УДК 664.02

Варивода Ю.Ю.[1], к.т.н., доцент,
Ціж Б.Р.[1,2], д.т.н., професор
Волос В.О.[1], к.ф.-м.н., доцент,
Чохань М.І.[1], к.т.н., доцент,
Сенів Р.В.[1], асистент
Гончар Ф. М.[3] . к. ф. – м. н., доцент ©
[1]*Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій імені С. З. Гжицького*
[2]*Університет Казимира Великого в Бидгощі, Польща*
[3]*Національний університет «Львівська політехніка»*

ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ РОБОЧИХ ВУЗЛІВ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ У ДЕТАЛЯХ І МЕХАНІЗМАХ МАШИН ТА УСТАТКУВАННІ ХАРЧОВОЇ ПРОМИСЛОВОСТІ.

Робота присвячена вивченню процесу теплопровідності у неоднорідних вузлах циліндричного типу. Розглянуто скінченне циліндричне ізотропне тіло, що містить чужорідне ненаскрізне торцеве включення типу порожнистого циліндра заданого внутрішнього і зовнішнього радіусів та висоти. Через торцеву і твірну поверхні такого неоднорідного тіла здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Зображуючи теплофізичні характеристики такого неоднорідного тіла як єдиного цілого для всієї області існування, за допомогою асиметричних одиничних функцій та застосування алгебри цих функцій та їх властивостей із рівняння теплопровідності для двовимірних неоднорідних структур, отримано частково-вироджене диференціальне рівняння теплопровідності другого порядку в частинних похідних із коефіцієнтами імпульсного та ступеневого типу. Показано, що шляхом граничного переходу із точного рівняння теплопровідності можна отримати часткові випадки наближених рівнянь, коли включення є тонкостінним $(\frac{2h}{R} \ll 1)$ *та коли включення наскрізне* $(d = l)$ *Отримання останніх рівнянь, значно спрощує процес розв'язання відповідних крайових задач теплопровідності.*

Ключові слова: *задача теплопровідності, тіла неоднорідної структури, чужорідні включення, порожнистий циліндр, ступеневі асиметричні функції, граничний перехід, ідеальний тепловий контакт.*

Вступ. Бурхливе застосування в різних галузях сучасної техніки харчової промисловості знаходять циліндричні тіла неоднорідної структури, що містять чужорідні включення у вигляді порожнистих циліндрів різної величини та форми [2,3]. Розв'язання проблем міцності для неоднорідних вузлів апаратів і машин харчової промисловості, оптимізації технологічних процесів [3,4], вимагають розробки нових методів розв'язку задач термомеханіки тіл неоднорідної структури [9]. Першим етапом для дослідження теплового стану таких тіл являється знаходження температурних полів в неоднорідних елементах конструкцій. При цьому відомо [10], що однією із ефективних теорій розв'язку проблем термомеханіки тіл неоднорідної структури на сучасному етапі її дослідження є теорія, що базується на застосуванні аппарату узагальнених функцій. Це значно спрощує і зменшує трудомісткість подібного роду задач, розв'язки яких отримуються, в основному, методом спряження або ж числовими методами.

Матеріали і методи досліджень. Виведено рівняння нестаціонарної теплопровідності для кусково-одноріного тіла, що становить собою математичну модель досліджуваного циліндричного робочого вузла. При цьому застосовувався апарат, алгебра та властивості теорії узагальнених функцій. [1-4].

Розглянемо циліндричне ізотропне тіло, що містить чужорідне включення типу порожнистого циліндра зовнішнього $R_1 = R + h$ і внутрішнього$R_2 = R - h$ радіусів і висоти d (рис. 1.). Через поверхню $r = R_o$ і $z = 0$, $z = l$ тіла здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Теплофізичні характеристики системи виразимо у вигляді [5]

$$c(r,z) = c_1 + (c_0 - c_1)N(r)\ S\_(d - z), \qquad (1)$$

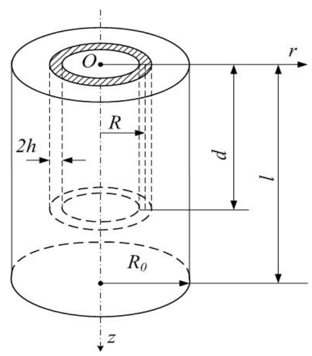

Рис. 1.

