54	0
	78,3	1,03	-50	0,97	-48	2,01	-49	-2,15
	100	1,07	-46	1,1	-43	2,17	-45	-4,99

Из приведенной таблицы видно, что при включении емкостного сопротивления, электромагнитная мощность вначале передается от первой ветви ко второй, а затем меняет направление.

При составлении баланса мощности произвольной электрической цепи при наличии индуктивно-связанных катушек (рис. 4), используется теорема Лонжевена [3], согласно которой: в любой линейной электрической цепи сумма активных мощностей источников ЭДС равна сумме активных мощностей приемников, а сумма реактивных мощностей источников ЭДС равна сумме реактивных мощностей приемников. При этом под реактивной мощностью понимают сумму произведений квадратов токов ветвей, умноженных на реактивное сопротивление ветвей, подсчитанных без учета явления взаимоиндукции, плюс алгебраическая сумма мощностей, переносимых магнитными потоками из одних ветвей в другие вследствие явления взаимоиндукции.

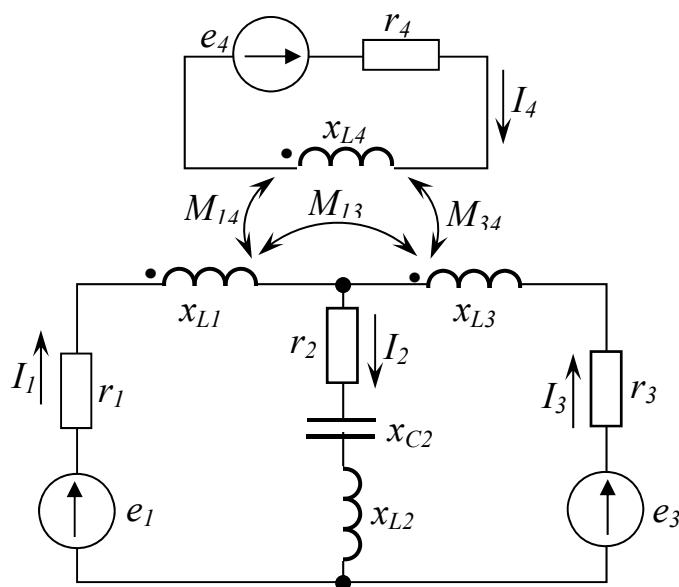


Рис. 4. – Смешанное соединение индуктивно-связанных катушек

Математическая запись теоремы Лонжевена в общем виде имеет вид:

– баланс активных мощностей:

$$\operatorname{Re}(\sum \underline{E}_{ij} \underline{I}_{ij}^*) = \sum I_{ij}^2 r_{ij};$$

– баланс реактивных мощностей:

$$\operatorname{Im}(\sum \underline{E}_{ij} \underline{I}_{ij}^*) = \sum I_{ij}^2 x_{ij} \pm 2 \sum_{\substack{ij \\ pq}} I_{ij} I_{pq} x_{M \frac{ij}{pq}} \cos(\varphi_{ij} - \varphi_{pq}).$$

Рассмотрим пример составления баланса мощностей для электрической цепи, представленной на рис. 4, с параметрами: $r_1 = 60$ Ом, $x_{L1} = 160$ Ом, $r_2 = 70$ Ом, $x_{L2} = 130$ Ом, $r_3 = 30$ Ом, $x_{L3} = 90$ Ом, $r_4 = 20$ Ом, $x_{L4} = 80$ Ом, $x_{M14} = 50$ Ом, $x_{M34} = 60$ Ом, $x_{M13} = 70$ Ом, $E_1 = 75e^{j30}$ В, $E_3 = 50e^{-j45}$ В, $E_4 = 100e^{j60}$ В.

Первая, вторая и третья ветви, приведенной электрической цепи, кроме индуктивных связей имеют и потенциальную связь. Четвертая ветвь, в приведенной схеме, имеет только индуктивную связь, а вторая ветвь не имеет индуктивных связей. Относительно выбранных положительных направлений токов \underline{I}_1 и \underline{I}_3 индуктивно-связанные катушки x_{L1} и x_{L3} включены встречно, относительно токов \underline{I}_1 и \underline{I}_4 индуктивно-связанные катушки x_{L1} и x_{L4} включены встречно, индуктивно-связанные катушки x_{L3} и x_{L4} относительно токов \underline{I}_3 и \underline{I}_4 включены согласно.

В табл. 4 приведены рассчитанные величины токов рассматриваемой цепи и значение электромагнитной мощности.

Таблица 4

Результаты расчетов по схеме рис. 4

\underline{I}_1 , А	ψ_1 , град	\underline{I}_2 , А	ψ_2 , град	\underline{I}_3 , А	ψ_3 , град	\underline{I}_4 , А	ψ_4 , град	$\underline{S}_{эм13}$, ВА	$\underline{S}_{эм34}$, ВА	$\underline{S}_{эм14}$, ВА
0,73	-1	0,36	-96	0,85	-156	2,09	4	18,32- j39,26	-36,57- j99,21	-6,36+ j76,07

Таким образом, активная мощность передается от первой катушки к третьей, от четвертой катушки к третьей и от четвертой катушки к первой.

В табл. 5 приведен баланс мощностей рассматриваемой цепи.

Таблица 5

Баланс мощностей для схемы рис. 4

\underline{S}_1 , ВА		\underline{S}_3 , ВА			\underline{S}_4 , ВА			$\Sigma \underline{S}$, ВА	
42,28+j27,95		-14,86+j39,57			117,15+j172,47			149,57+j239,99	
$I_1^2 r_1$, Вт	$I_2^2 r_2$, Вт	$I_3^2 r_3$, Вт	$I_4^2 r_4$, Вт	$\Sigma I_i^2 r_i$, Вт	$I_1^2 x_1$, ВАр	$I_2^2 x_2$, ВАр	$I_3^2 x_3$, ВАр	$I_4^2 x_4$, ВАр	$\Sigma I_i^2 x_i$, ВАр
32,17	9,02	31,43	86,94	149,57	85,79	14,18	64,3	347,75	512,03

$$\begin{aligned} \text{Баланс реактивных мощностей} - Q &= Q_{np} - 2 \cdot Q_{эм13} + 2 \cdot Q_{эм34} - \\ &- 2 \cdot Q_{эм14} = 512,03 - 2 \cdot (-39,26) + 2 \cdot (-99,21) - 2 \cdot 76,07 = 239,99 \text{ ВАр.} \end{aligned}$$

ВЫВОДЫ

Предложенный алгоритм составления баланса мощностей в разветвленных цепях с индуктивно-связанными катушками позволяет определять энергетические соотношения в электрических цепях, путем передачи электромагнитной мощности от одной катушки к другой при их различных включениях. Путем введения в одну из параллельных ветвей индуктивно-связанных катушек, емкостного элемента, показана возможность изменения направления передачи электромагнитной мощности от одной ветви к другой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рибалко М. П. Теоретичні основи електротехніки: лінійні електричні кола: Підручник. / М. П. Рибалко, В. О. Есауленко, В. І. Костенко. – Донецьк : Новий світ, 2003. – 513с.
2. Основы теории цепей. /Г. В. Зевеке [и др.] – Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. ISBN: 5-283-00523-2.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи: Учебник. /Л. А. Бессонов. – Гардарикит, 2007. – 701с. ISBN 5-8297-0159-6.