де c_1, c_0 - теплофізичні характеристики основного матеріалу та включення, $N(r) = S\_(r - R_1) - S_+(r - R_2)$ – характеристична функція,

$$S_{\pm}(\text{з}) = \begin{cases} 1, \text{з} > 0, \\ \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}, \text{з} = 0 \\ 0, \text{з} < 0 \end{cases}$$ - асиметричні одиничні функції.

Для визначення нестаціонарного двовимірного температурного поля в неоднорідному циліндричному тілі згідно рівняння теплопровідності для неоднорідних структур [6]

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\text{л}_t(r,\text{ц},\text{з})\frac{\partial t}{\partial z}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\text{л}_t(r,\text{ц},\text{з})r\frac{\partial t}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \text{ц}}\cdot\left[\text{л}_t(r,\text{ц},\text{з})\frac{\partial t}{\partial \text{ц}}\right] = C_v(r,\text{ц},\text{з})\dot{t}, \qquad (1)$$

де $\text{л}_t(r,\text{ц},\text{з})$, $C_v(r,\text{ц},\text{з})$ - неоднорідні коефіцієнти теплопровідності і теплоємності відповідно, $\dot{t} = \frac{\partial t}{\partial \phi}$, ϕ - час, матимемо:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left[r\text{л}_t(r,\text{ц},\text{з})\frac{\partial t}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial \text{з}}\cdot\left[\text{л}_t(r,\text{ц},\text{з})\frac{\partial t}{\partial z}\right] = c\,(r,\text{з})\text{c}(r,\text{з})\dot{t} \qquad (2)$$

або $$л_t(r,z)\Delta t + \frac{\partial л_t(r,z)}{\partial r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial л_t(r,z)}{\partial z}\frac{\partial t}{\partial z} = c(r,z)c(r,z)\dot{t}, \qquad (3)$$

де $л_t(r,z)$, $c(r,z)$, $c(r,z)$ - коефіцієнт теплопровідності, питома теплоємність і густина неоднорідного тіла, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Крайові умови в нашому випадку мають вигляд [7,8]:

$$\left.\begin{array}{c} л_t^{(1)}\frac{\partial t}{\partial r} + б_r(t - t_c) = 0 \; при \; r = R_o, \\ л_t^{(1)}\frac{\partial t}{\partial z} + б_0(t - t_0) = 0 \; при \; z = 0, \\ л_t^{(1)}\frac{\partial t}{\partial z} + б_l(t - t_c) = 0 \; при \; z = l, \\ t(r,z,ф) = t_0(r,z) \, при \, ф = 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Тут $б_r$ і $б_0$, $б_l$- коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $r = R_o$ і $z = 0$, $z = l$, t_c - температура середовища, що омиває ці поверхні.

Зображуючи коефіцієнт теплопровідності, питому теплоємність і густину у вигляді (1) і підставляючи отриманий результат у рівняння (3) знаходимо:

$$л_t(r,z)\Delta t + (л_t^{(0)} - л_t^{(1)})\left\{\left[д_-(r-R_1)\frac{\partial t}{\partial r}|_{r=R_1} - д_+(r-R_2)\frac{\partial t}{\partial r}|_{r=R_2}\right]\cdot S_-(d$$

$$- - z) - N(r)\, д_-(d - z)\frac{\partial t}{\partial z}|_{z=d}\right\} = \left[c_1 c_1 + (c_0 c_0 - c_1 c_1)N(r)\cdot S_-(d - z)\right]\dot{t},$$

(5)

де $д_\pm(z) = \frac{d\, S_\pm(z)}{dz}$.

Приймаючи до уваги, що

$$\frac{1}{л_t(r,z)} = \frac{1}{л_t^{(1)} + (л_t^{(0)} - л_t^{(1)})N(r)S_-(d-z)} = \frac{1}{л_t^{(1)}} + \left(\frac{1}{л_t^{(0)}} - \frac{1}{л_t^{(1)}}\right)N(r)S_-(d - z)$$

та використовуючи співвідношення

$$S_+(z)д_+(z) = д_+(z),\; S_-(z)д_-(z) = 0, \qquad (6)$$

$$S_-(r-R_1)д_+(r-R_2) = д_+(r-R_2],\; S_+(r-R_2)д_-(r-R_1) = 0,$$

приходимо до наступного частково-виродженого диференціального рівняння теплопровідності із коефіцієнтами типу ступеневих функцій та дельта – функцій Дірака [10]

$$\Delta t - (1 - K_л^{-1}) \left\{\left[д_-(r - R_1)\frac{dt}{dr}|_{r=R_1} - д_+(r - R_2)\frac{dt}{dr}|_{r=R_2}\right] S_-(d - z) - \right.$$

$$\left. - N(r)\, д_-(d - z)\frac{\partial t}{\partial z}|_{z=d}\right\} = \left[\frac{1}{a_1} + \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right) N(r) S_-(d - z)\right] \dot{t}, \qquad (7)$$

де $a_1 = \frac{л_t^{(1)}}{c_1 c_1}$, $a_0 = \frac{л_t^{(0)}}{c_0 c_0}$ - коефіцієнти температуропровідності основного матеріалу і матеріалу включення $K_л = \frac{л_t^{(1)}}{л_t^{(0)}}$ - критерій, що характеризує відносну теплопровідність тіла.

Таким чином, для визначення нестаціонарного температурного поля у неоднорідному тілі із ненаскрізним включенням типу порожнистого циліндра необхідно розв'язати рівняння теплопровідності (7) при крайових умовах (4).

Розглянемо частковий випадок тонкостінного циліндричного включення $(\frac{2h}{R} \ll 1)$. Зобразимо тоді теплофізичні характеристики системи із ненаскрізним включенням за допомогою одиничної та повної дельта-функції Дірака [11]:

$$c(r,z) = c_1 + P_0(1 - K_p)\, д(r - R)\; S_-(d - z), \qquad (8)$$

де $P_0 = 2c_0 h$, $K_p = \frac{c_1}{c_0}$.

Підставляючи (8) у рівняння (1) приходимо до наближеного диференціального рівняння теплопровідності з коефіцієнтами типу імпульсних функцій для випадку тонкостінного включення у вигляді:

$$\Delta t - (1 - K_л^{-1})\, 2h \left\{\left[д(r - R)\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}|_{r=R_1} + \frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial r}|_{r=R} + д'(r - R)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{dt}{dr}|_{r=R_2}\right] S_-(d - z) - д(d - z)\partial_-(d - z)\frac{\partial t}{\partial z}|_{\substack{r=R\\ z=d}}\right\} =$$

$$= \frac{c_1 c_1}{л_t^{(1)}} + \left(\frac{c_0 c_0}{л_t^{(0)}} - \frac{c_1 c_1}{л_t^{(1)}}\right) 2hд(r - R) S_-(d - z)\dot{t}_{r=R}\,. \qquad (9)$$

Відповідно, покладаючи висоту включення рівною довжині твірної скінченного неоднорідного циліндричного тіла $(d = l)$, знаходимо наближене дифенціальне рівняння теплопровідності для одновимірної задачі із чужорідним наскрізним включенням висота якого дорівнює висоті циліндра-матриці:

$$\Delta t - (1 - K_л^{-1}) \left\{ \left[д_-(r - R_1)\frac{dt}{dr}|_{r=R_1} - д_+(r - R_2)\frac{dt}{dr}|_{r=R_2} \right] S_-(d - z) - \right.$$

$$\left. - N(r)\, д_-(d - z)\frac{\partial t}{\partial z}|_{z=d} \right\} = \left[\frac{1}{a_1} + \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} \right) N(r) \right] \dot{t}. \qquad (10)$$

Знову ж таки, якщо наскрізне чужорідне включення тонкостінне, то рівняння теплопровідності (10) буде наступним:

$$\Delta t - (1 - K_л^{-1})\frac{dt}{dr}|_{r=R_2}\, д\,(r - R) = \left[\frac{1}{a_1} + \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} \right) 2hд\,(r - R)\dot{t} \right] \qquad (11)$$

Висновки. Отримані рівняння крайової задачі нестаціонарної теплопровідності для неоднорідних циліндричних тіл із чужорідним включення типу порожнистого циліндра дають можливість суттєво (на порядок і більше) зменшити громіздкість математичних викладок та значно спростити процесс знаходження температурних полів у складних тілах неоднорідної структури. Процес знаходження аналітичного (точного) розв'язку для таких тіл методом спряження окремих компонентів або «методом зшивання» в більшості випадків з математичної точки зору є надзвичайно ускладненим, або часто і унеможливленим. Задачі такого типу розв'язувались лише числовими методами, що приводило лише до наближених результатів. Спрощені рівняння теплопровідності (формули (9 - 11), що отримуються із загального рівняння (7), і які вже відомі у літературі раніше як такі, що отримані методом «зіткнення» окремих компонентів кусково-однорідних тіл при повному забезпеченні умов ідеального теплового контакту на поверхнях спряження, лише підтверджують їх достовірність і право запропонованого методу із застосуванням узагальнених функцій на життя.

Література

1. Варивода Ю.Ю., Волос В.О., Гончар Ф.М., Сенів Р.В. Розрахунок температурних режимів у сховищах під час зберігання продовольчої сировини і готової харчової продукції. – В кн. «Матеріали Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука», Київ, Ч.I. Диференціальні та інтегральні рівняння, С. 91.

2. Плахотін В.І., Тюрікова І.С., Хомич І.П. Теоретичні основи технологій харчових виробництв. – К. : Центр навч. літератури. 2006. – 640 с.

3. Білонога Ю.Л. Процеси і апарати харчових виробництв, Львів, Видав. «Ліга - Прес», 2003, 166 с.

4. Варивода Ю.Ю., Волос В.О., Гончар Ф.М. Дослідження реологічних властивостей деяких харчових продуктів. – В кн. «Матеріали Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука», Київ, Ч.I. Диференціальні та інтегральні рівняння, С. 92.

5. Варивода Ю.Ю., Ціж Б.Р., Волос В.О., Чохань М. І., Філіпсонов Р.В., Гончар Ф.М. Оцінка точності розв'язків задач теплопровідності для неоднорідних елементів конструкцій, що містять чужорідні включення. – Науковий вісник ЛНУВМ та БТ імені С.З. Гжицького, Львів, Т. 14, № 3 (53), Ч. 3, С. 257 -265.

6. Волос В.О., Фолькенфлік Ю.Я. Неусталені температурні напруження в металево – скляному вузлі тримача оболонки кольорового кінескопу при його відкачці. – В кн. «Підвищення якості електронно-променевих приладів у Х- ій п'ятирічці» : Тези доповідей, К.: Наук. думка, 1977, С. 6-7.

7. Коляно Ю.М., Малкіель Б.С., Волос В.О., Кушнір Р.М. Температурні напруження в металево – скляному вузлі тримача кольророздільної маски кольорового кінескопу. – В кн. «Якість, міцність, надійність і технологічність електровакуумних приладів», К.: Наук. думка, 1976, С. 140-152.

8. Коляно Ю.М., Микитишин М.І., Койфман Ю.І. Напруження у круглій пластині, що нагрівається по циліндричній і боковій поверхнях. – Теплові напруження в елементах конструкцій, 1976, Вип. 16, С. 56-62.

9. Підстригач Я.С., Коляно Ю.М. Узагальнена термомеханіка, К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.

10. Коляно Ю.М. Застосування узагальнених функцій в термомеханіці кусково – однорідних тіл. – Мат. методи і фізико-механічні поля, 1978, Вип.7 С. 7-11.

11. Підстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурні поля і напруження в елементах електровакуумних приладів. – К.: Наук. думка, 1981. – 342 с.

Summary

Varyvoda Yu.Yu., Tsizh B.R ., Volos V.O.,
Chokhan M.I., Gonchar F.M., Seniv R.V.

THERMAL CONDUCTIVITY OF HETEROGENEOUS CYLINDRICAL WORKING NODES WHICH ARE USED IN THE PARTS AND MECHANISM OF MACHINERY AND FOOD PROCESSING EQUIPMENT

The work is devoted to the temperature fields in two-dimensional cylindrical body with the thermal characteristics of the components, that greatly differ among themselves. Method based on the use of the apparatus of generalized functions to represent the thermophysical and geometrical characteristics of the body not heterogeneous structure as a single whole makes it possible to solve the problem of thermal conductivity body of two- and three-dimensional piecewise homogeneous structure.

Using this method it was derived differential equations of unsteady thermal conductivity for heterogeneous massive cylindrical bodies, thermophysical characteristics of which are functions of cylindrical coordinates. In particular , the finite heterogeneous cylindrical body ,containing an alien not through mechanical inclusions in the form of a hollow cylinder. Using the method of the limit transition and properties of Dirac's delta functions from obtained equation of unsteady thermal *conductivity it was obtained partial cases of thermal conductivity equation for heterogeneous cylindrical bodies with thin-walled cylindrical inclusion and also differential equation of thermal conductivity for heterogeneous bodies with throughout inclusion. These partial cases were obtained in the literature earlier by the method of separate consideration of each of the components of the piecewise-homogeneous body and their subsequent coupling by the method of ‘’ Stitching’’ on connecting surfaces.*

Рецензент – д.т.н., професор Білонога Ю.Л.